ASIGNATURA DE GRADO:

GEOMETRÍA DIFERENCIAL DE CURVAS Y SUPERFICIES

Curso 2014/2015

(Código:61023067)

1.PRESENTACIÓN DE LA ASIGNATURA

La geometría es una de las materias centrales de las matemáticas. Además de ser una de las disciplinas más antiguas, es también una de las que ofrece mayor número de aplicaciones.

Esta asignatura es una introducción a la rama de la geometría que se conoce por geometría diferencial. Es la geometría que surge al utilizar los métodos de cálculo diferencial e integral en el estudio de las figuras geométricas. Se estudian las curvas y superficies en el espacio euclidiano tridimensional que son los objetos más sencillos dentro de este tipo de geometría.

2.CONTEXTUALIZACIÓN EN EL PLAN DE ESTUDIOS

La geometría diferencial de curvas y superficies es la materia donde se introducen por primera vez las herramientas básicas de geometría diferencial. La geometría diferencial es una de las ramas más activas en investigación y tiene aplicaciones fuera y dentro de las matemáticas. Por ejemplo, fuera de las matemáticas, en física relativista o en diseño asistido por ordenador y dentro de las matemáticas podemos señalar que la conjetura de Poincaré, uno de los problemas más importantes dentro de la Topología ha sido demostrado usando técnicas de Geometría Diferencial.

En la asignatura Geometría Diferencial, optativa de cuarto curso, se profundizará en el estudio de esta rama de la Geometría.

En cuanto a las competencias generales que se comienzan a cubrir con esta asignatura están:

1. Conocimientos generales en una de las principales áreas de las Matemáticas.

2. Saber aplicar los métodos y técnicas matemáticas a diversos problemas de la realidad (en esta asignatura se están modelando objetos reales mediante conceptos matemáticos, las curvas y superficies son idealizaciones matemáticas de trayectorias y superficies de cuerpos espaciales).

3. Capacidad de enfrentarse con literatura científica en varios niveles (en este caso textos científicos).

4. Capacidad de comunicación de los resultados en entornos especializados (en la evaluación se valorará también la buena redacción de las soluciones a los ejercicios propuestos).

5. Iniciación a la adquisición de competencia científica suficiente para la incorporación a estudios más avanzados.

Ámbito: GUI - La autenticidad, validez e integridad de este documento puede ser verificada mediante el "Código Seguro de Verificación (CSV)" en la dirección https://sede.uned.es/valida/
4806BDF1901828305748C2CD4CC50231

3.REQUISITOS PREVIOS REQUERIDOS PARA CURSAR LA ASIGNATURA

Esta asignatura es integradora y es capaz de reunir y aplicar métodos de campos distintos de las matemáticas que el alumno debe conocer, al menos básicamente.

Es necesario que el alumno tenga conocimientos de álgebra lineal, geometría (al menos afín y euclidiana), cálculo diferencial e integral en una y varias variables (incluyendo los teoremas de la función inversa e implícita) y es conveniente tener algunos conocimientos de ecuaciones diferenciales (estos últimos pueden ser adquiridos en la asignatura: "Introducción a las ecuaciones diferenciales"). También es importante poseer nociones básicas de topología.

4.RESULTADOS DE APRENDIZAJE

Conocimientos:

1. Saber que es una curva o una superficie diferenciable.
2. Conocer los invariantes locales del estudio de curvas y superficies: curvatura, torsión, primera y segunda formas fundamentales, curvatura media y de Gauss.
3. Conocer los teoremas fundamentales y más importantes dentro de la teoría elemental de geometría diferencial de curvas y superficies.
4. Conocer algunos teoremas globales de curvas y superficies.
5. Conocer de modo básico la geometría intrínseca en una superficie, así como los objetos básicos dentro de esa geometría: métrica y geodésicas. Saber que la geometría intrínseca en una superficie puede ser muy diferente a la geometría euclidiana.
6. Conocer el teorema egregio de Gauss y el teorema de Gauss para triángulos geodésicos y la relación entre elementos de geometría intrínseca y curvatura.
7. Conocer el teorema de Gauss-Bonnet y la relación entre la curvatura y la topología.

Destrezas y habilidades:

1. Dotar a un objeto de una estructura de curva o superficie diferenciable y así poder aplicar los métodos del análisis para la resolución de problemas referidos a tal objeto.
2. Definir curvas y superficies por parametrizaciones, atlas y por ecuaciones implícitas.
3. Cálculo de rectas y planos tangentes y normales.
4. Cálculo de los invariantes de curvatura para curvas y superficies.
5. Distinguir gráficamente el signo de la curvatura para una curva plana y el signo de la torsión en una curva espacial.
6. Distinguir los puntos de una superficie que son elípticos, parabólicos e hiperbólicos.
7. Distinguir propiedades e invariantes globales y locales.
8. Medir ángulos y distancias en geometría intrínseca de una superficie.
9. Cálculo de geodésicas en ejemplos sencillos.
10. Distinguir gráficamente lo que es una geodésica en una superficie.
11. Relacionar la topología con la curvatura total de una superficie.

Ámbito: GUI - La autenticidad, validez e integridad de este documento puede ser verificada mediante el "Código Seguro de Verificación (CSV)" en la dirección https://sede.uned.es/valida/
4806BDF1901828305748C2CD4CC50231

Competencias:

1. Abre la posibilidad del estudio de la geometría diferencial más avanzada.
2. Aplicar a problemas reales (ingeniería, diseño, visión por ordenador, teoría de control) herramientas avanzadas de análisis matemático dotando de estructura diferencial (de curva o superficie) a los objetos dados.
3. Abre la posibilidad de entender la física moderna: cosmología, relatividad, mecánica.

5.CONTENIDOS DE LA ASIGNATURA

1. Curvas en el plano: En primer lugar se estudia que es una curva plana. A continuación se introduce la recta tangente como aquella recta que se aproxima más a la curva. Las parametrizaciones dan la herramienta básica para enfrentarse con las curvas y la curvatura es el invariante de geometría diferencial de curvas planas más importante. El teorema fundamental de curvas planas, precisamente dice que la curvatura es un invariante para el problema de clasificación de curvas en el espacio euclídeo y no solo eso, sino que es un invariante completo, es decir, que resuelve completamente el problema. Finalmente se explica un resultado global de curvas planas para comenzar a percibir la diferencia entre resultados globales y locales.

2. Curvas en el espacio: Se lleva a cabo un desarrollo paralelo al de curvas en el plano pero introduciendo ahora los conceptos e invariantes especiales para esta situación: plano osculador, vector binormal, torsión. Se establece el teorema fundamental en este caso y se enuncian teoremas globales.

3. Superficies. El concepto de superficie tiene dificultades técnicas especiales que no aparecen en el caso de las curvas y que se solucionan introduciendo cartas y atlas. Se estudia como definir superficies de modo más directo como conjuntos de soluciones de una ecuación y se ve la equivalencia entre ambas definiciones. Se introduce el plano tangente de modo similar a lo que ocurría con las curvas. Utilizando la definición de superficie en el espacio se lleva a cabo una introducción a la noción de superficie abstracta (sin estar contenida en un espacio) y de variedad de dimensión cualquiera. Se define el concepto de orientabilidad y se observa como es algo que no siempre se puede conseguir globalmente. Por último se estudian las aplicaciones diferenciales entre superficies como los morfismos naturales entre estos objetos.

4. Geometría intrínseca. Se define la primera forma fundamental y se da el método de medida de longitudes, ángulos y áreas dentro de una superficie: es decir se muestra como hacer geometría plana dentro de una superficie. Las geodésicas son las curvas que desempeñan el papel de las rectas dentro de la geometría intrínseca. Las coordenadas geodésicas constituyen unas cartas bien “adaptadas” a la geometría intrínseca y son de gran utilidad en el último capítulo. Por último las isometrías son las transformaciones de las superficies que conservan la geometría intrínseca.

Ámbito: GUI - La autenticidad, validez e integridad de este documento puede ser verificada mediante el "Código Seguro de Verificación (CSV)" en la dirección https://sede.uned.es/valida/
4806BDF1901828305748C2CD4CC50231

5. En este capítulo se introducen los invariantes locales de la geometría diferencial de superficies. En primer lugar se realiza un estudio de la superficie llevando a cabo cortes normales que pasen por un punto, es como si hiciéramos una tomografía, y así se definen las curvaturas normales (curvaturas de las curvas obtenidas al hacer las secciones normales) y la segunda forma fundamental. Por otro lado se introduce el operador de Weingarten como un endomorfismo del plano tangente en un punto que surge al estudiar la variación del vector normal. Así las curvaturas principales son las curvaturas normales extremales o por otro lado los autovalores del endomorfismo de Weingarten (teorema de Olinde Rodrigues). Se introducen la curvatura media y la curvatura de Gauss como la media de las curvaturas normales o el producto de dichas curvaturas respectivamente. Se interpreta geométricamente el signo de la curvatura de Gauss y en el caso de ser negativa (puntos hiperbólicos) se introducen las direcciones y líneas asintóticas. Finalmente se establecen y estudian algunos teoremas globales para superficies.

6. Se estudian las condiciones para que dos funciones puedan ser formas fundamentales de superficies (condiciones de compatibilidad). A partir de estas condiciones se establece el teorema fundamental de superficies. Como subproducto se tiene el teorema egregio de Gauss: la curvatura es un invariante de la geometría intrínseca de la superficie. Para estudiar mejor la relación entre curvatura y geometría intrínseca se establece el teorema de Gauss para triángulos geodésicos que relaciona la medida de los ángulos de un triángulo geodésico con la curvatura de la superficie sobre el triángulo. Por último se estudia el teorema de Gauss-Bonnet global que relaciona la topología de una superficie con la integral de la curvatura de Gauss sobre toda la superficie o curvatura total. De este modo se pone punto final con una profunda relación entre geometría y topología.

6.EQUIPO DOCENTE

- ANTONIO FELIX COSTA GONZALEZ
- ANA MARIA PORTO FERREIRA DA SILVA

7.METODOLOGÍA Y ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE

El sistema fundamental de aprendizaje es la lectura y estudio del texto base por parte del alumno. Aunque cada alumno puede tener su método propio de estudio se recomienda que se lleve a cabo en cuatro fases:

- Primera fase: En una primera lectura se debe leer despacio parándose en la comprensión de las definiciones y desarrollando personalmente los ejemplos. Una vez bien comprendidos los enunciados se llevará a cabo una lectura compresiva de las demostraciones que se especifican en la guía del curso en la virtualización.

- Segunda fase: una segunda lectura, donde se afianzarán los puntos más importantes no siendo necesario el estudio de muchos puntos cuya comprensión completa se ha llevado a cabo en la primera lectura.

- Tercera fase: realización de ejercicios recomendados. Es conveniente enfrentarse al mayor número posible de ejercicios de acuerdo con el tiempo disponible y la capacidad. Se proponen varios ejercicios recomendados por capítulo. Su realización es considerada como una verdadera prueba de evaluación a distancia. El alumno debe ser capaz de comprender estos ejercicios por su cuenta.

- Cuarta fase: Consulta de exámenes de años anteriores y autoevaluación usando dichos exámenes.

Ámbito: GUI - La autenticidad, validez e integridad de este documento puede ser verificada mediante el "Código Seguro de Verificación (CSV)" en la dirección https://sede.uned.es/valida/
4806BDF1901828305748C2CD4CC50231

8.EVALUACIÓN

Se llevará a cabo mediante una prueba presencial que constará de dos ejercicios y una pregunta teórica.

Uno de los ejercicios o preguntas será sobre curvas y los otros dos sobre superficies.

La prueba durará dos horas.

También se realizará una prueba de evaluación continua que se anunciará en la virtualización de la asignatura.

La prueba de evaluación continua tiene un porcentaje máximo del 10% en la calificación final de la asignatura.

9.BIBLIOGRAFÍA BÁSICA

ISBN(13): 9788496094482
Título: NOTAS DE GEOMETRÍA DIFERENCIAL DE CURVAS Y SUPERFICIES: TEORÍA Y EJERCICIOS (3ª)
Autor/es: Gamboa Mutuberría, José Manuel ; Porto Ferreira Da Silva, Ana Mª ; Costa González, Antonio Félix ;
Editorial: SANZ Y TORRES

Buscarlo en Editorial UNED

Buscarlo en libreria virtual UNED

Buscarlo en bibliotecas UNED

Buscarlo en la Biblioteca de Educación

10.BIBLIOGRAFÍA COMPLEMENTARIA

Comentarios y anexos:

- Amores Lázaro, A.M., Curso básico de curvas y superficies, Sanz y Torres, Madrid 2001.
- Cordero, L.A., Fernández, M., Gray, A., Geometría diferencial de curvas y superficies con Mathematica, Addison-Wesley Iberoamericana, S. A., Wilmintong, Delaware, E. U. A., 1995. En este libro son de destacar las figuras obtenidas con Mathematica y el ofrecer el ordenador como medio constante de experimentación.
- do Carmo, M. P., Geometría diferencial de curvas y superficies, Alianza Universidad Textos, Madrid 1990. Es uno de los grandes clásicos en la materia pero como todos los demás, mucho mas duro que el texto base.
- Hsiung, C-C., A first course in Differential Geometry, International Press, Cambridge MA, 1997.
- Millman, R. S. and Parker, G. D., Elements of Differential Geometry, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ., 1977.
- Montiel S. y Ros A., Curvas y superficies, Proyecto Sur de Ediciones, S. L., Granada 1997. Es un estupendo texto que pone énfasis sobre todo en teoremas de carácter global y de geometría extrínseca.
- O'Neill, B., Elementos de geometría diferencial, Noriega-Limusa, Mexico 1990. Se trata de un libro excelente y otro de los clásicos como el do Carmo o el Struik.
- Pogorelov, A. V., Geometría Diferencial, Mir, Moscú 1994.
- Struik, D.J., Lectures on classical differential geometry, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1961. Es un libro excelente en todos los sentidos.
- Thorpe, J.A., Elementary topics in differential geometry, U.T.M., Springer-Verlag, New York 1979.
- Ventura Araújo, P., Geometría Diferencial, IMPA, Rio de Janeiro 1998.

Ámbito: GUI - La autenticidad, validez e integridad de este documento puede ser verificada mediante el "Código Seguro de Verificación (CSV)" en la dirección https://sede.uned.es/valida/
4806BDF1901828305748C2CD4CC50231

- *Libros de ejercicios*:

- Fedenko, A. S., Problemas de geometría diferencial, Editorial Mir, Moscú 1991.
- Lipschutz, M., Geometría Diferencial, Serie Schaum, MacGraw-Hill, México 1971. Tiene además una parte teórica muy aceptable.
- López de la Rica, A. y de la Villa Cuenca, A., Geometría Diferencial, Universidad Pontificia de Comillas, Madrid, 1997.

11.RECURSOS DE APOYO

12.TUTORIZACIÓN

Se llevará principalmente por la virtualización de la asignatura.

Extraordinariamente también se puede utilizar el teléfono: 91 3987224 o el correo electrónico:

acosta@mat.uned.es

El horario de atención es: Miércoles de 12:30 a 13:30 y de 15:00 a 18:00.

13.Recomendaciones

Se recomienda visitar periódicamente el Curso Virtual de la asignatura.

Ámbito: GUI - La autenticidad, validez e integridad de este documento puede ser verificada mediante el "Código Seguro de Verificación (CSV)" en la dirección https://sede.uned.es/valida/
4806BDF19018283057 48C2CD4CC50231