

# MÉTODOS MATEMÁTICOS IV

Curso 2013/2014

(Código: 61043012)

## 1. PRESENTACIÓN DE LA ASIGNATURA

Bienvenidos a la asignatura de Métodos Matemáticos IV

El contenido de esta asignatura es Cálculo Tensorial y Geometría Diferencial. Posiblemente la segunda parte de la asignatura necesite poca presentación. En Geometría Diferencial vamos a estudiar principalmente las propiedades de curvas y superficies, las distintas formas que existen para definir las (paramétrica, implícita) y sus principales propiedades (p. ej. su curvatura). El interés de esto en física es evidente, dado que las curvas y superficies son ingredientes habituales en la descripción matemática de multitud de sistemas físicos. Por ejemplo, desde los cursos más básicos de física se emplea el concepto de curva para describir las trayectorias de objetos móviles, o las líneas de campo para la descripción de campos vectoriales. En cuanto a las aplicaciones del estudio de superficies podemos considerar, p. ej., su uso para la descripción de campos escalares (como el potencial eléctrico), por medio del estudio de las superficies equipotenciales.

Uno de los conceptos más básicos en relación a la geometría de curvas es el de su longitud, que corresponde a la distancia recorrida si suponemos que la curva en cuestión es la trayectoria de un móvil. También veremos p. ej. cómo pueden calcularse la curvatura y torsión de una curva. En el caso de las superficies aparecen otras magnitudes interesantes que veremos en esta asignatura. Por ejemplo, estudiaremos cómo se calcula la longitud de una curva definida sobre una superficie determinada; cómo se describe la curvatura de una superficie, cómo se calcula su área, o cómo se calcula el ángulo formado por dos curvas que se cruzan en un punto determinado, o cuál es la curva más corta contenida en una superficie que une dos puntos dados de dicha superficie. Todo ello con diversas aplicaciones en física. Por último veremos las herramientas necesarias para la descripción y el cálculo con campos (p. ej. escalares o vectoriales) definidos sobre superficies, para lo cual haremos uso del Cálculo Tensorial estudiado en la primera parte.

La primera parte de esta asignatura es algo más abstracta y posiblemente requiera mayor esfuerzo. En esta parte combinaremos conceptos sobre espacios vectoriales y aplicaciones lineales con conceptos de cálculo infinitesimal. El estudio de los tensores aparece de forma natural cuando se consideran cambios de base en espacios vectoriales. En este sentido estudiaremos cómo se transforman los objetos tensoriales definidos sobre un espacio vectorial bajo un cambio de base de dicho espacio, en función del rango tensorial del objeto de que se trate. En particular, veremos el caso de los tensores de orden 0 (es decir, escalares), que son invariantes bajo cambios de base; el de los tensores de orden 1 (vectores), y el de los tensores de orden 2 (aplicaciones lineales). A continuación consideraremos el caso de tensores definidos como función del punto en el espacio vectorial (por ejemplo el potencial eléctrico, que es un campo escalar, o el de un campo de velocidades en un fluido, que es un campo vectorial), y veremos cómo se transforman estos campos bajo un cambio de base definido como función del punto. Esto nos permitirá aplicar las herramientas habituales del cálculo vectorial (gradiente, divergencia, rotacional, laplaciano) al caso de campos definidos sobre superficies diferenciables.

La relevancia en física del Cálculo Tensorial es enorme. En general todas las magnitudes físicas que se manejan a diario son objetos matemáticos con rango tensorial bien definido, es decir, son tensores. Por ejemplo ya hemos mencionado que los escalares son tensores de orden 0 (temperatura, masa, densidad), los vectores son tensores de orden 1 (velocidad, aceleración, fuerza) y las aplicaciones lineales son tensores de orden 2 (tensor de deformación en mecánica del continuo, tensor de velocidad de deformación en mecánica de fluidos, tensor de tensiones). El Cálculo Tensorial resulta indispensable siempre que trabajemos con este tipo de objetos y vayamos a aplicar cambios de base, lo cual es muy frecuente en física. Esto es lo que sucede por ejemplo cuando tenemos que resolver problemas en dominios espaciales con una forma geométrica que obliga (o al menos aconseja) el uso de coordenadas diferentes de las cartesianas (son archiconocidos los casos de simetría cilíndrica o esférica, pero hay innumerables ejemplos aparte de estos). El Cálculo Tensorial es indispensable para el estudio de la Teoría General de la Relatividad, pero también encuentra aplicaciones en otras ramas de la física, como la Mecánica de Fluidos, el Electromagnetismo o la Termodinámica, tal y como iremos mostrando a su debido



tiempo.

## 2.CONTEXTUALIZACIÓN EN EL PLAN DE ESTUDIOS

Métodos Matemáticos IV es una asignatura de carácter básico de la rama de Ciencias que se imparte durante el primer semestre del tercer curso del grado en Físicas. Tiene asociados 6 créditos ECTS (de 30 horas cada uno) y no tiene prácticas de laboratorio. En esta asignatura se combinan y generalizan diversos conceptos estudiados en álgebra con herramientas de cálculo infinitesimal estudiadas en análisis matemático. Todo ello se aplica al estudio de curvas y superficies, y cálculo con campos tensoriales (en particular escalares y vectoriales) en coordenadas generalizadas.

Los conceptos introducidos en esta asignatura forman parte del lenguaje básico de multitud de ramas de la física, en particular de las relacionadas con mecánica (p. ej. mecánica de fluidos), electromagnetismo, o relatividad. Por tanto, los conocimientos matemáticos adquiridos en esta asignatura serán de gran utilidad en diversas asignaturas del grado. Aunque el temario de esta asignatura versa sobre conceptos matemáticos abstractos, en el curso se hará especial énfasis en las aplicaciones y relevancia de estos conceptos en física, conectando de esta forma los conocimientos adquiridos en esta asignatura con los requerimientos de cálculo necesarios para otras asignaturas del grado.

## 3.REQUISITOS PREVIOS REQUERIDOS PARA CURSAR LA ASIGNATURA

Esta asignatura no tiene requisitos previos. De todas formas, para el estudio con aprovechamiento de esta asignatura resulta más que recomendable tener un buen dominio de álgebra y cálculo con funciones de varias variables. Nuestra recomendación es iniciar el estudio de esta asignatura una vez se hayan superado las de álgebra y análisis matemático de primero y segundo.

## 4.RESULTADOS DE APRENDIZAJE

Tras cursar y superar esta asignatura, el estudiante habrá cumplido con los siguientes objetivos de aprendizaje:

1. Reconocer objetos matemáticos con rango tensorial bien definido, identificando correctamente los comportamientos covariante/contravariante. Realizar operaciones de cálculo básicas con estos objetos.
2. Aplicar correctamente las reglas de transformación para objetos tensoriales bajo cambios de base.
3. Resolver problemas de cálculo con campos tensoriales en coordenadas generalizadas (concepto y aplicaciones de la derivada covariante).
4. Analizar curvas regulares en  $R^3$  por medio de las representaciones habituales (paramétrica/implícita). Calcular los vectores tangente, normal y binormal, emplear el triedro móvil (o de Frenet). Medir longitudes de curvas, emplear el parámetro "longitud de arco".
5. Analizar superficies regulares en  $R^3$ . Aplicación de la primera y segunda forma fundamental para la medida de longitudes, áreas y curvaturas. Calcular la curvatura de superficies incluyendo: curvaturas principales y direcciones principales de curvatura, curvatura media y curvatura de Gauss (clasificación de superficies).
6. Aplicar el concepto de curvas geodésicas (y curvatura geodésica) definidas sobre una superficie para la descripción de superficies por medio de coordenadas geodésicas (geometría intrínseca).



## 5. CONTENIDOS DE LA ASIGNATURA

Primera Parte. Cálculo Tensorial:

1. Espacios vectoriales, norma, producto escalar, distancia. Bases, bases ortonormales. Espacios no euclídeos: base dual y tensor métrico.
2. Cambios de base: concepto de tensor, criterios de tensorialidad. Comportamientos covariante y contravariante. Aplicaciones al caso de escalares, vectores, aplicaciones lineales, generalización a tensores r-covariantes s-contravariantes. Tipos de tensores (simétricos, antisimétricos, isótropos), tensor alternante de Levi-Civita (producto vectorial en  $R^3$ ).
3. Álgebra tensorial. Producto tensorial (producto directo o de Kronecker), producto de contracción. Contracción con el tensor métrico: subida y bajada de índices.
4. Generalización al caso de campos tensoriales. Fibrado tangente, bases, métrica del fibrado tangente. Conexión: Símbolos de Christoffel. Cambios de base en el fibrado tangente. Componentes físicas de tensores (Símbolos de Christoffel físicos).
5. Derivación de campos tensoriales: Concepto de Derivada Covariante. Aplicación de la derivada covariante al cálculo de primeras y segundas derivadas de campos tensoriales.
6. Definición tensorial de los operadores diferenciales habituales (gradiente, divergencia, rotacional, laplaciano). Cálculo en coordenadas generalizadas y en componentes físicas.

Segunda Parte. Geometría Diferencial:

1. Concepto de curva. Representaciones paramétrica e implícita. Curvas regulares de clase  $C^m$ . Parámetro longitud de arco, proyecciones ortogonales.
2. Curvatura y torsión. Vector tangente (línea tangente y plano normal), vector normal principal (plano osculador, circunferencia osculatriz) y vector binormal (plano rectificador). Triedro de móvil (o de Frenet). Indicatriz esférica.
3. Teoría de curvas. Ecuaciones de Frenet. Ecuaciones intrínsecas de una curva. Teorema fundamental de existencia y unicidad de curvas. Curvas involutas y evolutas.
4. Concepto de superficie. Representación paramétrica regular. Cambios de coordenadas (mappings). Superficies simples. Vectores tangentes (líneas tangentes, plano tangente), vector normal (línea normal). Derivadas direccionales del vector normal.
5. Primera y segunda forma fundamental de una superficie (medida de longitudes de arco, áreas y curvatura de superficies). Líneas principales de curvatura, curvaturas principales, fórmula de Rodrigues. Curvatura media, curvatura de Gauss. Clasificación de puntos regulares de superficies, líneas asintóticas.



6. Operador de Gauss-Weingarten, ecuaciones de Gauss-Weingarten. Teorema fundamental de existencia y unicidad de superficies (consecuencias). Aplicaciones del Cálculo Tensorial en el estudio de superficies. Generalización al estudio de variedades n-dimensionales (manifolds).

7. Geometría intrínseca de superficies. Mappings (reparametrizaciones o cambios de variable). Distancia mínima entre dos puntos a lo largo de una superficie. Curvas geodésicas, curvatura geodésica, coordenadas geodésicas. Teorema de Gauss-Bonet.

8. Geometría global.

## 6.EQUIPO DOCENTE

- [MANUEL ARIAS ZUGASTI](#)
- [CRISTINA MARIA SANTA MARTA PASTRANA](#)
- [PEDRO CORDOBA TORRES](#)
- [ALVARO GUILLERMO PEREA COVARRUBIAS](#)

## 7.METODOLOGÍA Y ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE

La preparación de la asignatura tiene una vertiente teórica y otra práctica. En primer lugar es necesario asimilar diversos conceptos matemáticos más o menos abstractos y a continuación ser capaz de aplicar estos conceptos para resolver problemas concretos. Como es habitual en las asignaturas de matemáticas, los conceptos abstractos encierran multitud de conexiones, implicaciones y consecuencias que, aunque están implícitas en la teoría, no salen a la luz de forma explícita hasta que un problema concreto las pone de manifiesto. Por este motivo la realización de problemas es la principal actividad de aprendizaje para esta asignatura.

## 8.EVALUACIÓN

- Se podrá realizar una evaluación continua calificativa de manera voluntaria, que consistirá en unas pruebas objetivas en el curso virtual. La fecha de dichas pruebas así como sus detalles específicos se anunciarán en el mismo curso virtual. La resolución correcta de estas pruebas de evaluación continua podrá incrementar la nota final hasta un máximo de un punto.
- En caso de que el estudiante decida no realizar la evaluación continua su nota final será la que obtenga en la Prueba Presencial, que se realiza en los Centros Asociados y en las fechas fijadas por la UNED. La mayor parte de la puntuación de dicho examen presencial dependerá de la resolución de uno, o varios, problemas concretos, en los que se aplican los conceptos expuestos en el curso. Ambas partes de la asignatura (Cálculo Tensorial y Geometría Diferencial) serán objeto de examen.

## 9.BIBLIOGRAFÍA BÁSICA

ISBN(13): 9780070379855  
Título: DIFFERENTIAL GEOMETRY  
Autor/es: Martin M. Lipschutz ;  
Editorial: Ed.Mcgraw-Hill, Serie Schaum



Buscarlo en Editorial UNED

Buscarlo en librería virtual UNED

Buscarlo en bibliotecas UNED

Buscarlo en la Biblioteca de Educación

#### Comentarios y anexos:

La primera parte del curso: Cálculo Tensorial, podrá estudiarse siguiendo el material disponible en la página web de la asignatura en la plataforma ALF. El enfoque de esta primera parte coincide en gran medida con el libro de David C. Kay mencionado en la Bibliografía Complementaria. Para un estudio a nivel más profundo de esta parte se recomienda el texto clásico de Synge and Schild, y para las aplicaciones en física es especialmente recomendable el libro de Rutherford Aris, ambos en la Bibliografía Complementaria.

La parte de Geometría Diferencial sigue el texto de Martin M. Lipschutz, publicado por McGraw-Hill (serie Schaum). Lamentablemente la edición en español de este texto clásico está agotada, motivo por el cual figura la edición original en inglés en la Bibliografía Básica. De todas formas, el texto de Lipschutz es tan popular y su uso tan extendido que aún hoy pueden encontrarse copias de la edición en español en las bibliotecas de algunos Centros Asociados.

Para un estudio con mayor profundidad de esta parte del curso recomendamos el texto clásico de Manfredo P. Do Carmo, citado en la Bibliografía Complementaria.

## 10. BIBLIOGRAFÍA COMPLEMENTARIA

ISBN(13): 9780486636122

Título: TENSOR CALCULUS

Autor/es: J. L. Synge And A. Schild ;

Editorial: : DOVER PUBLICATIONS

Buscarlo en librería virtual UNED

Buscarlo en bibliotecas UNED

Buscarlo en la Biblioteca de Educación

Buscarlo en Catálogo del Patrimonio Bibliográfico

ISBN(13): 9780486661100

Título: VECTORS, TENSORS, AND THE BASIC EQUATIONS OF FLUID MECHANICS

Autor/es:

Editorial: DOVER PUBLICATIONS

Buscarlo en librería virtual UNED

Buscarlo en bibliotecas UNED

Buscarlo en la Biblioteca de Educación

Buscarlo en Catálogo del Patrimonio Bibliográfico



ISBN(13): 9788420681351  
Título: GEOMETRÍA DIFERENCIAL DE CURVAS Y SUPERFICIES (2)  
Autor/es: Do Carmo, Manfredo P. ;  
Editorial: ALIANZA EDITORIAL, S.A.

Buscarlo en librería virtual UNED

Buscarlo en bibliotecas UNED

Buscarlo en la Biblioteca de Educación

Buscarlo en Catálogo del Patrimonio Bibliográfico

ISBN(13): 9788476150757  
Título: GEOMETRÍA DIFERENCIAL (1)  
Autor/es: - ;  
Editorial: McGraw-Hill / Interamericana de España, S.A.

Buscarlo en librería virtual UNED

Buscarlo en bibliotecas UNED

Buscarlo en la Biblioteca de Educación

Buscarlo en Catálogo del Patrimonio Bibliográfico

ISBN(13): 9788476154533  
Título: CÁLCULO TENSORIAL : TEORÍA Y PROBLEMAS ([trad. de la 1ª ed. en inglés])  
Autor/es: Abellanas Rapún, Lorenzo ;  
Editorial: MACGRAW-HILL

Buscarlo en librería virtual UNED

Buscarlo en bibliotecas UNED

Buscarlo en la Biblioteca de Educación

Buscarlo en Catálogo del Patrimonio Bibliográfico

## 11. RECURSOS DE APOYO

Aparte de las Bibliografías Básica y Complementaria recomendadas, el principal recurso de apoyo al estudio será el Curso Virtual de la asignatura en la plataforma ALF. En él se podrá encontrar todo el material para la planificación (calendario, noticias, ...) y para el estudio de la asignatura no incluido en la bibliografía (apuntes, ejemplos, ejercicios, ...) así como las herramientas de comunicación, en forma de Foros, para que el alumno pueda consultar al Equipo Docente las dudas que se le vayan planteando así como otras cuestiones relacionadas con el funcionamiento de la asignatura.

Estos foros serán la principal herramienta de comunicación entre el Equipo Docente y el estudiante. Por consiguiente, se insta a que el estudiante siga de un modo regular el curso virtual ya sea



mediante visitas periódicas al mismo, ya sea a través de las herramientas de notificaciones automáticas.

El estudiante también tendrá a su disposición el conjunto de facilidades que la Universidad ofrece a sus alumnos (equipos informáticos, bibliotecas, ...), tanto en los Centros Asociados de la Uned como en la Sede Central.

## 12.TUTORIZACIÓN

El Equipo Docente ofrecerá una completa tutorización de la asignatura a través de su Curso Virtual. Este curso virtual será la principal plataforma de comunicación entre el Equipo Docente y el alumno. A través del mismo, el Equipo Docente realizará el seguimiento del aprendizaje de los estudiantes e informará de los cambios, novedades, así como de cualquier otro aspecto sobre la asignatura que el Equipo Docente estime oportuno. Del mismo modo, el estudiante encontrará en el curso las herramientas necesarias para plantear al Equipo Docente cualquier duda relacionada con la asignatura.

El horario de atención al alumno por parte del Equipo Docente de la Sede Central será: lunes (excepto en vacaciones académicas) de 16:00 a 20:00 horas. En caso de que el lunes sea día festivo, la guardia pasará al siguiente día lectivo. Para cualquier tipo de consulta se recomienda utilizar los foros de debate habilitados en el Curso Virtual de la asignatura. Estos foros son revisados continuamente por el Equipo Docente y permiten una comunicación rápida y directa entre profesores, alumnos y tutores.

