ASIGNATURA DE GRADO:

# INTEGRAL DE LEBESGUE

Curso 2014/2015

(Código:6102401-)

## 1.PRESENTACIÓN DE LA ASIGNATURA

Para presentar esta asignatura, el equipo docente ha recopilado toda la información de carácter general, es decir, las principales características y requisitos, en la siguiente ficha:

FICHA DE LA ASIGNATURA

<table>
<tr><td colspan="3">Órgano responsable: Departamento de Matemáticas Fundamentales (UNED)</td></tr>
<tr><td colspan="3">Nombre de la asignatura:Integral de Lebesgue</td></tr>
<tr><td>Curso: Cuarto</td><td>Semestre: 1º</td><td>Créditos ECTS: 5</td></tr>
<tr><td colspan="3">Horas estimadas de trabajo del estudiante: 125<br><br>Horas de trabajo personal (y en grupo) y otras actividades:<br><br>55 horas en créditos de contenido teórico, 55 horas en créditos de contenido práctico, y 15 para trabajo autónomo adicional (ejercicios de autoevaluación, información en Internet, Pruebas Presenciales, etc.)</td></tr>
<tr><td colspan="3">Profesorado (indicando el coordinador)<br><br>Ángel L. Garrido Bullón</td></tr>
<tr><td colspan="3">Objetivo principal:<br><br>Conocer la integral de Lebesgue así como el papel que desempeña en el Análisis Matemático.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Prerrequisitos: Haber cursado las asignaturas de “Funciones de una variable I”, “Funciones de una variable II”, “Funciones de varias variables I” y “Funciones de varias variables II”.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Contenido (breve descripción de la asignatura):<br><br>Construcción de la integral de Lebesgue.<br><br>Teoremas de convergencia para la integral de Lebesgue.<br><br>Semejanzas y diferencias entre la integral de Riemann y la de Lebesgue.<br><br>Bibliografía básica:<br><br>- Valdivia Ureña, Manuel “Análisis Matemático V”. Ed. UNED. Madrid, 2002.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Metodología docente: Enseñanza a distancia, con la metodología de la UNED.<br><br>Enseñanza virtualizada.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Tipo de evaluación (exámenes/trabajo/evaluación continua):<br><br>Pruebas Presenciales en el Centro Asociado correspondiente. Trabajo voluntario para la evaluación</td></tr>
</table>

| |
|---|
| continua. |
| Idioma en que se imparte: Español |

## 2.CONTEXTUALIZACIÓN EN EL PLAN DE ESTUDIOS

"La integral de Lebesgue" es una asignatura que en el plan de estudios de la titulación, Grado en Matemáticas, figura en el primer semestre del cuarto curso. Tiene carácter optativo y se le asignan 5 ECTs.

La integral de una función *f* entre los límites de integración *a* y *b* puede interpretarse como el área bajo la gráfica de *f*. Esto es fácil de entender para funciones que nos son familiares como los polinomios, la exponencial o logarítmica, pero... ¿qué quiere decir para funciones un poco más exóticas o con comportamiento errático? En general, ¿cuál es la clase de funciones para las cuales el concepto de "área bajo la curva" tiene sentido? La respuesta a esta interrogante tiene importancia teórica y práctica fundamental.

Como parte del gran avance de las matemáticas en el siglo XIX, se hicieron varios intentos de poner sobre bases sólidas el cálculo integral. La integral de Riemann propuesta por Bernhard Riemann (1826-1866), sentó la primera base sólida sobre la cual se desarrolló la integral. La definición de Riemann empieza con la construcción de una sucesión de áreas rectangulares fácilmente calculables que convergen a la integral de una función dada. Esta definición es buena en el sentido que provee las repuestas adecuadas y esperadas para muchos problemas ya resueltos, así como importantes y útiles resultados para muchos otros problemas.

Sin embargo, la integración de Riemann no resuelve ciertos casos. La integración de una función no negativa (por considerar el caso más simple) puede considerarse como el área entre la gráfica de una curva y el eje x. La integral de Lebesgue, descubierta por Henri Lebesgue (1875-1941), extiende el concepto de integración a una clase mucho más amplia de funciones, así como extiende los posibles dominios en los cuales estas integrales pueden definirse. Hacía mucho que se sabía que para funciones no negativas con una curva suficientemente suave (como una función continua en intervalos cerrados) el área bajo la curva podía definirse como la integral y calcularse usando técnicas de aproximación de la región mediante rectángulos o polígonos. Pero como se necesitaba considerar funciones más irregulares, se hizo evidente que una aproximación más cuidadosa era necesaria para definir una integral que se ajustara a dichos problemas.

La integración de Riemann tampoco funciona bien al tomar límites de sucesiones de funciones, dificultando su análisis. Esto es de vital importancia, por ejemplo, en el estudio de la serie de Fourier, la transformada de Fourier y otros temas. La integral de Lebesgue permite saber cómo y cuándo es posible tomar límites bajo el signo de la integral.

La definición de Lebesgue también hace posible calcular integrales para una clase más amplia de funciones. Por ejemplo, la función de Dirichlet, que es 0 cuando su argumento es irracional y 1 en otro caso (racional), tiene integral de Lebesgue, pero no de Riemann.

En este contexto, esta asignatura, optativa del cuarto curso del Grado en Matemáticas, pretende conseguir que los alumnos conozcan las propiedades básicas de la integral de Lebesgue y el papel que desempeña en el Análisis Real y en muchas otras ramas de las Matemáticas.

Con este objetivo, los alumnos de esta asignatura trabajarán las siguientes competencias específicas del título:

· RA11. Saber cómo se construye la integral de Lebesgue y las diferencias entre esta integral y la de Riemann.

· RA12.Conocer los teoremas de convergencia para la integral de Lebesgue.

· CED1. Comprensión de los conceptos básicos y familiaridad con los elementos fundamentales para el estudio de las Matemáticas superiores.

· CEA3. Habilidad para crear y desarrollar argumentos lógicos, con clara identificación de las hipótesis y las conclusiones.

· CEA4. Habilidad para detectar inconsistencias de razonamiento ya sea de forma teórica o práctica mediante la búsqueda de contraejemplos.

· CEA7. Habilidad para presentar el razonamiento matemático y sus conclusiones de manera clara y precisa, de forma apropiada a la audiencia a la que se dirige, tanto en la forma oral como escrita.

Con esta asignatura se pretende cubrir también las siguientes competencias genéricas propuestas por la UNED, que son especialmente importantes en su formación universitaria y elemento clave en el EEES:

· CG4 Análisis y Síntesis.

· CG6 Razonamiento crítico.

· CG8 Seguimiento, monitorización y evaluación del trabajo propio y de otros.

· CG10 Comunicación y expresión escrita.

· CG12 Comunicación y expresión en otras lenguas (Inglés).

· CG13 Comunicación y expresión matemática, científica y tecnológica.

## 3.REQUISITOS PREVIOS REQUERIDOS PARA CURSAR LA ASIGNATURA

Para abordar el estudio de esta asignatura en las mejores condiciones posibles, es esencial que el alumno tenga conocimientos básicos en Análisis Matemático y Álgebra Lineal. Éstos quedan suficientemente cubiertos con los contenidos de las siguientes asignaturas:

· *Funciones de una variable (I y II)*

· *Funciones de varias variables (I y II)*

· *Álgebra Lineal (I y II).*

También, para facilitar su incorporación a la asignatura con la mejor preparación posible, son necesarios conocimientos de Inglés para poder manejar la bibliografía en dicho idioma.

## 4.RESULTADOS DE APRENDIZAJE

<u>Conocimientos teóricos</u>:

Conocer y comprender ciertas clases de conjuntos (anillos, álgebras, σ-anillos, σ-álgebras, etc.), y sus propiedades.

Conocer bien las medidas aditiva, completamente aditiva (o σ-aditiva), y exterior.

Conocer las funciones medibles e integrables, y sus propiedades.

Conocer los teoremas de convergencia, en relación con la integración; incluido el teorema de convergencia dominada de Lebesgue.

Conocer la complección de una medida y, en particular, de un producto de medidas.

Entender y saber demostrar los teoremas de Egoroff, de Lusin y de Fubini.

Conocimientos prácticos o destrezas:

Saber dar diferentes ejemplos de clases fundamentales de conjuntos.

Saber aplicar la medida de Lebesgue en R y $R^n$, y sus propiedades.

Saber demostrar los Teoremas de Egoroff y de Lusin.

Manejar con soltura distintos tipos de integrales.

Familiarizarse con los productos de espacios medibles y de espacios medidas.

Saber demostrar el teorema de Fubini y los teoremas de convergencia para la integral de Lebesgue.

Actitudes:

Apreciar el valor formativo y cultural del Análisis Matemático.

Entender cómo se puede éste aplicar en situaciones concretas, que se modelizan a través de esta poderosa herramienta matemática.

## 5.CONTENIDOS DE LA ASIGNATURA

1. Clases de conjuntos

   1.1 Definición y propiedades de los σ-anillos

   1.2 Definición y propiedades de las σ-álgebras

   1.3 Clases monótonas

2. Medida y medida exterior

   2.1 Medidas aditivas sobre un anillo

   2.2 Medidas sobre un anillo

   2.3 Medidas exteriores sobre un σ-anillo hereditario

3. Medida de Lebesgue-Stieltjes en R

3.1 Medida de Lebesgue-Stieltjes en R

3.2 Medida de Lebesgue en R

4. Funciones medibles

4.1 Propiedades de las funciones medibles

4.2 Teorema de Egoroff

4.3 Teorema de Lusin

5. Integración

5.1 Integrales de funciones no negativas

5.2 Aditividad de la integral con respecto al integrando

5.3 Teorema de convergencia

5.4 Funciones integrables e integrales

5.5 Propiedades elementales de la integral

5.6 Teorema de la convergencia dominada de Lebesgue

6. Productos de espacios de medidas

6.1 Productos de espacios medibles

6.2 Productos de espacios medidas

6.3 Medida de Lebesgue en $R^n$

6.4 Productos tensoriales y de medida

6.5 Teorema de Fubini

6.6 Compleción del producto de medidas

## 6.EQUIPO DOCENTE

- ANGEL LAUREANO GARRIDO BULLON

## 7.METODOLOGÍA Y ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE

En la metodología es muy importante tener en cuenta el contexto específico de la UNED, el de la educación a distancia. La toma de contacto entre profesor y alumno queda cristalizada mediante el libro de texto. Son, pues, muy necesarios los materiales didácticos con una buena estructuración y secuenciación de contenidos, donde la alternancia de conceptos y ejemplos es clave para alcanzar los objetivos marcados y desarrollar las competencias descritas.

Ha cobrado gran importancia en los últimos años la articulación de la asignatura por medio de la virtualización en la red. En un espacio cerrado al mundo exterior, los alumnos pueden proyectar sus dudas y sugerencias en los foros de discusión, creados para tal fin, en los que el profesor actúa como moderador esencial. El profesor puede volcar, en tiempo real, y de forma efectiva para alumnos repartidos por toda la geografía, ejercicios, actividades, apuntes, resolución de dudas específicas, etc.

El sistema fundamental de aprendizaje será el de la lectura y estudio de la bibliografía básica. El alumno contará, además, con las tutorías (en ciertos Centros Asociados) y las preguntas al profesor por teléfono, por correo ordinario, o del electrónico, así como del curso virtual.

De manera general, la docencia se impartirá a través de un curso virtual dentro de la plataforma educativa de la UNED, complementado con la asistencia personalizada del equipo docente y la tutorización presencial en los Centros Asociados, así como de la tutorización telemática.

- *Curso virtual*

De manera general, la docencia se impartirá a través de un curso virtual, dentro de la plataforma educativa de la UNED, complementándose con la asistencia personalizada del equipo docente y la autorización presencial y telemática en los Centros Asociados.

Dentro del curso virtual el alumnado dispondrá de:

o Página de bienvenida, donde se indica el concepto general de la asignatura y se presenta el equipo docente.

o Calendario, donde se establece el orden temporal de actividades y sugerencias sobre el reparto temporal de la materia, para que el estudiante los adapte a su disponibilidad y necesidades.

o *Materiales:*

a) *Guía del curso,* donde se establecen los objetivos concretos y los puntos de interés.

b) *Programa,* donde se especifica la división del contenido por capítulos.

c) *Recursos,* donde se proporciona el material necesario para el estudio.

d) *Ejemplos de exámenes,* donde se orienta sobre las pruebas escritas y se muestran ejemplos de exámenes de cursos anteriores.

o *Actividades:*

Pruebas de autoevaluación, evaluación a distancia, trabajos, ….

- *Comunicación:*

a) *Correo,* para comunicaciones individuales.

b) *Foros de Debate,* donde se intercambian conocimientos y se resuelven dudas de tipo académico general.

Fuera del curso virtual, el estudiante también tendrá acceso a realizar consultas al equipo docente a través del correo, del teléfono y presencialmente en los horarios establecidos para estas actividades. También se podrán organizar videoconferencias coordinadas con los distintos Centros Asociados, si las necesidades docentes lo precisaran.

El sistema fundamental de aprendizaje será el de la lectura y el estudio en varias fases de los temas expuestos en el texto base, por parte del alumno.

Lo cual no impide que se puedan ampliar o sustituir alguno de los temas por los de otro texto que se juzgue más adecuado, aunque esto puede introducir cierta dispersión y ciertas dificultades añadidas, como el de las distintas notaciones al uso.

Con el fin de planificar el estudio de esta asignatura, gestionar el tiempo y el esfuerzo, y ayudar con ello a lograr un mejor aprendizaje, el equipo docente ha distribuido el tiempo asignado para la realización de las actividades formativas, que se desarrollarán en esta asignatura, según la tabla siguiente:

| |
|---|
| Actividades formativas<br><br>Con su contenido en ECTS (5) « 125 horas para esta asignatura |
| *Créditos de contenido teórico: lectura/visualización y estudio de los materiales didácticos « 55 h.*<br><br>Lectura de orientaciones « 2 h.<br><br>Estudio de los contenidos teóricos « 48 h.<br><br>Intercambio de información y consulta de dudas<br><br>(equipo docente, tutores y grupos de trabajo) « 5 h.<br><br>*Créditos de contenido práctico: actividades prácticas realizadas individualmente, en* |

*contacto con el Tutor del CC o mediadas por el curso virtual « 55 h.*

Resolución de problemas y ejercicios « 45 h.

Intercambio de información en foros « 8 h.

Manejo de herramientas informáticas y plataforma alf « 2 h.

*Trabajo autónomo adicional« 15h.*

Realización de trabajo de auto evaluación « 4 h.

Búsqueda de información adicional en Biblioteca, Internet, etc. « 4 h.

Realización de prueba de evaluación continua « 4 h.

Realización de pruebas presenciales «3 h.

## 8.EVALUACIÓN

La evaluación se llevará a cabo mediante una prueba presencial máxima de dos horas de duración, y tendrá lugar en un Centro Asociado de la UNED. La prueba consistirá en la resolución de diversos ejercicios representativos del nivel correspondiente al libro de la bibliografía básica y a las Pruebas de Evaluación Continua.

La calificación final del alumno ponderará, conforme a los criterios fijados por el equipo docente, los resultados de la evaluación continua o formativa desarrollada por el alumno y de la Prueba Presencial. De esta forma se podrán evaluar no sólo los conocimientos alcanzados, sino también las habilidades y actitudes desarrolladas en todas las actividades que se integran en la evaluación continua o formativa.

Evaluación final:

La calificación final se obtendrá a partir de los siguientes elementos:

- Examen presencial final escrito de dos horas de duración, en el que se deben contestar cuestiones teóricas y/o resolver problemas concretos aplicando los conocimientos teóricos adquiridos. Este examen es obligatorio y se celebrará en todos los Centros Asociados, de manera coordinada, al final del semestre correspondiente.

La evaluación continua, no obligatoria, se puede desarrollar por el estudiante, a través de algunos de los siguientes cauces:

- Pruebas de evaluación continua (PECs). Con ejercicios de los que consta el programa. Se realizarán dos: una con los temas relativos a la Medida y las Funciones medibles (temas del 1 al 4) y otra de Integración (temas 5 y 6). El calendario de las PECs se comunicará en la segunda parte de la guía y a través del curso virtual. Representarán (entre las dos) un máximo de 2 puntos sobre la calificación final.

- Realización de un trabajo sobre “El papel de la integral de Lebesgue”. Las indicaciones para su realización se comunicará en la segunda parte de la guía y a través del curso virtual. Representará un máximo de 0,5 puntos de la calificación.

Según los criterios anteriores, la nota de la asignatura es la de la Prueba Presencial, X, si X es menor que 4. En caso contrario, será: 0.75 X + 0.1 Y + 0.1 Z + 0.05 T, donde Y, Z son las notas de las pruebas de evaluación continua y T es la nota aportada por el trabajo.

La asignatura se aprueba con 5 puntos. Entre 7 y 8,9 puntos se obtiene notable, a partir de 9 puntos sobresaliente. Las matrículas de honor se asignarán entre aquellos alumnos que tengan 10 puntos en la Prueba Presencial.

## 9.BIBLIOGRAFÍA BÁSICA

ISBN(13): 9788436223323
Título: ANÁLISIS MATEMÁTICO V ([1ª ed., 1ª reimp.])
Autor/es: Valdivia Ureña, Manuel ;
Editorial: Universidad Nacional de Educación a Distancia

Buscarlo en Editorial UNED

Buscarlo en libreria virtual UNED

Buscarlo en bibliotecas UNED

Buscarlo en la Biblioteca de Educación

Comentarios y anexos:

Como libros de estudio y consulta pueden utilizarse varias obras. Entre ellas, el segundo tomo de *"Análisis Matemático V"*, del profesor Manuel Valdivia Ureña, editado por la UNED. El mencionado texto desarrolla todos los contenidos básicos de la asignatura "Integral de Lebesgue". Se ha pretendido que el contenido del mismo sea autosuficiente, al menos, desde el punto de vista de la teoría. La parte de problemas y también algo de la teoría convendría completarla con bibliografía complementaria. En el libro del profesor M. Valdivia, los temas: XX, XXI y del XXIII al XXVIII están dedicados específicamente a los contenidos de esta asignatura.

Entre la abundante *Bibliografía Complementaria* que podríamos recomendar estarían éstos libros:

- Donald L. Cohn, *Measure Theory.* Springer Verlag. Fundamentalmente, se recomienda el uso de esta obra, que eso sí, está en inglés. Pero de la que disponen de ejemplares las biblotecas dde la UNED. Hay edición (la segunda), muy reciente, actualizada y revisada (es de 2013).

- Paul R. Halmos, *Measure Theory.* Van Nostrand Reinholds. Muy bien escrito y razonado, es el clásico sobre la materia.

## 10.BIBLIOGRAFÍA COMPLEMENTARIA

LIBRO ACTUALMENTE NO PUBLICADO
ISBN(13):
Título: INTEGRACIÓN: TEORÍA Y TÉCNICAS
Autor/es: Guzmán, Miguel De ; Rubio, Baldomero ;
Editorial: Alhambra

ISBN(13): 9788436816655
Título: INTEGRACIÓN DE FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES (Pirámide)
Autor/es: Facenda Aguirre, J.A. Y Otro ;
Editorial: PIRÁMIDE

Buscarlo en libreria virtual UNED

Buscarlo en bibliotecas UNED

Buscarlo en la Biblioteca de Educación

Buscarlo en Catálogo del Patrimonio Bibliográfico

Comentarios y anexos:

No es necesario que se adquieran todos los libros que se mencionan en la bibliografía complementaria, sin embargo, puede resultar bastante formativo al menos consultarlos u hojearlos en las bibliotecas, para los interesados en ampliar conocimientos.

## 11.RECURSOS DE APOYO

1. *Curso virtual* donde se encuentran materiales de apoyo al estudio, acceso al foro y correos electrónicos de profesores y alumnos, laboratorios informáticos para el uso de programas de apoyo al estudio.

2. Programa*Maxima,* de cálculo simbólico libre:

http://www.geogebra.org/cms/

## 12.TUTORIZACIÓN

La tutorización presencial y telefónica se llevará a cabo por el responsable de la asignatura, el Pofesor Doctor Don Ángel Garrido:

- Los martes, de 11 a 13 y de 16 a 18 horas, en el despacho 129 de la Facultad de Ciencias. Tel.: 91 398 72 37, e-mail: agarrido@mat.uned.es

El equipo docente de la asignatura estará disponible para atender a cualquier cuestión de los tutores y a cualquier duda de carácter general de la asignatura de los alumnos.

## 13.Recomendaciones

Se recomienda visitar periódicamente la página web de la asignatura (http://www.uned.es/6102210), así como el Curso Virtual de la asignatura.