ASIGNATURA DE GRADO:

ESPACIOS NORMADOS

Curso 2013/2014

(Código:61024026)

1.PRESENTACIÓN DE LA ASIGNATURA

La teoría de los espacios normados es la conjunción de métodos topológicos, geométricos y algebraicos orientados a las aplicaciones de ciertas cuestiones planteadas en el análisis de los espacios de funciones (en sentido amplio).

Durante el siglo XIX se habían ido resolviendo problemas de forma separada que surgían de las aplicaciones a la Física como las ecuaciones diferenciales, las ecuaciones integrales y un sinnúmero de operadores entre espacios de funciones. El tratamiento por separado que hasta entonces necesitaba de una unificación y la topología general del siglo XX, la teoría de la integral cada vez más abstracta proporcionó el marco adecuado para que mentes brillantes como Riesz, Lebesgue, Baire, Banach, Hahn, Steinhaus, entre otros fuesen construyendo una teoría potente que tratase de manera unificada y sistemática cuestiones hasta entonces no conexionadas.

Formalmente los espacios normados son particularizaciones de los espacios métricos y estos de los topológicos. A su vez los espacios de Hilbert son un ejemplo de los espacios normados. Ahí encajan. Claro, algunas propiedades de los espacios de Hilbert se pierden por un lado, pero también se aplican a más ejemplos con métricas no euclideas. Y los Espacios Normados, y especialmente los Espacios Normados Completos o Espacios de Banach mantienen propiedades geométricas que guían la intuición en aplicaciones muy diversas como los espacios vectoriales de funciones continuas, integrables o sucesiones.

Así los teoremas básicos de la teoría son extensiones no triviales de cuestiones del Álgebra Lineal, con componentes de continuidad (Topología) y casi siempre con una interpretación geométrica.

El estudiante de esta asignatura se encontrará con el reto de enfrentarse a que cuestiones asumidas en los espacios vectoriales de dimensión finita no pueden ser supuestas cuando estos son de dimensión infinita. Y en esa dirección van los importantes teoremas que se le irán desplegando a lo largo del curso.

Espacios de dimensión infinita, topologías débiles, compacidad de subconjuntos, sucesiones de Cauchy no convergentes, operadores continuos y no continuos son algunas de las herramientas que tiene la asignatura para que el estudiante aprenda y reflexione.

PEQUEÑA PRESENTACIÓN HISTÓRICA

Los espacios normados fueron introducidos en la segunda decada del siglo XX. No fué un hecho aislado, porque paralelamente se desarrollaban teorías más generales como eran los espacios vectoriales topológicos y otras más concretas como la de los espacios de Hilbert. Por supuesto unas y otras iban influyendose entre sí, la teoría de espacios de Hilbert fué una inagotable fuente de sugerencias y definiciones que los espacios normados recogieron y ampliaron afinándolas. Lógicamente importantes matemáticos hacían artículos con repercusión en varias teorías a la vez.

Ya desde el origen del Cálculo Infinitesimal se vió la necesidad para el tratamiento de algunos problemas el paso de lo finito a lo infinito. El cálculo en diferencias dio lugar a su paso a lo infinito con el cálculo infinitesimal. A mediados del siglo XVIII las semejanzas entre el Álgebra Lineal y los problemas del Cálculo Diferencial se manifiestan en el estudio de la ecuación de las cuerdas vibrantes. Daniel Bernoulli tiene dos ideas que serán reiterativas en el tratamiento de los problemas funcionales con origen en la ecuación de la cuerda vibrante.

La primera es considerar la oscilación de una cuerda como el limite de la oscilación de n masas puntuales en la cuerda vibrante.

La segunda es que la oscilación general se puede descomponer como la suma de las oscilaciones propias.

Pero lo fundamental es que tanto las ecuaciones diferenciales como las ecuaciones integrales se empezaron a considerar como operadores definidos en espacios de funciones con valores en espacios de funciones. Muchos de ellos tenían propiedades lineales con lo cual eran una generalización de las trasformaciones lineales.

Bernhard Riemann (1826-1866) en su tesis ya hablaba de colecciones de funciones formando un conjunto conexo y cerrado.

Ascoli y Arzela intentaron extender la teoría de conjuntos de Cantor a conjuntos de funciones que consideraban como puntos. Hadamard en el Primer Congreso Internacional de Matemáticos de 1897 sugirió que se tratasen como conjuntos de puntos ciertas colecciones de curvas a efectos de utilizarlas como dominios de definición de los operadores para utlizar métodos análogos al análisis matemático y del álgebra lineal.

El mayor esfuerzo por construir una teoría abstracta de los espacios de funciones lo hizo Maurice Fréchet (1878-1973) en su tesis doctoral de 1906, en la que introdujo los espacios métricos, asi como los operadores lineales y (esto está relacionado con nuestro trabajo) denominó "extremal" a los conjuntos secuencialmente compactos y "compactos" a los relativamente secuencialmente compactos.

Las métricas en los espacios de funciones que hoy conocemos como norma del supremo y de la integral también se definieron en los trabajos de Fréchet, así como la métrica (denominada de Fréchet) en los espacios de sucesiones. Otros de los logros de este matemático francés fué la definición de continuidad y diferenciabilidad de un funcional, lo que hoy conocemos como derivada de Fréchet.

En 1906 E.H.Moore comenzó a extraer de la teoría de las ecuaciones lineales con un número finito de incognitas la teoría para infinitas incognitas, y a sus estudios los denominó Análisis General con una introducción axiomática.

Los estudios de Hilbert sobre las ecuaciones integrales se basaban en el desarrollo de las funciones por su serie de Fourier, pero Hilbert no asoció los coeficientes de Fourier a puntos de un espacio infinito dimensional. Quien lo hizo fué Schmidt fundamentando desde el caso de dimensión finita al infinito las desigualdades de Bessel y la fórmula de Schwarz. En 1907 tanto Schmidt como Fréchet anunciaron que la geometría del espacio L^{2}era identica a los espacios de Hilbert. A partir de aquí ya se hace evidente el paralelismo entre los espacios de Hilbert y los espacios de funciones. Hilbert en su espacio axiomatizado se ve en la necesidad de introducir dos tipos de convergencia distintos: los que corresponden a nuestra convergencia débil y fuerte.

Otra aproximación a los espacios abstractos la inició Riesz, aproximadamente en 1918, aunque la definición completa es de Banach que junto con Hahn y Helly trabajaron sabiendo que las normas podrían no tener un producto escalar asociado. La mayor generalidad llevaba a estudiar más espacios pero se perdía la ortogonalidad y por tanto la posibilidad de asegurar la existencia y localización de puntos próximos.

Banach introdujo la definición de operador lineal continuo y estudio la ecuación

$$x+hF(x)=y$$

donde x e y son funciones de un espacio, F un operador lineal continuo y h un escalar. Encontró una solución en forma de serie. Generalizando el método de Volterra de resolución de las ecuaciones integrales.

En 1927 Hahn enunció el Teorema de Hahn y en 1929 Banach independiente lo enunció y demostró el teorema que pasó a llamarse de Hahn-Banach. Entre ambos construyen toda la teoría de dualidad y de operadores y sus traspuestos. Hubo muchas aportaciones de Helly y Minkowski. Steinhaus y Saks se preocupan por las cuestiones de "categoría" lo quedesemboca en el enunciado de los teoremas de Grafico Cerrado y Babach-Steinhaus, dejando construidas las bases que fundamentan la teoría.

Todos estos avances pudieron ser formalizados y estructurados por los avances de la Topología General entre 1930 y 1940, afinados por el uso de J. von Neumann en 1935 de los espacios localmente convexos y de los conjuntos acotados, que consiguieron espectaculares resultados en los trabajos de Mackey.

Una de las aplicaciones más potentes es la Teoría de Distribuciones de Schwartz donde los espacios localemte convexos y sus duales es fundamental en la resolución de ecuaciones funcionales.

Cada teorema tiene una historia de una investigación detrás que el estudiante aficionado podrá rastrear.

2.CONTEXTUALIZACIÓN EN EL PLAN DE ESTUDIOS

La asignatura “Espacios normados” se encuentra al final del Grado en Matemáticas, en cuarto curso y tiene carácter optativo con 5 créditos ECTS, lo que supone 125 horas de estudio activo por parte del estudiante. Esta optatividad presupone un interés por parte del alumno por cursarla.

Tiene un matiz muy teórico en cuanto a sus enunciados si bien sus aplicaciones son imprescindibles en todo el Análisis Matemático que se ha ido haciendo en el siglo XX. El tiempo en Matemáticas es lento, por lo que un conocimiento es “moderno” aunque ya haya cumplido los cien años. Desde este punto de vista los Espacios Normados son muy modernos y su origen fueron las aplicaciones a resultados de problemas concretos, ecuaciones diferenciales e integrales provenientes de la Física, generalización del concepto de matriz a operadores y por tanto matematización de la Mecánica Cuántica, profundización en las propiedades de los espacios de Hilbert,…, que en la mente de brillantes matemáticos tenían un substrato común y optaron por contextualizarlas en un marco general para tratar de manera única problemas aparentemente alejados.

Además esta generalización conllevaba el uso de las intuiciones que el Álgebra Lineal proporcionaba con el rigor y potencia del Análisis Matemático y la Topología, lo que facilitaba espectacularmente el avance que se produjo desde la segunda década del siglo pasado en adelante.

Por tanto es una materia eminentemente analítica y geométrica donde el alumno que la curse tendrá que reflexionar sobre las diferencias drásticas entre lo que ocurre en los espacios vectoriales de dimensión finita y los espacios vectoriales de dimensión infinita cuando se les incorpora una determinada topología.

La asignatura al final del grado sirve para englobar lo que el alumno ha ido aprendiendo del Álgebra Lineal, de las sucesivas asignatura que desarrollan el Análisis Matemático, en incluso de la Topología General que encuentra en los espacios normados una excelente concreción de algunos de sus resultados y de sus contraejemplos.

3.REQUISITOS PREVIOS REQUERIDOS PARA CURSAR LA ASIGNATURA

Dado el lugar que ocupa la asignatura en el Plan de Estudios es muy conveniente no haber dejado lagunas de conocimiento antes de cursarla.

Aconsejamos haber aprobado el Álgebra Lineal, las asignaturas relativas al análisis de funciones reales y complejas, pero además las asignaturas de Topología de tercer curso, Introducción a los espacios de Hilbert de tercer curso y Integral de Lebesgue de cuarto curso primer semestre son las herramientas básicas que vamos a usar en “Espacios normados”.

4.RESULTADOS DE APRENDIZAJE

Los resultados específicos de la materia Espacios Normados que se obtienen con la asignatura son:

Entender el concepto de distancia y norma como generalización del marco de los espacios euclídeos de dimensión finita y de los Espacios de HIlbert.(CED1,CEA1)

Relacionar las ideas geométricas y analíticas que subyacen al concepto de norma. (CEA8)

Comprender la estrecha relación entre los conceptos de norma y los conceptos geométricos abstraídos de los espacios de dimensión finita. (CED1, CEP4)

Conocer los principales espacios normados y entender sus peculiaridades. (CED1, CEP4)

Avanzar en el uso de las aplicaciones lineales continuas para deducir consecuencias desde el espacio dual y bidual. (CEA1, CEP4, CEA3 y CEA4)

Estudiar el teorema de Hahn-Banach como la pieza clave en la teoría de los espacios normados.(CED1,CED2, CEA3, CEA4 y CEA8)

Conocimiento de los otros tres teoremas básicos deduciéndolos del teorema de Baire: teorema de Acotación Uniforme, teorema de la aplicación abierta y teorema del grafo cerrado. (CED1,CEA1, CEA6)

Introducirse en la teoría de los operadores lineales continuos entre espacios de Banach. (CED1 CEA8)

Entender el concepto base de Schauder como generalización topológica de las bases algebraicas con respecto a las propiedades topológicas del espacio normado y distinguirlas de las bases de Hamel.(CD1, CEA2, CEA8)

A través de estos resultados se completan las competencias disciplinares, profesionales y académicas. Específicamente, en la asignatura se fomenta la comprensión y unificación de los conceptos asociados al Algebra Lineal, al Análisis Matemático, a las Geometrías Lineales y la Topología.

De hecho al ser una asignatura eminentemente global, afianza todas las competencias descritas en la memoria de grado. (Véase memoria de verificación del grado de Matemáticas).

5.CONTENIDOS DE LA ASIGNATURA

1. Espacios Métricos. Nociones Generales sobre Espacios Métricos.

2. Espacios normados y Espacios de Banach.

Espacios normados. Definición y ejemplos.

Desigualdades de Hölder y Minkowski.

Espacios Lp.

Propiedades de los espacios normados.

Espacios normados de dimensión finita

Teorema de Riesz.

Operadores lineales acotados (ó continuos)

3. Repaso de los espacios de Hilbert.

Teorema de representación de Riesz.

4. Teorema de Hahn-Banach.

Consecuencias del Teorema de Hahn-Banach. Espacio Doble Dual o Bidual.

5. Principio de Acotación uniforme y teorema de Banach-Steinhaus.

Teorema de categoría de Baire.

Principio de Acotación Uniforme y teorema de Banach-Steinhaus.

6. Convergencias débil, débil-* y fuerte

Teorema de Banach-Alaoglu

7. Teoremas de la Aplicación Abierta y del Grafo Cerrado.

Teorema de categoría de Baire

Teorema de la Aplicación Abierta

Teorema del gráfico cerrado

El concepto de operador cerrado

8. Definiciones básicas de los operadores compactos y su teoría espectral en los espacios normados.

6.EQUIPO DOCENTE

- JOSE LEANDRO MARIA GONZALEZ

7.METODOLOGÍA Y ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE

El plan estudio se referirá al texto base Un curso de Análisis Funcional. Teoría y problemas (autores: Antonio Vera López y Pedro Alegría Ezquerra).

En él se fijan tanto los contenidos del estudio como la notación, que puede cambiar en los distintos libros que tratan de la materia. En la parte 2,(Plan de Trabajo), de las orientaciones específicas se concretarán teoremas, proposiciones y ejercicios sobre los que el alumno deberá trabajar.

AVISO IMPORTANTE: La notación oficial de la asignatura será la del TEXTO BASE.

Gran parte de la formación recae sobre el trabajo personal del alumno con la bibliografía recomendada, básica y complementaria, siempre con la ayuda del profesor de la Sede Central de la UNED, los tutores y las tecnologías de la UNED de ayuda.

Los contactos con el profesor pueden ser: Presenciales en la Sede Central, por teléfono, e-mail, correo postal, y el curso virtual.

Vamos a hacer hincapié en el curso virtual , porque está siendo una herramienta de enorme utilidad para los estudiantes en los años pasados.

·En el foro docente-guardia virtual los alumnos consultan al profesor cuestiones específicas de la asignatura que serán atendidas por éste.

·En el foro de consultas generales se plantearan preferentemente cuestiones de caracter burocrático, de gestión o de procedimientos de evaluación.

·En el foro de alumnos se podrán comunicar con los otros alumnos, no es un foro tutelado por lo que los profesores no tendrán porqué entrar en él.

·Finalmente se podrán crear foros de cuestiones concretas que consistirán en preguntas orientadas a la profundización y comprensión de los estudiantes, estarán abiertos durante un tiempo en el cual se contestarán los alumnos entre sí, participando el profesor sólo cuando lo considere necesario.

8.EVALUACIÓN

El alumno podrá acogerse a dos modalidades de evaluación:

A. Evaluación continua. Se fijarán en la Guía de Estudio de la asignatura “Espacios Normados” una o varias actividades que el alumno realizará a lo largo del semestre y que serán evaluadas dando lugar a una NotaPEC y conjuntamente con la nota de la Prueba Presencial producirán mediante un porcentaje la nota Final.

Cada curso en el Plan de Trabajo se podrán hacer especificaciones sobre la evaluación PEC e introducir cambios según la experiencia de los cursos anteriores. Ver la Guía de Curso en el Plan de Trabajo.

B. Evaluación mediante la Prueba Presencial. El alumno decide no acogerse a la evaluación continua y su nota

Final será la de la nota de la Prueba Presencial.

La Prueba Presencial consistirá en un examen con tres o cuatro problemas teóricos o prácticos, que podrán tener diversos apartados, y que no superarán en dificultad a los del libro básico.

En caso de que el alumno decida no realizar los ejercicios de evaluación continua la nota final será la de la prueba presencial.

9.BIBLIOGRAFÍA BÁSICA

Comentarios y anexos:

"Un curso de Análisis Funcional. Teoría y problemas"

Autores: Antonio Vera López y Pedro Alegría Ezquerra

Editorial: AVL

ISBN: 978-84-921102-8-5.

El libro base ha sido elegido por la exposición clara y sistemática de los teoremas, pero además es de los pocos libros de esta materia con una colección magnífica de problemas que han de ser tratados como la teoría en importancia pues son una buena muestra de ejemplos y aplicaciones que el alumno debe de conocer.

En la Guía de Estudio de la asignatura a la que tienen acceso los alumnos matriculados se explicarán los distintos medios de conseguir el libro, pues puede pedirse directamente al primer autor.

10.BIBLIOGRAFÍA COMPLEMENTARIA

Comentarios y anexos:

- Problemas de espacios métricos, normados y de Hilbert. Hernando Boto,B. Cuadernos de la UNED. UNED. ISBN 84-362-3949-0

Es una fantástica colección de`problemas explicados con todo detalle que cubren una parte de los conceptos introductorios de nuestro temario. Durante años se ha usado como libro en el antiguo Análisis Matemático II con gran satisfacción de los alumnos. Además se encuentra en todas las bibliotecas de la UNED por haber sido texto en la licenciatura. Muy, muy aconsejable.

- Elementary Functional Analysis. Maccluer, B.D. Graduate Texts in Mathematics. Springer. ISBN 970-0-387-85528-8

Es un libro reciente, muy concreto con ejercicios propuestos, con una información que supera la del curso pero cuyo programa se ajusta bien a lo que se pide y amplía en varias cuestiones los tópicos de la asignatura.

- A course in Functional Analysis. Conway, J.B. Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag. ISBN 0-387-96042-2

Es un excelente libro de consulta que trata muy bien los temas del programa con una visión más general de lo que podemos exigir en el semestre.

- An introduction to Banach Spaces Theory. Meggison, R.E. Graduate Text in Mathematics. Springer. ISBN 0-

387-98431-3

Trata los temas del curso con toda claridad y se recomienda su utilización para ampliar, si el alumno lo desea, la materia del curso.

Hay muchos libros clásicos de Espacios de Banach algunos, no muchos, traducidos, pero no es posible aconsejarlos porque están descatalogados o son de difícil localización. Hemos buscado una pequeña lista de libros actuales y que se ajusten lo más posible a nuestro temario.

11.RECURSOS DE APOYO

Curso Virtual. La UNED pone a disposición de los alumnos un curso virtual atendido por profesores en el cual se abren posibilidades como la comunicación casi inmediata con un tutor virtual que resolverá las dudas tanto generales como específicas de la asignatura, la comunicación entre alumnos de la asignatura en el foro de alumnos y además se irán abriendo foros con cuestiones específicas de temas concretos en el que los alumnos podrán intercambiar soluciones, correcciones a otros alumnos y en el que el profesor sólo intervendrá cuando sea necesario para reconducir el debate.

12.TUTORIZACIÓN

Tutorización a través del Curso Virtual.

Tutorización telefónica en los horarios de guardia del profesor de la sede Central.

Tutorización postal.

Tutorización presencial en la Sede Central en los horarios de guardia del profesor.

El Seguimiento del Aprendizaje se realizará mediante el curso virtual y los foros abiertos para ese fin.