

# FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES I

Curso 2011/2012

(Código: 61021080)

## 1. PRESENTACIÓN DE LA ASIGNATURA

La asignatura FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES I está dedicada a la formación del estudiante en el inicio del Cálculo Vectorial. Ésta disciplina se ocupa del desarrollo de las herramientas del Cálculo Infinitesimal en un contexto espacial de dimensión  $n$ . Se hace especial incapié en el caso del espacio euclídeo de dimensión 3, ya que en este espacio se puede visualizar con relativa facilidad, la gráfica de una función  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , lo que constituye un salto cualitativo importante en relación al Análisis de funciones de una variable, así por ejemplo, el estudio del límite de una función en un punto  $p$  no se reduce únicamente al estudio de los dos límites laterales, sino a todas las posibles trayectorias por las que se puede tender a  $p$ . La generalización al caso  $n$ -dimensional está servida.

El Cálculo Vectorial es un soporte absolutamente imprescindible para el desarrollo de teorías físicas y matemáticas con un mínimo fundamento geométrico, así como de la aplicación práctica para el estudio de fenómenos de la vida real, por lo que se considera una disciplina fundamental para cualquier persona con formación científica.

## 2. CONTEXTUALIZACIÓN EN EL PLAN DE ESTUDIOS

La asignatura Funciones de varias variables I forma parte de la materia Análisis Matemático y en el plan de estudios de la titulación figura en el segundo cuatrimestre del primer curso. Esta asignatura aporta 6 créditos, equivalentes a 150 horas de trabajo.

Las competencias del grado de Matemáticas que se trabajan en particular en esta asignatura son:

CEA1 Comprensión de los conceptos básicos y familiaridad con los elementos fundamentales para el estudio de las Matemáticas superiores.

CEP3 Habilidad para la comunicación con profesionales no matemáticos para ayudarles a aplicar las matemáticas en sus respectivas áreas de trabajo.

CEP4 Resolución de problemas.

CEA1 Destreza en el razonamiento y capacidad para utilizar sus distintos tipos, fundamentalmente por deducción, inducción y analogía.

CEA2 Capacidad para tratar problemas matemáticos desde diferentes planteamientos y su formulación correcta en lenguaje matemático, de manera que faciliten su análisis y resolución. Se incluye en esta competencia la representación gráfica y la aproximación geométrica.

CEA3 Habilidad para crear y desarrollar argumentos lógicos, con clara identificación de las hipótesis y las conclusiones.

CEA7 Habilidad para presentar el razonamiento matemático y sus conclusiones de manera clara y precisa, de forma apropiada a la audiencia a la que se dirige, tanto en la forma oral como escrita.

## 3. REQUISITOS PREVIOS REQUERIDOS PARA CURSAR LA ASIGNATURA

El nivel de acceso a la asignatura exige un Bachillerato de Ciencias o el Curso de Acceso a la Universidad con la asignatura de Matemáticas Especiales. Aunque en esta línea de formación se supone un curso de funciones de variable real, es recomendable haber realizado los cursos de Funciones de una variable I y II por cuanto suponen un estudio más formal del Cálculo Infinitesimal.

Los primeros capítulos del programa se dedican a estudiar la geometría del espacio euclídeo por medio de los vectores del espacio. Sería útil estar familiarizado con la teoría de matrices aunque lo que necesitaremos de éstas se tratará en el curso.

Se suponen conocidas las funciones de una variable seno, coseno, exponencial y su inversa la función logaritmo neperiano. Además se recomienda el conocimiento de las técnicas de cálculo de límites de funciones de una variable, así como de las reglas básicas de derivación, como la regla de la cadena, derivación de un producto o un cociente.

Finalmente, se recomienda conocer la notación de intervalos en la recta real y su descripción en términos de desigualdades.

## 4. RESULTADOS DE APRENDIZAJE



Los resultados específicos de la asignatura son:

- Manejo de la ecuación de una recta en forma vectorial en el plano o el espacio tridimensional, así como del plano en el espacio.
- Conocimiento del producto escalar de dos vectores y su relación con la distancia entre dos puntos y con el ángulo entre dos vectores de  $\mathbb{R}^3$
- Conocimiento de la desigualdad de Cauchy-Schwarz y su interpretación geométrica.
- Saber calcular la proyección ortogonal de un vector sobre otro, ambos en  $\mathbb{R}^3$ .
- Conocimiento de la desigualdad triangular y su deducción a partir de la de Cauchy-Schwarz.
- Saber calcular el determinante de una matriz de orden dos o tres así como conocer sus propiedades.
- El producto vectorial de dos vectores de  $\mathbb{R}^3$ . Se sabrá hacer su cálculo y conocer sus propiedades.
- Conocer la interpretación geométrica de los determinantes  $2 \times 2$  y  $3 \times 3$ . Se obtendrá manejo de las coordenadas cilíndricas y esféricas en el espacio euclídeo tridimensional. Se generalizarán los conceptos estudiados para dimensión 3 a dimensión  $n$  de manera recurrente y por analogía.
- Se introducirán las funciones  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  desde un punto de vista geométrico, haciendo referencia a la gráfica de  $f$ , lo que permitirá el estudio de algunos aspectos geométricos como el cálculo de curvas o superficies de nivel de una gráfica.
- Se podrá determinar la continuidad en un punto, de una función  $f$  como en el apartado anterior.
- Diferencial de una función  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  en un punto  $p$ . Es un objetivo fundamental del curso. El estudiante conocerá el sentido de estudiar la diferencial analizando y calculando ésta, en caso de que exista, de una función  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , cuya gráfica se puede visualizar en  $\mathbb{R}^3$ . En este sentido se conocerá la relación con las derivadas parciales de  $f$  en  $p$  y el plano tangente a la gráfica de  $f$  en  $f(p)$ .
- Se conocerán los teoremas fundamentales sobre la diferenciación y sus implicaciones. Estos teoremas relacionan la diferenciación con la continuidad y las derivadas parciales.
- Se conocerá la aplicación de la regla de la cadena.
- Se conocerá el gradiente de una función y su relación con las derivadas direccionales. Se sabrá utilizar el gradiente para el cálculo de la derivada direccional y los planos tangentes a los conjuntos de nivel.
- Se conocerá el concepto de derivada parcial.
- Se sabrá calcular el Polinomio de Taylor para una función  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ .
- Se sabrá calcular la matriz hessiana de una función en un punto  $p$  y su utilización mediante el criterio del determinante, para obtener información acerca de  $p$ , si éste es un punto crítico.

A través de estos resultados se comienzan a adquirir las competencias disciplinares, profesionales y académicas.

## 5. CONTENIDOS DE LA ASIGNATURA

### 1. La geometría del espacio euclídeo

- a) Vectores en los espacios de dos y tres dimensiones
- b) Producto escalar, longitud y distancia
- c) Matrices, determinantes y producto vectorial
- d) Coordenadas cilíndricas y esféricas
- e) El espacio euclídeo  $n$ -dimensional

### 2. Continuidad

- a) La geometría de las funciones de varias variables
- b) La gráfica de una función
- c) Curvas de nivel
- d) Límites y continuidad

### 3. Diferenciación

- a) Diferenciación
- b) Trayectorias y curvas
- c) Propiedades de la derivada
- d) Gradiente
- e) Derivada direccional

### 4. Derivadas de orden superior. Máximos y mínimos

- a) Derivadas parciales
- b) El teorema de Taylor
- c) Extremos de funciones

## 6. EQUIPO DOCENTE



- [JOSE LUIS ESTEVEZ BALEA](#)

## 7.METODOLOGÍA Y ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE

El plan de trabajo se referirá al texto base Cálculo Vectorial (J. E. Marsden y A. J. Tromba, Pearson). En él se fijan tanto los contenidos del estudio como la notación, que puede cambiar en los distintos libros que tratan de la materia. En la segunda parte de la guía de estudio, (Plan de Trabajo), de las se concretarán orientaciones para el estudio de los temas, se insistirá en el tipo de ejercicios sobre los que el alumno deberá trabajar, y se indicará un cronograma temporal sobre la distribución de contenidos.

Gran parte de la formación recae sobre el trabajo personal del alumno con la bibliografía recomendada, básica y complementaria, siempre con la ayuda del profesor de la Sede Central de la UNED, los tutores y las tecnologías de la UNED de ayuda.

Los contactos con el profesor pueden ser: Presenciales en la Sede Central, por teléfono, e-mail, correo postal, y el curso virtual.

En el curso virtual vamos a hacer hincapié, porque está siendo una herramienta de enorme utilidad para los estudiantes en los últimos años

- En el foro docente-guardia virtual los alumnos consultan al profesor cuestiones específicas de la asignatura que serán atendidas por éste.
- En el foro de consultas generales se plantearán preferentemente cuestiones de carácter burocrático, de gestión o de procedimientos de evaluación.
- En el foro de alumnos se podrán comunicar con los otros alumnos, no es un foro tutelado por lo que los profesores no se responsabilizarán del contenido del mismo.

Finalmente se podrán crear foros de cuestiones concretas: conjuntos, relaciones, etc... que consistirán en preguntas orientadas a la profundización y comprensión de los estudiantes, estarán abiertos durante un tiempo en el cual se contestarán los alumnos entre sí, participando el profesor sólo cuando lo considere necesario.

## 8.EVALUACIÓN

- La Prueba Presencial en los Centros Asociados y en las fechas fijadas por la UNED tendrá el mayor peso en la nota final del alumno.La Prueba consistirá en un examen con cuatro o cinco problemas teóricos o prácticos, que podrán tener diversos apartados, y que no superarán en dificultad a los del libro básico.
- El resto de actividad sujeta a evaluación, será opcional para los alumnos y responderá a la evaluación continua que se fijará específicamente durante el curso académico y se anunciará en el curso virtual. Con un peso menor que la prueba presencial servirá como entrenamiento para el examen final. En caso de que el alumno decida no realizar los ejercicios de evaluación continua la nota final será la de la prueba presencial.
- Ejercicios de autoevaluación que no tendrán valor en la nota pero sí servirán para que el alumno controle su progreso.

## 9.BIBLIOGRAFÍA BÁSICA

ISBN(13): 9788478290697

Título: CÁLCULO VECTORIAL (5ª)

Autor/es: Tromba, Anthony J. ; Marsden, Jerrold E. ;

Editorial: PEARSON ADDISON-WESLEY

Buscarlo en Editorial UNED

Buscarlo en librería virtual UNED

Buscarlo en bibliotecas UNED

Buscarlo en la Biblioteca de Educación

Comentarios y anexos:



El alumno seguirá las notaciones y terminología del libro en su estudio, pues ésta puede variar de unos libros a otros. La oficial será la del libro base. Los capítulos están profusamente ilustrados, lo que permite una mejor fijación de los conceptos para después hacer la generalización a dimensión arbitraria. Los conceptos fundamentales de cada tema van acompañados de un buen número de ejemplos cuyo objetivo es doble: por un lado está el propósito de ilustrar los conceptos presentados, por otro lado constituyen una serie de ejercicios resueltos que facilitan la profundización y reflexión sobre dichos conceptos a la vez que sirven de modelo para resolver otros ejercicios.

Al comienzo del libro, así como en algunos capítulos se ha incluido una sección titulada "Notas Históricas", que contextualizan el concepto tratado en la Historia de las Matemáticas y que pueden dar al alumno, una idea de la profundidad o el valor del concepto del que se trata.

Los ejercicios al final de cada capítulo deben permitir al estudiante comprobar la adquisición de conocimientos.

## 10. BIBLIOGRAFÍA COMPLEMENTARIA

ISBN(13): 9788487555916

Título: PROBLEMAS DE CÁLCULO DIFERENCIAL EN VARIAS VARIABLES

Autor/es: Alberto Blanco ;

Editorial: EDINFORD

Buscarlo en librería virtual UNED

Buscarlo en bibliotecas UNED

Buscarlo en la Biblioteca de Educación

Buscarlo en Catálogo del Patrimonio Bibliográfico

ISBN(13): 9788492184750

Título: CÁLCULO II: TEORÍA Y PROBLEMAS DE FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES (2ª ed.)

Autor/es: García López, Alfonsa ;

Editorial: CLAGSA

Buscarlo en librería virtual UNED

Buscarlo en bibliotecas UNED

Buscarlo en la Biblioteca de Educación

Buscarlo en Catálogo del Patrimonio Bibliográfico

ISBN(13): 9788493527129

Título: ANÁLISIS MATEMÁTICO II: (VARIAS VARIABLES): 90 PROBLEMAS ÚTILES

Autor/es: Juan De Burgos ;

Editorial: García Maroto Editores

Buscarlo en librería virtual UNED

Buscarlo en bibliotecas UNED

Buscarlo en la Biblioteca de Educación

Buscarlo en Catálogo del Patrimonio Bibliográfico

ISBN(13): 9788493671228

Título: CÁLCULO VECTORIAL. DEFINICIONES, TEOREMAS Y RESULTADOS

Autor/es: Burgos, Juan De ;

Editorial: García-Maroto Editores



Buscarlo en librería virtual UNED

Buscarlo en bibliotecas UNED

Buscarlo en la Biblioteca de Educación

Buscarlo en Catálogo del Patrimonio Bibliográfico

ISBN(13): 9788497322904

Título: PROBLEMAS RESUELTOS DE CÁLCULO EN VARIAS VARIABLES

Autor/es: Venancio Tomeo, Jesús San Martín E Isaías Álvarez ; Tomeo Perucha ;

Editorial: : PARANINFO

Buscarlo en librería virtual UNED

Buscarlo en bibliotecas UNED

Buscarlo en la Biblioteca de Educación

Buscarlo en Catálogo del Patrimonio Bibliográfico

ISBN(13): 9789702606444

Título: CÁLCULO: VARIAS VARIABLES (11)

Autor/es: Thomas, George B. ;

Editorial: PEARSON ADDISON-WESLEY

Buscarlo en librería virtual UNED

Buscarlo en bibliotecas UNED

Buscarlo en la Biblioteca de Educación

Buscarlo en Catálogo del Patrimonio Bibliográfico

### Comentarios y anexos:

Los libros que se han incluido en la lista de Bibliografía Complementaria se incluyen como ayuda para que el alumno tenga algunas referencias de las muchas que hay sobre el tema. El texto base es lo suficientemente didáctico para explicar los conceptos que se tratan en el curso. En los libros de Bibliografía Complementaria el alumno puede encontrar ejercicios adicionales para realizar más práctica, si así lo desea.

De los libros de esta lista destacaríamos dos por su cuidada edición y publicación reciente:

- Cálculo II: Teoría y problemas de funciones de varias variables. (Alfonsa García, Antonio López, Gerardo Rodríguez, Sixto Romero y Agustín de la Villa). Destaca su claridad expositiva y ejemplos didácticos. Contiene información para trabajar con programas informáticos.
- Cálculo: Varias Variables. (George B. Thomas). Escrito en un estilo parecido al del texto base, con numerosas ilustraciones y ejercicios.

## 11.RECURSOS DE APOYO



- Curso Virtual. La UNED pone a disposición de los alumnos un curso virtual atendido por profesores en el cual se abren posibilidades como la comunicación casi inmediata con un tutor virtual que resolverá las dudas tanto generales como específicas de la asignatura, la comunicación entre alumnos de la asignatura en el foro de alumnos y además se irán abriendo foros con cuestiones específicas de temas concretos en el que los alumnos podrán intercambiar soluciones, correcciones a otros alumnos y en el que el profesor sólo intervendrá cuando sea necesario para reconducir el debate.
- Programa de cálculo simbólico MAPLE V. Los alumnos tienen acceso al programa mediante una clave que le proporcionará la UNED y con él podrán experimentar sobre diversos cálculos numéricos.
- Programa de edición científica Scientific Notebook que proporcionará la UNED al que se podrá acceder mediante una clave.

## 12.TUTORIZACIÓN

- Tutorización a través del Curso Virtual.
- Tutorización telefónica en los horarios de guardia del profesor de la Sede Central.
- Tutorización postal.
- Tutorización presencial en la Sede Central en los horarios de guardia del profesor.

El Seguimiento del Aprendizaje se realizará mediante el curso virtual y los foros abiertos para ese fin.

