

# INTEGRAL DE LEBESGUE

Curso 2016/2017

(Código: 6102401-)

## 1. PRESENTACIÓN DE LA ASIGNATURA

Para presentar esta asignatura, el equipo docente ha recopilado toda la información de carácter general, es decir, las principales características y requisitos, en la siguiente ficha:

### FICHA DE LA ASIGNATURA

Órgano responsable: Departamento de Matemáticas Fundamentales (UNED)		
Nombre de la asignatura: <i>Integral de Lebesgue</i>		
Curso: Cuarto	Semestre: 1º	Créditos ECTS: 5
Horas estimadas de trabajo del estudiante: 125		
Horas de trabajo personal (y en grupo) y otras actividades:		
55 horas en créditos de contenido teórico, 55 horas en créditos de contenido práctico, y 15 para trabajo autónomo adicional (PEC, preparación de un trabajo, Prueba Presencial, etc.)		
Profesorado		
Profesor Doctor Ángel Garrido Bullón		
Objetivo principal:		
Conocer a fondo lo que es la Integral de Lebesgue, así como el papel que desempeña dentro del Análisis Matemático. Y conocer también las líneas actuales de avance de la investigación en este campo.		
Aconsejable, pero no imprescindible: Haber cursado las asignaturas de "Funciones de una variable I", "Funciones de una variable II", "Funciones de varias variables I" y "Funciones de varias variables II".		
Contenido (breve descripción de la asignatura):		
Construcción de la integral de Lebesgue.		
Principales Teoremas y Corolarios de esta teoría.		
Teoremas de convergencia para la integral de Lebesgue.		
Semejanzas y diferencias entre la integral de Riemann (u otras) y la de Lebesgue.		
Medida e integral.		
Bibliografía básica:		
- Valdivia, Manuel, "Análisis Matemático V". Segundo volumen. UNED, Madrid. Existen varias ediciones; preferible la última.		



Puede complementarse con la obra:

- Cohn, Donald L., *"Measure Theory"*. Segunda edición. Ed. Birkhäuser-Springer Verlag, Basel. Existe una edición en soporte papel, y ha aparecido otra más, ahora como e-book.

Metodología docente: Enseñanza a distancia, con la metodología de la UNED.

Tipo de evaluación (exámenes/trabajo/evaluación continua):

Los temas de esta asignatura corresponden aproximadamente a la segunda parte del libro de Marsden y Tromba. Se aconseja pensar detenidamente los temas, aclarando algunos puntos por otros libros; sobre todo, conviene manejar colecciones de problemas, lo que permite asimilar mejor los conceptos, y de paso, ver las aplicaciones de los mismos.

En cuanto a la elaboración del trabajo complementario, las siguientes obras, algunas de ellas especialmente diseñadas para nuestros alumnos: las de Ángel Garrido, en Sanz y Torres-UNED o en la Ed. Dykinson. En ellas se podrán recorrer los nuevos caminos de la Computación y de cómo la Matemática va intentando resolver sus problemas. Sobre la Historia del Cálculo existen obras muy adecuadas, como son las de Carl B. Boyer, las de Morris Kline, o Miguel de Guzmán, junto con las de José Ferreirós, las de Antonio J. Durán, o las de P. M. González-Urbaneja.

Idioma en que se imparte: Español / Inglés

## 2.CONTEXTUALIZACIÓN EN EL PLAN DE ESTUDIOS

La de "Integral de Lebesgue" es una asignatura que en el plan de estudios de la titulación, Grado en Matemáticas, figura en el primer semestre del cuarto curso. Tiene carácter optativo y se le asignan 5 créditos.

La integral de una función  $f$  entre los límites de integración  $a$  y  $b$  puede interpretarse como el área bajo la gráfica de  $f$ . Esto es fácil de entender para funciones que nos son familiares como los polinomios, la exponencial o logarítmica, pero... ¿qué quiere decir para funciones un poco más exóticas o con comportamiento errático? En general, ¿cuál es la clase de funciones para las cuales el concepto de "área bajo la curva" tiene sentido? La respuesta a esta interrogante tiene importancia teórica y práctica fundamental, y ha ido evolucionando con distintas aproximaciones y generalizaciones a lo largo de la Historia, lo cual es muy conveniente conocer.

Como parte del avance de las matemáticas en el siglo XIX, se hicieron varios intentos de poner sobre bases sólidas el cálculo integral. La integral de Riemann propuesta por Bernhard Riemann (1826-1866), sentó la primera base sólida sobre la cual se desarrolló la integral. La definición de Riemann empieza con la construcción de una sucesión de áreas rectangulares fácilmente calculables cuya suma converge a la integral de una función dada. Esta definición es buena en el sentido que provee las repuestas adecuadas y esperadas para muchos problemas ya resueltos, así como importantes y útiles resultados para muchos otros problemas; algunos de ellos, de las ciencias más recientes, como es el caso de la Inteligencia Artificial.

Sin embargo, la integración de Riemann no llega a resolver ciertos casos. La integración de una función no negativa (por considerar sólo el caso más simple) puede considerarse como el área entre la gráfica de una curva y el eje de abscisas. La Integral de Lebesgue, propuesta por Henri Lebesgue (1875-1941), extiende el concepto de integración a una clase mucho más amplia de funciones, así como a los posibles dominios en los cuales estas integrales pueden definirse. Hacía mucho que se sabía que para funciones no negativas con una curva suficientemente suave (como una función continua en intervalos cerrados) el área bajo la curva podía definirse como alguna integral y calcularse usando técnicas de aproximación de la región mediante rectángulos o polígonos. Pero como se necesitaba considerar funciones más irregulares, se hizo evidente que una aproximación más cuidadosa sería necesaria para definir una integral que se ajustara a dichos problemas.

La integración de Riemann tampoco funciona bien al tomar límites de sucesiones de funciones, dificultando su análisis. Esto es algo de vital importancia, por ejemplo, en el estudio de las series de Fourier, la transformada de Fourier y otros temas. La integral de Lebesgue permite saber cómo y cuándo es posible tomar límites bajo el signo de la integral.



La definición de Lebesgue también hace posible calcular integrales para una clase más amplia de funciones. Por ejemplo, la función de Dirichlet, que es 0 cuando su argumento es irracional y 1 en otro caso (racional), tiene integral de Lebesgue, pero no de Riemann.

En este contexto, esta asignatura, optativa del cuarto curso del Grado en Matemáticas, pretende conseguir que los alumnos conozcan las propiedades básicas de la integral de Lebesgue y el papel que desempeña en el Análisis Real y en muchas otras ramas de las Matemáticas. Otras integrales han sido propuestas para resolver los problemas que aquellas no terminaban de resolver, como son las Integrales de Choquet, las de Sugeno, etc. Con este objetivo, los alumnos de esta asignatura trabajarán las siguientes competencias específicas del título:

- RA11. Saber cómo se construye la integral de Lebesgue y las diferencias entre esta integral y la de Riemann.
- RA12. Conocer los teoremas de convergencia para la integral de Lebesgue.
- CED1. Comprensión de los conceptos básicos y familiaridad con los elementos fundamentales para el estudio de las Matemáticas superiores.
- CEA3. Habilidad para crear y desarrollar argumentos bien estructurados y coherentes, con una clara identificación de las hipótesis y de las conclusiones.
- CEA4. Habilidad para detectar inconsistencias en los razonamientos, ya sea de forma teórica o práctica, mediante la búsqueda de contraejemplos.
- CEA7. Habilidad para presentar el razonamiento matemático y sus conclusiones de manera clara y precisa, de forma apropiada al público al que se dirige, tanto en forma oral como escrita.

Con esta asignatura se pretende cubrir también las siguientes competencias genéricas propuestas por la UNED, que son importantes en su formación universitaria y elemento clave en el EEES:

- CG4 Análisis y Síntesis.
- CG6 Razonamiento crítico.
- CG8 Seguimiento, monitorización y evaluación del trabajo propio y de otros.
- CG10 Comunicación y expresión escrita.
- CG12 Comunicación y expresión en otras lenguas (especialmente, en inglés).
- CG13 Comunicación y expresión matemática, científica y tecnológica.

### 3. REQUISITOS PREVIOS REQUERIDOS PARA CURSAR LA ASIGNATURA

Para abordar el estudio de esta asignatura en las mejores condiciones posibles, es conveniente que el alumno tenga conocimientos básicos en Análisis y Álgebra.

Para facilitar su incorporación a la asignatura con la mejor preparación posible, será necesario un buen conocimiento del Inglés, para así poder manejar la bibliografía científica, dado que buena parte de ella se puede encontrar en ese idioma.

### 4. RESULTADOS DE APRENDIZAJE

Conocimientos teóricos:

Conocer y comprender ciertas clases de conjuntos (anillos, álgebras,  $\sigma$ -anillos,  $\sigma$ -álgebras, etc.), y sus propiedades.



Conocer bien las medidas aditivas, completamente aditivas (o  $\sigma$ -aditivas), y exteriores.

Conocer las funciones medibles e integrables, así como sus propiedades.

Conocer bien los teoremas de convergencia, en relación con la integración; incluido el teorema de convergencia dominada de Lebesgue.

Conocer la complección de una medida y en particular, de un producto de medidas.

Entender y saber aplicar y demostrar los teoremas fundamentales, como son el de Egoroff, el de Lusin, el de de Fubini, o el de Radon-Nikodym, entre otros.

*Conocimientos prácticos o destrezas:*

Saber dar diferentes ejemplos de las clases fundamentales que existen de conjuntos.

Saber aplicar la medida de Lebesgue en la recta y en el espacio real, así como sus propiedades.

Saber interpretar adecuadamente los Teoremas de Egoroff y de Lusin.

Manejar con soltura distintos tipos de integrales; sobre todo, las de Lebesgue y Riemann, pero también alguna otra.

Familiarizarse con los productos de espacios medibles y de espacios de medidas.

Saber demostrar el teorema de Fubini y los teoremas de convergencia para la integral de Lebesgue.

*Actitudes:*

Apreciar el valor formativo y cultural del Análisis Matemático.

Entender cómo éste Análisis se aplica en situaciones concretas, que se modelizan a través de tan poderosa herramienta matemática.

## 5. CONTENIDOS DE LA ASIGNATURA

### 1. Medidas.

- Álgebras and sigma-álgebras.
- Diversas Medidas.
- Medidas Exteriores.
- Medida de Lebesgue.
- Completitud and Regularidad.

### 2. Funciones e Integrales.

- Funciones medibles.
- Propiedades que se verifican en casi todo punto.
- La Integral.



- Teoremas del Límite.

- Integral de Riemann.

- Integral de Lebesgue.

- Funciones medibles.

### 3. Convergencia.

- Modos de Convergencia.

- Espacios Normados.

- Definición de  $L^p$  y de  $L^p$ . Sus Propiedades.

- Espacios duales.

### 4. Medidas signadas y complejas.

- Medidas con signo y medidas complejas.

- Continuidad absoluta.

- Singularidad.

- Funciones of variación acotada.

- Los duales de los espacios  $L^p$ .

### 5. Medidas Producto.

- Construcciones.

- Teorema de Fubini.

- Aplicaciones.

### 6. Diferenciación.

- Cambio de variable en  $\mathbb{R}^d$ .

- Diferenciación de medidas.

- Diferenciación de funciones.

### 7. Medidas sobre Espacios Localmente Compactos.

- Espacios localmente compactos.



- El Teorema de Representación de Riesz.
- Medidas signadas y complejas. Dualidad.
- Propiedades adicionales de las medidas regulares.
- Productos de espacios localmente compactos.

## 6.EQUIPO DOCENTE

- [ANGEL LAUREANO GARRIDO BULLON](#)

## 7.METODOLOGÍA Y ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE

El sistema fundamental de aprendizaje será el de la lectura y estudio de la bibliografía.

De manera general, la docencia se impartirá a través de un curso virtual dentro de la plataforma educativa de la UNED, complementado con la asistencia del equipo docente.

· *Curso virtual*

De manera general, la docencia se impartirá dentro de la plataforma educativa de la UNED, complementándose con la asistencia personalizada del equipo docente.

Dentro del curso virtual el alumnado dispondrá de:

- o Página de bienvenida, donde se indica el concepto general de la asignatura y se presenta el equipo docente.
- o Calendario, donde se establece el orden temporal de actividades y sugerencias sobre el reparto temporal de la materia, para que el estudiante los adapte a su disponibilidad y necesidades.
- o *Materiales:*
  - a) *Libros.*
  - b) *Guías del curso*, donde se establecen los objetivos concretos y los puntos de interés.
  - c) *Programa*, donde se especifica la división del contenido.
  - c) *Recursos*, donde se proporciona el material necesario para el estudio.
  - d) *Ejemplos de exámenes*, donde se orienta sobre las pruebas escritas y se muestran algunos ejemplos de los exámenes de cursos anteriores.
- o *Actividades:*
  - Prueba de evaluación a distancia, elaboración de trabajo, ....*
- o *Comunicación:*



- a) *Correo*, para preguntas individuales.
- b) *Foros de Debate*, donde se intercambian los conocimientos y se resuelven las dudas de tipo general.

Fuera del curso virtual, el estudiante también tendrá acceso a realizar consultas al equipo docente a través del correo, del teléfono y presencialmente, en los horarios de los días lectivos señalados en la Guía, y que han sido establecidos para estas actividades. También se podrán organizar videoconferencias coordinadas con los distintos Centros Asociados, si las necesidades docentes lo precisaran.

Con el fin de planificar el estudio de esta asignatura, gestionar el tiempo y el esfuerzo, y ayudar con ello a lograr un mejor aprendizaje, el equipo docente ha distribuido el tiempo asignado para la realización de las actividades formativas, según la tabla siguiente:

<p>Actividades formativas</p> <p>Con su contenido en ECTS (5) « 125 horas para esta asignatura</p> <p><i>Créditos de contenido teórico: lectura/visualización y estudio de los materiales didácticos « 55 h.</i></p> <p>Lectura de orientaciones « 1 h.</p> <p>Estudio de los contenidos teóricos « 50 h.</p> <p>Intercambio de información y consulta de dudas (equipo docente, tutores y grupos de trabajo) « 4 h.</p> <p><i>Créditos de contenido práctico: actividades prácticas realizadas individualmente, en contacto con el Tutor del CC o mediadas por el curso virtual « 55 h.</i></p> <p>Resolución de problemas y ejercicios « 48 h.</p> <p>Intercambio de información en foros « 3 h.</p> <p>Manejo de herramientas informáticas y plataforma alf « 4 h.</p> <p><i>Trabajo autónomo adicional« 15h.</i></p> <p>Realización de dos trabajos complementarios « 7 h.</p> <p>Realización de dos pruebas de evaluación continua « 6 h.</p> <p>Realización de pruebas presenciales « 2 h.</p>
--

## 8.EVALUACIÓN

La evaluación se llevará a cabo mediante una prueba presencial máxima de dos horas de duración, y tendrá lugar en un Centro Asociado de la UNED.

La calificación final del alumno ponderará, conforme a los criterios fijados por el equipo docente, los resultados de la



evaluación continua o formativa desarrollada por el alumno y de la Prueba Presencial.

#### Evaluación final

El alumno podrá elegir voluntariamente uno de estos dos sistemas de evaluación:

Presentarse solamente al examen final, en cuyo caso obtendría como calificación final la de esa prueba.

Si el alumno opta por la evaluación continua, debe realizar el trabajo y la PEC, y entonces, su nota final será la del siguiente polinomio:  $0,8 E + 0,1 P + 0,1 T$ , con E la nota del examen presencial; P, la de la PEC; y T, la del trabajo.

En cualquier caso, el examen final, de tipo presencial, es obligatorio para todos los alumnos.

Entre 7 y 8,9 puntos se obtiene un notable, y a partir de 9 puntos sobresaliente.

## 9. BIBLIOGRAFÍA BÁSICA

ISBN(13): 9788436223323

Título: ANÁLISIS MATEMÁTICO V ([1ª ed., 1ª reimp.])

Autor/es: Valdivia Ureña, Manuel ;

Editorial: Universidad Nacional de Educación a Distancia

Buscarlo en Editorial UNED

Buscarlo en librería virtual UNED

Buscarlo en bibliotecas UNED

Buscarlo en la Biblioteca de Educación

#### Comentarios y anexos:

Venía siendo recomendado el segundo tomo del "*Análisis Matemático V*", del profesor Manuel Valdivia Ureña, editado por la UNED. El mencionado texto desarrolla contenidos básicos de la asignatura "Integral de Lebesgue". Seguimos recomendándolo. Tiene la ventaja, para quien no se maneje bien con el inglés, de estar en castellano, pero no se debe perder de vista el texto (más moderno) de D. L. Cohn. Por ello, entre la abundante *Bibliografía Complementaria* que podríamos recomendar estaría ese libro:

- Donald L. Cohn, *Measure Theory*. Segunda edición. Birkhäuser-Springer Verlag, Basel, 2013. Pero de la que disponen de ejemplares las bibliotecas de la UNED.

Y el siguiente:

- Paul R. Halmos, *Measure Theory*. Van Nostrand Reinhold. Muy bien escrito y razonado, es el clásico sobre la materia. También está en inglés.

## 10. BIBLIOGRAFÍA COMPLEMENTARIA

LIBRO ACTUALMENTE NO PUBLICADO

ISBN(13):

Título: INTEGRACIÓN: TEORÍA Y TÉCNICAS

Autor/es: Guzmán, Miguel De ; Rubio, Baldomero ;

Editorial: Alhambra



## Comentarios y anexos:

Para conocer los nuevos avances en Teoría de la Medida e Integración, pueden consultarse las obras del Profesor Dr. Ángel Garrido, como la de *FUNDAMENTOS DE ANÁLISIS*. También se trata de estos temas y su evolución en varios de sus restantes libros. Véanse por la red, o en las páginas de Dykinson o las de Sanz y Torres-UNED.

## 11.RECURSOS DE APOYO

1. *Curso virtual* donde se encuentran materiales de apoyo al estudio, acceso al foro y correos electrónicos de profesores y alumnos, laboratorios informáticos para el uso de programas de apoyo al estudio.
2. Libros elaborados para que los alumnos adquieran una buena y consistente formación matemática.
3. Programa *Maxima*, de cálculo simbólico libre, <http://www.geogebra.org/cms/>

## 12.TUTORIZACIÓN

La tutorización se llevará a cabo por el responsable de la asignatura, que es el Profesor Doctor D. Ángel Garrido:

- Los martes lectivos, de 10 a 13, en el despacho 129, en la primera planta de la Facultad de Ciencias de la UNED, Paseo Senda del Rey, 9. O a través del teléfono 91 3987237, o mediante un e-mail: [agarrido@mat.uned.es](mailto:agarrido@mat.uned.es)

Así se podrá atender a las cuestiones planteadas por los tutores, o cualquier duda de carácter general de la asignatura por parte de los alumnos.

El *Profesor Doctor D. Ángel Garrido* tiene publicados más de doscientos artículos y 16 libros hasta la fecha. Trabaja principalmente sobre Análisis, Teoría de Conjuntos y Medidas Difusas. Licenciado en Ciencias Exactas, por la especialidad de Matemática Pura, Máster en Inteligencia Artificial y Doctor en Lógica y Fundamentos Matemáticos, con la calificación de Sobresaliente Cum Laude por Unanimidad. Premio Extraordinario de Doctorado.

## 13.Recomendaciones

Se recomienda visitar periódicamente la página web de la asignatura, para poder estar al tanto de las novedades (<http://www.uned.es/6102210>).

