

# FUNCIONES DE UNA VARIABLE II

Curso 2011/2012

(Código: 61021074)

## 1. PRESENTACIÓN DE LA ASIGNATURA

La asignatura de Funciones reales de una variable II continua con el estudio de las funciones con valores reales de variable real. El estudiante ha visto muchos de los contenidos que en la asignatura se exponen, bien en el Bachillerato bien en el Curso de Acceso a la Universidad, y por tanto no tienen que resultarle extraños gran parte de los teoremas expuestos. Hay otra parte absolutamente nueva que no debería de resultarle difícil una vez que haya cogido ritmo de estudio y asentado los conocimientos que ya traía y que sin lugar a duda deberá de ir profundizando conforme vaya avanzando en el estudio.

Parte de la presentación de una asignatura es ver desde el punto de vista histórico cómo han ido evolucionando sus contenidos y cómo se originaron.

Ya en la Grecia Antigua se establecieron métodos infinitesimales como formas de razonamiento partiendo de ideas atomísticas (Demócrito) para resolver áreas y volúmenes de ciertos conjuntos así como aproximaciones a algunos números irracionales, como el método de exhaustión de Eudoxo. Implícitamente se tenía la idea de límite, básica en el Análisis, aunque faltarían aún muchos siglos para una buena definición. Es muy importante tener en cuenta que una formulación fuertemente sustentada no ocurriría hasta el siglo XIX, y aún que el estudio de los números reales formalmente no se realizaría hasta finales de dicho siglo. Por tanto el desarrollo histórico no sigue, en absoluto, las exposiciones sistematizadas que hoy en día se presentan siendo, por ejemplo el concepto de derivada anterior al de función y éste anterior al de número real formalmente descrito.

Entre los primeros métodos infinitesimales que se utilizaron están los de Kepler (sXVII) y sus órbitas planetarias. Exigían métodos de integración, esto es, de cálculo de áreas y volúmenes que tuvieron una expresión precisa en los métodos de Cavalieri (sXVII) que consistía en convertir figuras planas en colecciones de segmentos paralelos y volúmenes en trozos de planos paralelos. Y estos fueron los comienzos del cálculo integral que se verían completados con los trabajos de Cauchy y Riemann (sXIX). Desde un punto de vista matemático Leibnitz trabaja para los siguientes problemas: Sumación de Series, problemas de obtención de tangentes, Reciprocidad entre los problemas de diferenciabilidad e integrabilidad. Introdujo "d" como símbolo de la diferencial y halló las reglas básicas de derivada de constantes, suma, producto. La notación para la derivada y la integración se debe a Leibnitz y facilitó la formalización de dichos conceptos.

La introducción de la derivada y la integral dió lugar a problemas prácticos importantes hasta el punto que en 1696 apareció el texto "Análisis Infinitesimal" de G.F. L'Hopital.

En el siglo XVIII la teoría de funciones se antepuso a los métodos infinitesimales como necesidad de fundamentación. El concepto de función entonces era entendido como correspondencia o ley que asociaba a números otros números o como expresión analítica, es decir, fórmulas que describían la función. De hecho el gran matemático Leonard Euler utilizaba la expresión en series infinitas de las funciones pensando que todas admitían este tipo de expresión. Detrás de todo subyacía la necesidad de formalizar el concepto de límite, lo que llevo a Cauchy a ocuparse del tema haciendo grandes avances en la teoría de funciones ya en las primeras décadas del siglo XIX y fundamentando todo el Análisis en los límites.

Tres obras hicieron posible la introducción del rigor y la sistematización: Curso de Análisis (1821), Resumen de conferencias sobre el cálculo de infinitesimales (1823) y Conferencias sobre aplicaciones del Análisis a la Geometría (Dos tomos 1826 y 1828). En el primero se introduce el concepto de convergencia, las funciones elementales y las series infinitas, y en el segundo se fundamenta el Cálculo diferencial e integral.

El lector observará que el orden en el que va a estudiar los conceptos no es ni mucho menos el histórico



sino una sistematización de lo que se ha producido a lo largo de varios siglos. Mucho de lo que hemos ido contando se desarrollará a lo largo del curso en las asignaturas relativas a la Teoría de funciones.

## 2.CONTEXTUALIZACIÓN EN EL PLAN DE ESTUDIOS

Al ser la segunda asignatura dentro de la materia Análisis Matemático los contenidos que en ella se imparten son básicos y por lo tanto inician al estudiante en el estudio de los tópicos básicos de la teoría de funciones y fundamentan todos los posteriores con aplicación a otras materias como la Geometría y Topología, Física, Ecuaciones diferenciales, Métodos numéricos y Estadística.

La asignatura es fundamental en el perfil profesional de un graduado en Matemáticas, pues contiene aspectos teóricos y prácticos, como el cálculo integral y las series de funciones, imprescindibles en el conocimiento para el análisis y resolución de cualquier problema teórico o práctico de muchas áreas propias del título o ajenas como la economía, física, química, ambientales, ingenierías, etc...

## 3.REQUISITOS PREVIOS REQUERIDOS PARA CURSAR LA ASIGNATURA

El nivel de acceso a la asignatura exige un Bachillerato de Ciencias o el Curso de Acceso a la Universidad con la asignatura de Matemáticas Especiales ya que en ellos se aprenden técnicas imprescindibles y conllevan una familiarización con los tipos de funciones elementales. Obviamente y por su situación dentro del grado, es muy conveniente haber cursado Funciones reales de una variable I.

Es conveniente que se realicen las autoevaluaciones del Curso 0 para localizar las posibles deficiencias que pueda traer el estudiante y subsanarlas con algunos de los textos de bachillerato o de la asignatura de Matemáticas Especiales del Curso de Acceso a la Universidad.

¿Qué conocimientos debe de traer el alumno para afrontar la asignatura con comodidad?. Estar familiarizado con las funciones polinómicas, racionales, logaritmo, exponencial, trigonométricas, e inversa de éstas, aunque dentro del contenido del curso se dan las definiciones rigurosas de éstas y se extraen las propiedades. El concepto de derivada e integral, tanto a nivel teórico como práctico aplicado especialmente a las funciones anteriores. También serán necesarios conocimientos básicos de la geometría del plano euclídeo y afín.

Un repaso a los libros de Matemáticas del Bachillerato o al libro de Matemáticas Especiales del CAU proveerá de una situación óptima para el desarrollo del curso de Funciones de una Variable I y II.

De hecho aunque el texto base, por seguir un desarrollo sistemático formaliza las funciones básicas con técnicas integrales, desde el principio se darán por sabidas y en su momento se aconsejarán ejercicios, que completando los del texto base, utilicen dichas funciones.

## 4.RESULTADOS DE APRENDIZAJE

Los resultados específicos de la materia Análisis Matemático que se obtienen con la asignatura son:

Entender el concepto de integral como descubrimiento que soluciona el antiguo problema del cálculo de áreas.(CED1,CEA1)

Relacionar las ideas geométricas y analíticas que subyacen al concepto de integral. (CEA8)

Comprender la estrecha relación entre los conceptos de integral y derivada mediante el Teorema Fundamental del Cálculo, el teorema del valor medio. (CED1, CEP4)

Calcular integrales mediante la Fórmula de Barrow. (CED1, CEP4)

Avanzar en el cálculo de primitivas para poder usar los resultados anteriores. (CEA1, CEP4, CEA3 y CEA4)

Manejar ejemplos y contraejemplos de funciones relacionadas con la integral.(CED1,CED2, CEA3, CEA4 y CEA8)

Formalizar las funciones elementales mediante el uso de las integrales. (CED1,CEA1, CEA6)

Conocer los métodos de cálculo asociados a las series de funciones, su relacionados con la derivada y la integral. (CED1 CEA8)

Entender el concepto de integrales impropias y su relación con las series numéricas.

Manejar las integrales eulerianas y sus fórmulas fundamentales. (CEP4, CEA3)

Cálculo de series de potencias. Relacionar las series de potencias con la fórmula de Taylor.(CD1, CEA2, CEA8)

A través de estos resultados se comienzan a adquirir las competencias disciplinares, profesionales y académicas. Específicamente, en la asignatura se fomenta la comprensión del concepto de límite de funciones y aquellos que le van



asociados, integral como herramienta de cálculo y como concepto primario del Análisis Matemático. De hecho al ser una asignatura eminentemente básica, fundamenta todas las competencias descritas en la memoria de grado. (Véase memoria de grado de Matemáticas).

## 5.CONTENIDOS DE LA ASIGNATURA

- 1) La integral de Riemann.  
En este tema se expone la construcción de la integral de Riemann y sus elementos asociados.
- 2) Teoremas Fundamentales del Cálculo  
Como el nombre de la sección implica es el contenido básico de la asignatura. En él se desarrollan los teoremas básicos que hacen útil la asignatura.
- 3) Funciones elementales: Logarítmicas, exponenciales y trigonométricas.  
Se construyen las funciones trigonométricas con todo rigor para fundamentar los conocimientos que ya veníamos usando.
- 4) Cálculo de Primitivas y sus aplicaciones.  
Desde un punto de vista práctico este es el tema más importante y el que justifica el valor objetivo de la integral porque dice cómo calcular la integral.
- 5) Integrales impropias.  
Es una generalización de la integral de Riemann que elimina condiciones de acotación y que tiene una aplicación en Física y otras ciencias.  
También se estudian un tipo muy especial de funciones, llamadas eulerianas, que vienen definidas por integrales impropias.
- 6) Sucesiones de Funciones  
Nos enfrentamos a un tema nuevo, las sucesiones de funciones y aprendemos a manejarlas y ver como se comportan con el concepto de derivada e integral.
- 7) Series de Funciones.  
Son un tipo especial de sucesiones de funciones y que además de su utilidad práctica tienen un interés histórico especial pues durante mucho tiempo se pensaba que toda función podía venir representada por una serie de funciones elementales.
- 8) Series de Potencias.  
Este es un excelente tema para introducirse en el Análisis Matemático con una importancia enorme para introducirse en tópicos que se irán estudiando a lo largo de todo el grado.

## 6.EQUIPO DOCENTE

- [JOSE LEANDRO MARIA GONZALEZ](#)
- [FRANCISCO JAVIER CIRRE TORRES](#)

## 7.METODOLOGÍA Y ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE

El plan de estudio se referirá al texto base "Análisis Matemático" (J.Fernández Novoa, UNED). En él se fijan tanto los contenidos del estudio como la notación, que puede cambiar en los distintos libros que tratan de la materia. En la parte 2, (Plan de Trabajo), de las orientaciones específicas se concretarán teoremas, proposiciones y ejercicios sobre los que el alumno deberá trabajar.

Gran parte de la formación recae sobre el trabajo personal del alumno con la bibliografía recomendada, básica y complementaria, siempre con la ayuda del profesor de la Sede Central de la UNED, los tutores y las tecnologías de la UNED de ayuda.

Los contactos con el profesor pueden ser: Presenciales en la Sede Central, por teléfono, e-mail, correo postal, y el curso virtual.

En el curso virtual vamos a hacer hincapié, porque está siendo una herramienta de enorme utilidad para los estudiantes en los años pasados.

- En el foro docente-guardia virtual los alumnos consultan al profesor cuestiones específicas de la asignatura que serán atendidas por éste.
- En el foro de consultas generales se plantearán preferentemente cuestiones de carácter burocrático, de gestión o de procedimientos de evaluación.
- En el foro de alumnos se podrán comunicar con los otros alumnos, no es un foro tutelado por lo que los profesores no tendrán por qué entrar en él.



- Finalmente se podrán crear foros de cuestiones concretas: derivabilidad, continuidad, etc... que consistirán en preguntas orientadas a la profundización y comprensión de los estudiantes, estarán abiertos durante un tiempo en el cual se contestarán los alumnos entre sí, participando el profesor sólo cuando lo considere necesario.

## 8.EVALUACIÓN

La Prueba Presencial en los Centros Asociados y en las fechas fijadas por la UNED tendrá el mayor peso en la nota final del alumno.

La Prueba consistirá en un examen con tres o cuatro problemas teóricos o prácticos, que podrán tener diversos apartados, y que no superarán en dificultad a los del libro básico. Su peso será del 80% de la nota final si el alumno se acoge a la evaluación continua. En caso contrario representará el 100% de la nota.

El 20% será opcional para los alumnos y responderá a la evaluación continua que se fijará específicamente durante el curso académico y corresponderá a una prueba que corregirá en tutor asignado y cuya calificación enviará el tutor antes de la prueba final.

**En caso de que el alumno decida no realizar los ejercicios de evaluación continua la nota final será la de la prueba presencial.**

Ejercicios de autoevaluación que no tendrán valor en la nota pero sí servirán para que el alumno controle su progreso.

## 9.BIBLIOGRAFÍA BÁSICA

ISBN(13): 9788436216677  
Título: ANÁLISIS MATEMÁTICO I (4ª)  
Autor/es: Fernández Novoa, Jesús ;  
Editorial: UNED

Buscarlo en Editorial UNED

Buscarlo en librería virtual UNED

Buscarlo en bibliotecas UNED

Buscarlo en la Biblioteca de Educación

Comentarios y anexos:

El alumno seguirá la notación del libro en su estudio, pues ésta tiene algunas diferencias de unos libros a otros. La oficial será la del libro base.

La materia de la asignatura "Funciones de una variable II" corresponde a las dos primeras unidades didácticas.

El libro es un estudio sistemático de los conceptos de límite, continuidad y derivabilidad. Pero en busca de la exposición sistemática adolece de ejercicios que involucran a funciones que son bien conocidas por el alumno y que se introducen posteriormente con la integral en "Funciones de una variable 2" como las funciones trigonométricas, sus inversas, la función logaritmo, la exponencial, las funciones potenciales, etc...

Por tanto el alumno deberá de completar los ejercicios de autocomprobación del final de cada tema con otros de los libros de problemas que trabajen con dichas funciones. Se considerará por tanto que el alumno conoce derivadas de las funciones elementales y que aprende a trabajar con ellas.

## 10.BIBLIOGRAFÍA COMPLEMENTARIA

Comentarios y anexos:



"Calculus vol. 1 y 2" ( M. Spivak, REVERTÉ) . Es un libro en el que se agrupan los teoremas de forma elegante con muchísimos ejemplos y gráficos que aclaran la teoría. Los problemas tienen varios niveles desde ejercicios hasta problemas más complicados. La exposición es brillante.

"Calculus, suplemento de problemas" ( M. Spivak, REVERTÉ) En este libro se resuelven los ejercicios plantados en el libro anterior.

"Calculus" (T.M. Apostol) Amplio tratado de la teoría de funciones a nivel elemental, con multitud de ejemplos.

"Calculo I" (A.García, F. Gutierrez, y otros. Librería AGLI). Un magnífico libro de problemas con introducciones teóricas. Tiene la virtud además de utilizar en la resolución de algunos problemas programas de cálculo simbólico.

"Análisis Matemático" (E. Linés, REVERTÉ) Un libro de enorme profundidad con resultados potentes que superan los contenidos del programa pero que es excelente como libro de consulta, tiene contrajemplos difíciles de encontrar agrupados en otros textos).

"Teoría y Problemas de Cálculo Integral" (Pastor, Varela, CRISSER). Es un libro de problemas con un desarrollo progresivo del cálculo integral, es un libro casi imprescindible para recordar las técnicas de integración y algunas de sus aplicaciones. Además tiene problemas del siguiente curso de funciones.

"Cálculo" (S. Lang, ADDISON-WESLEY IBEROAMERICANA). Libro Teoría con un desarrollo distinto al Texto Base. Es un libro de consulta y ampliación.

## 11.RECURSOS DE APOYO

- Curso Virtual. La UNED pone a disposición de los alumnos un curso virtual atendido por profesores en el cual se abren posibilidades como la comunicación casi inmediata con un tutor virtual que resolverá las dudas tanto generales como específicas de la asignatura, la comunicación entre alumnos de la asignatura en el foro de alumnos y además se irán abriendo foros con cuestiones específicas de temas concretos en el que los alumnos podrán intercambiar soluciones, correcciones a otros alumnos y en el que el profesor sólo intervendrá cuando sea necesario para reconducir el debate.
- Programa de cálculo simbólico MAPLE V. Los alumnos tienen acceso al programa mediante una clave que le proporcionará la UNED y con él podrán experimentar los contenidos de la asignatura a nivel de representación y cálculo.
- Página web del Departamento donde hay ejercicios resueltos y mucha información sobre el desarrollo esperado del curso.
- Programa de edición científica Scientific Notebook que proporcionará la UNED al que se podrá acceder mediante una clave.

## 12.TUTORIZACIÓN

Tutorización a través del Curso Virtual.

Tutorización telefónica en los horarios de guardia del profesor de la sede Central.

Tutorización postal.

Tutorización presencial en la Sede Central en los horarios de guardia del profesor.



El Seguimiento del Aprendizaje se realizará mediante el curso virtual y los foros abiertos para ese fin

Ámbito: GUI - La autenticidad, validez e integridad de este documento puede ser verificada mediante el "Código Seguro de Verificación (CSV)" en la dirección <https://sede.uned.es/valida/>



70A367B53988BF5E743AF8343BE7678