

INTEGRAL DE LEBESGUE

Curso 2015/2016

(Código:6102401-)

1. PRESENTACIÓN DE LA ASIGNATURA

Para presentar esta asignatura, el equipo docente ha recopilado toda la información de carácter general, es decir, las principales características y requisitos, en la siguiente ficha:

FICHA DE LA ASIGNATURA

Órgano responsable: Departamento de Matemáticas Fundamentales (UNED)		
Nombre de la asignatura: <i>Integral de Lebesgue</i>		
Curso: Cuarto	Semestre: 1º	Créditos ECTS: 5
Horas estimadas de trabajo del estudiante: 125		
Horas de trabajo personal (y en grupo) y otras actividades:		
55 horas en créditos de contenido teórico, 55 horas en créditos de contenido práctico, y 15 para trabajo autónomo adicional (ejercicios de autoevaluación, información en Internet, Pruebas Presenciales, etc.)		
Profesorado		
Ángel Garrido Bullón		
Objetivo principal:		
Conocer a fondo lo que es la Integral de Lebesgue, así como el papel que desempeña dentro del Análisis Matemático. Y conocer también las líneas actuales de avance de la investigación en este campo, como son las Medidas Difusas.		
Prerrequisitos: Haber cursado las asignaturas de "Funciones de una variable I", "Funciones de una variable II", "Funciones de varias variables I" y "Funciones de varias variables II".		
Contenido (breve descripción de la asignatura):		
Construcción de la integral de Lebesgue.		
Principales Teoremas y Corolarios de esta teoría.		
Teoremas de convergencia para la integral de Lebesgue.		
Semejanzas y diferencias entre la integral de Riemann y la de Lebesgue.		
Funciones, integrales y medidas difusas.		
Bibliografía básica:		
- Valdivia, Manuel, "Análisis Matemático V". Segundo volumen. UNED, Madrid. Existen varias ediciones; preferible la última.		



Puede complementarse muy bien con la obra:

- Cohn, Donald L., *"Measure Theory"*. Segunda edición. Ed. Birkhäuser-Springer Verlag, Basel. Existe una edición en soporte papel, y ha aparecido otra más, ahora como e-book.

Otra Bibliografía Complementaria (esencial para los trabajos):

- Garrido, Ángel, *"Lógica Aplicada. Vaguedad e Incertidumbre"*. Editorial Dykinson. Madrid, 2014. [Para las nuevas investigaciones sobre Teorías de las Medidas, como las Difusas]

- Cohn, Donald L., *"Measure Theory"*. Segunda edición. Ed. Birkhäuser-Springer Verlag, Basel. Antes mencionada. Está en inglés. Para quien tenga problemas con el idioma, puede dirigirse al libro del profesor Valdivia.

Metodología docente: Enseñanza a distancia, con la metodología de la UNED.

Enseñanza virtualizada.

Tipo de evaluación (exámenes/trabajo/evaluación continua):

Prueba Presencial en el Centro Asociado correspondiente. Dos trabajos para completar la formación del alumno. Y dos PECs, para seguir con los métodos de evaluación continua.

Idioma en que se imparte: Español / Inglés

2.CONTEXTUALIZACIÓN EN EL PLAN DE ESTUDIOS

La de "Integral de Lebesgue" es una asignatura que en el plan de estudios de la titulación, Grado en Matemáticas, figura en el primer semestre del cuarto curso. Tiene carácter optativo y se le asignan 5 ECTS.

La integral de una función f entre los límites de integración a y b puede interpretarse como el área bajo la gráfica de f . Esto es fácil de entender para funciones que nos son familiares como los polinomios, la exponencial o logarítmica, pero... ¿qué quiere decir para funciones un poco más exóticas o con comportamiento errático? En general, ¿cuál es la clase de funciones para las cuales el concepto de "área bajo la curva" tiene sentido? La respuesta a esta interrogante tiene importancia teórica y práctica fundamental.

Como parte del gran avance de las matemáticas en el siglo XIX, se hicieron varios intentos de poner sobre bases sólidas el cálculo integral. La integral de Riemann propuesta por Bernhard Riemann (1826-1866), sentó la primera base sólida sobre la cual se desarrolló la integral. La definición de Riemann empieza con la construcción de una sucesión de áreas rectangulares fácilmente calculables que convergen a la integral de una función dada. Esta definición es buena en el sentido que provee las repuestas adecuadas y esperadas para muchos problemas ya resueltos, así como importantes y útiles resultados para muchos otros problemas.

Sin embargo, la integración de Riemann no resuelve ciertos casos. La integración de una función no negativa (por considerar el caso más simple) puede considerarse como el área entre la gráfica de una curva y el eje x . La Integral de Lebesgue, propuesta por Henri Lebesgue (1875-1941), extiende el concepto de integración a una clase mucho más amplia de funciones, así como extiende los posibles dominios en los cuales estas integrales pueden definirse. Hacía mucho que se sabía que para funciones no negativas con una curva suficientemente suave (como una función continua en intervalos cerrados) el área bajo la curva podía definirse como la integral y calcularse usando técnicas de aproximación de la región mediante rectángulos o polígonos. Pero como se necesitaba considerar funciones más irregulares, se hizo evidente que una aproximación más cuidadosa era necesaria para definir una integral que se ajustara a dichos problemas.

La integración de Riemann tampoco funcionaba bien al tomar límites de sucesiones de funciones, dificultando su análisis. Esto es algo de vital importancia, por ejemplo, en el estudio de las series de Fourier, la transformada de Fourier y otros temas. La integral de Lebesgue permite saber cómo y cuándo es posible tomar límites bajo el signo de la integral.



La definición de Lebesgue también hace posible calcular integrales para una clase más amplia de funciones. Por ejemplo, la función de Dirichlet, que es 0 cuando su argumento es irracional y 1 en otro caso (racional), tiene integral de Lebesgue, pero no de Riemann.

En este contexto, esta asignatura, optativa del cuarto curso del Grado en Matemáticas, pretende conseguir que los alumnos conozcan las propiedades básicas de la integral de Lebesgue y el papel que desempeña en el Análisis Real y en muchas otras ramas de las Matemáticas.

Con este objetivo, los alumnos de esta asignatura trabajarán las siguientes competencias específicas del título:

- RA11. Saber cómo se construye la integral de Lebesgue y las diferencias entre esta integral y la de Riemann.
- RA12. Conocer los teoremas de convergencia para la integral de Lebesgue.
- CED1. Comprensión de los conceptos básicos y familiaridad con los elementos fundamentales para el estudio de las Matemáticas superiores.
- CEA3. Habilidad para crear y desarrollar argumentos lógicamente bien estructurados y coherentes, con una clara identificación de las hipótesis y de las conclusiones.
- CEA4. Habilidad para detectar inconsistencias en los razonamientos, ya sea de forma teórica o práctica mediante la búsqueda de contraejemplos.
- CEA7. Habilidad para presentar el razonamiento matemático y sus conclusiones de manera clara y precisa, de forma apropiada al público al que se dirige, tanto en la forma oral como escrita.

Con esta asignatura se pretende cubrir también las siguientes competencias genéricas propuestas por la UNED, que son especialmente importantes en su formación universitaria y elemento clave en el EEES:

- CG4 Análisis y Síntesis. Lógica Aplicada.
- CG6 Razonamiento crítico.
- CG8 Seguimiento, monitorización y evaluación del trabajo propio y de otros.
- CG10 Comunicación y expresión escrita.
- CG12 Comunicación y expresión en otras lenguas (especialmente en inglés).
- CG13 Comunicación y expresión matemática, científica y tecnológica.

3. REQUISITOS PREVIOS REQUERIDOS PARA CURSAR LA ASIGNATURA

Para abordar el estudio de esta asignatura en las mejores condiciones posibles, es esencial que el alumno tenga conocimientos básicos en Análisis Matemático y Álgebra. Éstos quedan suficientemente cubiertos con los contenidos de las siguientes asignaturas:

- *Funciones de una variable (I y II)*
- *Funciones de varias variables (I y II)*
- *Álgebra Lineal (I y II).*

Para facilitar su incorporación a la asignatura con la mejor preparación posible, será necesario un buen conocimiento del Inglés, para así poder manejar la bibliografía científica, dado que buena parte de ella se encuentra en ese idioma.



4.RESULTADOS DE APRENDIZAJE

Conocimientos teóricos:

Conocer y comprender ciertas clases de conjuntos (anillos, álgebras, σ -anillos, σ -álgebras, etc.), y sus propiedades.

Conocer bien las medidas aditivas, completamente aditivas (o σ -aditivas), y exteriores.

Conocer las funciones medibles e integrables, así como sus propiedades.

Conocer bien los teoremas de convergencia, en relación con la integración; incluido el teorema de convergencia dominada de Lebesgue.

Conocer la complección de una medida y, en particular, de un producto de medidas.

Entender y saber aplicar y demostrar los teoremas fundamentales, como son el de Egoroff, el de Lusin, el de de Fubini, o el de Radon-Nikodym, entre otros.

Conocimientos prácticos o destrezas:

Saber dar diferentes ejemplos de las clases fundamentales que existen de conjuntos.

Saber aplicar la medida de Lebesgue en la recta y en el espacio real, así como sus propiedades.

Saber interpretar adecuadamente los Teoremas de Egoroff y de Lusin.

Manejar con soltura distintos tipos de integrales.

Familiarizarse con los productos de espacios medibles y de espacios de medidas.

Saber demostrar el teorema de Fubini y los teoremas de convergencia para la integral de Lebesgue.

Actitudes:

Apreciar el valor formativo y cultural del Análisis Matemático.

Entender cómo se puede éste aplicar en situaciones concretas, que se modelizan a través de esta poderosa herramienta matemática.

5.CONTENIDOS DE LA ASIGNATURA

1. Medidas.

- Álgebras and sigma-álgebras.

- Medidas.

- Medidas Exteriores.

- Medida de Lebesgue.



- Completitud and Regularidad.

- Medidas Difusas.

2. Funciones e Integrales.

- Funciones medibles.

- Propiedades que se verifican en casi todo punto.

- La Integral.

- Teoremas del Límite.

- Integral de Riemann.

- Integral de Lebesgue.

- Funciones medibles e integrales difusas.

3. Convergencia.

- Modos de Convergencia.

- Espacios Normados.

- Definición de L^p y de L^p . Sus Propiedades.

- Espacios duales.

4. Medidas signadas y complejas.

- Medidas con signo y medidas complejas.

- Continuidad absoluta.

- Singularidad.

- Funciones of variación acotada.

- Los duales de los espacios L^p .

5. Medidas Producto.

- Construcciones.

- Teorema de Fubini.

- Aplicaciones.



6. Diferenciación.

- Cambio de variable en $\mathbb{R}^d$.
- Diferenciación de medidas.
- Diferenciación de funciones.

7. Medidas sobre Espacios Localmente Compactos.

- Espacios localmente compactos.
- El Teorema de Representación de Riesz.
- Medidas signadas y complejas. Dualidad.
- Propiedades adicionales de las medidas regulares.
- Productos de espacios localmente compactos.

6.EQUIPO DOCENTE

- [ANGEL LAUREANO GARRIDO BULLON](#)

7.METODOLOGÍA Y ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE

En la metodología es muy importante tener en cuenta el contexto específico de la UNED, que es el de la educación a distancia. La toma de contacto entre profesor y alumno queda establecida en buena medida a través del libro de texto. Son, pues, muy necesarios los materiales didácticos con una buena estructuración y secuenciación de contenidos, donde la alternancia de conceptos y ejemplos es clave para alcanzar los objetivos marcados y desarrollar las competencias descritas.

Ha cobrado gran importancia en los últimos años la articulación de la asignatura por medio de la virtualización en la red. En un espacio cerrado al mundo exterior, los alumnos pueden proyectar sus dudas y sugerencias en los foros de discusión, creados para tal fin, en los que el profesor actúa como moderador esencial. El profesor puede volcar, en tiempo real, y de forma efectiva para alumnos repartidos por toda la geografía, ejercicios, actividades, apuntes, resolución de dudas específicas, etc.

El sistema fundamental de aprendizaje será el de la lectura y estudio de la bibliografía básica. El alumno contará, además, con las tutorías (en los Centros Asociados que dispongan de ellas) y las preguntas al profesor por teléfono, por correo ordinario, o del electrónico, así como del curso virtual.

De manera general, la docencia se impartirá a través de un curso virtual dentro de la plataforma educativa de la UNED, complementado con la asistencia personalizada del equipo docente y la tutorización presencial en los Centros Asociados, así como de la tutorización telemática.

- *Curso virtual*

De manera general, la docencia se impartirá dentro de la plataforma educativa de la UNED, complementándose con la



asistencia personalizada del equipo docente y la autorización presencial y telemática en los Centros Asociados.

Dentro del curso virtual el alumnado dispondrá de:

- o Página de bienvenida, donde se indica el concepto general de la asignatura y se presenta el equipo docente.
- o Calendario, donde se establece el orden temporal de actividades y sugerencias sobre el reparto temporal de la materia, para que el estudiante los adapte a su disponibilidad y necesidades.
- o *Materiales:*
 - a) Libros especialmente diseñados para esta enseñanza y para la preparación de trabajos que a los alumnos les inicien en la investigación matemática avanzada.
 - b) *Guías del curso*, donde se establecen los objetivos concretos y los puntos de interés.
 - c) *Programa*, donde se especifica la división del contenido.
 - c) *Recursos*, donde se proporciona el material necesario para el estudio.
 - d) *Ejemplos de exámenes*, donde se orienta sobre las pruebas escritas y se muestran algunos ejemplos de los exámenes de cursos anteriores.
- o *Actividades:*
 - Pruebas de evaluación a distancia, elaboración de trabajos,
- o *Comunicación:*
 - a) *Correo*, para preguntas individuales.
 - b) *Foros de Debate*, donde se intercambian los conocimientos y se resuelven las dudas de tipo general.

Fuera del curso virtual, el estudiante también tendrá acceso a realizar consultas al equipo docente a través del correo, del teléfono y presencialmente, en los horarios de los días lectivos señalados en la Guía, y que han sido establecidos para estas actividades. También se podrán organizar videoconferencias coordinadas con los distintos Centros Asociados, si las necesidades docentes lo precisaran.

El sistema fundamental de aprendizaje será el de la lectura detenida y estudio profundo, en varias fases progresivas, de los temas expuestos en el texto base, por el alumno.

Lo cual no impide que se puedan ampliar o sustituir alguno de los temas por los de otro texto que se juzgue más adecuado, aunque esto puede introducir cierta dispersión y ciertas dificultades añadidas, como el de las distintas notaciones al uso. El texto más actualizado (el de D. L. Cohn) está en inglés, pero para quien prefiera utilizar uno en castellano, tiene el del profesor Valdivia, bien entendido que las preguntas que se hagan en las PECs y los exámenes se ajustarán al primero de ellos.

Con el fin de planificar el estudio de esta asignatura, gestionar el tiempo y el esfuerzo, y ayudar con ello a lograr un mejor aprendizaje, el equipo docente ha distribuido el tiempo asignado para la realización de las actividades formativas, según la tabla siguiente:

Actividades formativas
Con su contenido en ECTS (5) « 125 horas para esta asignatura
<i>Créditos de contenido teórico: lectura/visualización y estudio de los materiales</i>



didácticos « 55 h.

Lectura de orientaciones « 1 h.

Estudio de los contenidos teóricos « 50 h.

Intercambio de información y consulta de dudas

(equipo docente, tutores y grupos de trabajo) « 4 h.

Créditos de contenido práctico: actividades prácticas realizadas individualmente, en contacto con el Tutor del CC o mediadas por el curso virtual « 55 h.

Resolución de problemas y ejercicios « 48 h.

Intercambio de información en foros « 3 h.

Manejo de herramientas informáticas y plataforma alf « 4 h.

Trabajo autónomo adicional« 15h.

Realización de dos trabajos complementarios « 7 h.

Realización de dos pruebas de evaluación continua « 6 h.

Realización de pruebas presenciales « 2 h.

8.EVALUACIÓN

La evaluación se llevará a cabo mediante una prueba presencial máxima de dos horas de duración, y tendrá lugar en un Centro Asociado de la UNED. La prueba consistirá en la resolución de tres ejercicios representativos del nivel correspondiente al libro de la bibliografía básica y a las Pruebas de Evaluación Continua.

La calificación final del alumno ponderará, conforme a los criterios fijados por el equipo docente, los resultados de la evaluación continua o formativa desarrollada por el alumno y de la Prueba Presencial. De esta forma se podrán evaluar no sólo los conocimientos alcanzados, sino también las habilidades y actitudes desarrolladas en todas las actividades que se integran en la evaluación continua o formativa.

Evaluación final:

La calificación final se obtendrá a partir de los siguientes elementos:

- Examen presencial final escrito de dos horas de duración, en el que se deben contestar a tres cuestiones teóricas y/o resolver problemas concretos aplicando los conocimientos teóricos adquiridos. Este examen es obligatorio y se celebrará en todos los Centros Asociados, de manera coordinada, al final del semestre correspondiente.

La evaluación continua, no obligatoria, se puede desarrollar por el estudiante, a través de algunos de los siguientes cauces:

- Pruebas de evaluación continua (PECs). Con ejercicios de los que consta el programa. Se realizarán dos: una con los temas relativos a la Medida y las Funciones Medibles (temas del 1 al 4) y otra de Integración (temas 5 y 6). El calendario de las PECs se comunicará en la segunda parte de la guía y a través del curso virtual. Representarán (entre las dos) un máximo de 1'5 puntos sobre la calificación final.
- Realización de dos trabajos a elegir entre "Lógicas de nuestro tiempo", "Lógica Aplicada. Vaguedad e



Incertidumbre", o "El papel de la Integral de Lebesgue". Las indicaciones para su realización se comunicará en la segunda parte de la guía y a través del curso virtual. Representarán entre ambos un máximo de 1,5 puntos de la calificación.

Según los criterios anteriores, la nota de la asignatura es la de la Prueba Presencial, X, si X es menor que 4. En caso contrario, será: $0.7 X + 0.075 Y + 0.075 Z + 0.075 T1 + 0.075 T2$, donde Y, Z son las notas de las dos pruebas de evaluación continua y las T1 y T2 son la notas aportadas por los trabajos.

La asignatura se aprueba a partir de 5 puntos. Entre 7 y 8,9 puntos se obtiene un notable, y a partir de 9 puntos sobresaliente. Las matrículas de honor se asignarán entre aquellos alumnos que tengan máxima calificación en la Prueba Presencial y hayan realizado las PECs y los trabajos con el mayor aprovechamiento.

9.BIBLIOGRAFÍA BÁSICA

ISBN(13): 9788436223323

Título: ANÁLISIS MATEMÁTICO V ([1ª ed., 1ª reimp.]

Autor/es: Valdivia Ureña, Manuel ;

Editorial: Universidad Nacional de Educación a Distancia

Buscarlo en Editorial UNED

Buscarlo en librería virtual UNED

Buscarlo en bibliotecas UNED

Buscarlo en la Biblioteca de Educación

Comentarios y anexos:

Como libros de estudio y consulta pueden utilizarse varias obras. Entre ellas, venía siendo recomendado el segundo tomo de "Análisis Matemático V", del profesor Manuel Valdivia Ureña, editado por la UNED. El mencionado texto desarrollaba contenidos básicos de la asignatura "Integral de Lebesgue". Se ha pretendido que el contenido del mismo sea autosuficiente, al menos, desde el punto de vista de la teoría. Tiene la vetaja, para quien no se maneje bien en inglés, de estar en castellano, pero no se pierda de vista el texto de Cohn.

Entre la abundante *Bibliografía Complementaria* que podríamos recomendar estaría dicho libro. Pero el fundamental, más completo y actualizado, es el siguiente:

- Donald L. Cohn, *Measure Theory*. Segunda edición. Birkhäuser-Springer Verlag, Basel, 2013. Se recomienda el uso de esta obra, que eso sí, está en inglés. Pero de la que disponen de ejemplares las bibliotecas de la UNED.

- Paul R. Halmos, *Measure Theory*. Van Nostrand Reinhold. Muy bien escrito y razonado, es el clásico sobre la materia. También está en inglés.

10.BIBLIOGRAFÍA COMPLEMENTARIA

LIBRO ACTUALMENTE NO PUBLICADO

ISBN(13):

Título: INTEGRACIÓN: TEORÍA Y TÉCNICAS

Autor/es: Guzmán, Miguel De ; Rubio, Baldomero ;

Editorial: Alhambra



ISBN(13): 9788490852255
Título: LOGICA APLICADA. VAGUEDAD E INCERTIDUMBRE. (2014)
Autor/es: Angel Garrido ;
Editorial: : DYKINSON S.L.

Buscarlo en librería virtual UNED

Buscarlo en bibliotecas UNED

Buscarlo en la Biblioteca de Educación

Buscarlo en Catálogo del Patrimonio Bibliográfico

Comentarios y anexos:

Si bien no es necesario que se adquieran todos los libros que se mencionan en la bibliografía complementaria, puede resultar muy formativo al menos consultarlos en las bibliotecas, para los interesados en tener los conocimientos adecuados.

Sí que son fundamentales las dos obras especialmente redactadas para que los alumnos adquieran una formación lógica tan necesaria para un buen matemático, ya que además, se aplican a la nueva 'Fuzzy Measure Theory', o Teoría de las Medidas Difusas, que es por donde hoy avanzan estas investigaciones.

Las obras a las que nos referimos como básicas para obtener una buena formación lógica y preparar

los dos trabajos son estas:

- Ángel Garrido, *Lógicas de nuestro tiempo*. Ed. Dykinson, Madrid, 2014.
- Ángel Garrido, *Lógica Aplicada. Vaguedad e Incertidumbre*. Ed. Dykinson, Madrid, 2014.

Y está a punto de aparecer esta otra obra, que viene a completar las anteriores:

- Ángel Garrido, *Lógica y Computación*. Ed. Dykinson. Madrid, 2015.

NOTA: La parte de Medidas Difusas está desarrollada en el segundo de estos libros.

11. RECURSOS DE APOYO

1. *Curso virtual* donde se encuentran materiales de apoyo al estudio, acceso al foro y correos electrónicos de profesores y alumnos, laboratorios informáticos para el uso de programas de apoyo al estudio.
2. Libros especialmente diseñados para que los alumnos adquieran una buena y consistente formación matemática.
3. Programa *Maxima*, de cálculo simbólico libre, <http://www.geogebra.org/cms/>

12. TUTORIZACIÓN

La tutorización presencial y telefónica se llevará a cabo por el responsable de la asignatura, el Profesor Doctor D. Ángel Garrido:

- Los martes lectivos, de 10 a 13, en el despacho 129, en la primera planta de la Facultad de Ciencias de la UNED, Paseo Senda del Rey, 9. O a través del teléfono 91 3987237, o mediante un e-mail: agarrido@mat.uned.es

Así se podrá atender a las cuestiones planteadas por los tutores, o cualquier duda de carácter general de la asignatura por



parte de los alumnos.

El *Profesor Doctor D. Ángel Garrido* tiene 262 artículos y 12 libros publicados hasta la fecha. Investiga en Teoría de Conjuntos, Lógica y Medidas Difusas.

Doctor en Lógica Matemática, con la calificación de Sobresaliente Cum Laude por Unanimidad.

Premio Extraordinario de Doctorado.

13.Recomendaciones

Se recomienda visitar periódicamente la página web de la asignatura (<http://www.uned.es/6102210>).

