

8-09

# GUÍA DE ESTUDIO DE LDI



## **CALCULO NUMERICO I**

CÓDIGO 01083022

UNED

8-09

CÁLCULO NUMÉRICO I

CÓDIGO 01083022

# ÍNDICE

OBJETIVOS

CONTENIDOS

EQUIPO DOCENTE

BIBLIOGRAFÍA BÁSICA

BIBLIOGRAFÍA COMPLEMENTARIA

SISTEMA DE EVALUACIÓN

HORARIO DE ATENCIÓN AL ESTUDIANTE

## OBJETIVOS

El objeto del Cálculo Numérico es el cálculo aproximado de soluciones a problemas matemáticos. Este curso pretende que el alumno complete los conocimientos de Álgebra y Cálculo Diferencial e Integral con conceptos y procedimientos que le permitan, de un modo efectivo, alcanzar la solución de estos problemas. Estas técnicas consideran aspectos del cálculo que aparecen en los problemas reales y se acomodan a los medios actuales de cálculo automático digital.

En este curso, los alumnos utilizarán los métodos del Álgebra Lineal considerando sus aspectos algorítmicos y analizarán las dificultades que surgen en el cálculo con matrices de dimensión elevada. La teoría de la interpolación les permitirá la resolución de problemas cuyo análisis matemático puede ser establecido pero para los cuales no es posible determinar la solución analítica o ello encierra gran complejidad. Las técnicas de interpolación les permitirán mediante cálculos algebraicos determinar el valor de las derivadas e integrales de funciones que no son elementales

Posteriormente, el estudio del método de Newton le permitirá aproximar problemas algebraicos, cuya naturaleza no sea lineal, mediante ecuaciones lineales; Finalmente, estudiará técnicas de resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias usando esquemas numéricos basados en técnicas de interpolación.

No es posible desligar el aprendizaje de las técnicas numéricas del manejo de los instrumentos de cálculo automático que permiten su verdadera puesta en práctica en situaciones que no sean deliberadamente simples. La aplicación de los algoritmos numéricos en entornos de cálculo automático es esencial para la perfecta comprensión de la metodología del Cálculo Numérico. Por esta razón, junto con la realización de ejercicios de naturaleza teórica destinados a la formación conceptual se recomienda la resolución de problemas en hojas de cálculo y entornos avanzados de Cálculo Científico.

## CONTENIDOS

### Unidad Didáctica I. Interpolación

#### TEMA 1. El tratamiento numérico de los problemas matemáticos

Orígenes y objetivos del Cálculo Numérico. Algunos problemas que se estudian en el Cálculo Numérico. El tratamiento numérico de los problemas matemáticos.

#### TEMA 2. El problema general de interpolación

Introducción a la teoría de la interpolación: Función interpoladora de otra. Polinomio de interpolación. Extrapolación. El problema general de interpolación. Casos particulares: Interpolación polinómica clásica, de Taylor, de Hermite y trigonométrica.

#### TEMA 3. Construcción del polinomio de interpolación: Fórmula de Lagrange

Construcción del polinomio de interpolación: Polinomio de Lagrange. Fórmula de Lagrange. Interpolación lineal. Casos particulares: Polinomios de Lagrange para los problemas de interpolación de Taylor y Hermite. Simplificación de la fórmula de Lagrange cuando los puntos son equidistantes.

#### TEMA 4. Construcción del polinomio de interpolación por recurrencia: fórmula de Newton y métodos Aitken-Neville

Paso del polinomio de interpolación en  $n$  puntos al de  $n+1$  puntos. Definición de diferencias divididas. Propiedades de las diferencias divididas. Fórmula de Newton del polinomio de interpolación. Cálculo de diferencias divididas. Estudio del error de interpolación. Relación entre diferencias divididas y derivadas. Métodos Aitken-Neville. Fórmula básica. Estrategias de Aitken y Neville.

#### **TEMA 5. Construcción del polinomio de interpolación usando diferencias finitas**

Diferencias finitas: Diferencias progresivas, regresivas y centrales y relación entre ellas. Propiedades de las diferencias finitas: Expresión del polinomio de interpolación usando diferencias finitas. Fórmula de Newton progresiva y regresiva. Fórmula de Gauss progresiva y regresiva. Otras fórmulas.

#### **TEMA 6. Interpolación por funciones splines**

Funciones splines. Interpolación por splines cúbicos. Planteamiento, sistema que define la solución, existencia, unicidad y resolución.

### **Unidad Didáctica II. Derivación e integración numéricas**

#### **TEMA 7. Introducción a los problemas de integración y derivación numérica**

Derivación numérica: Introducción, fórmula tipo y error. Integración numérica: Algunas cuestiones sobre diferencias divididas:

Derivación de diferencias divididas y derivadas sucesivas.

#### **TEMA 8. Fórmulas de tipo interpolatorio**

Fórmulas de derivación numérica de tipo interpolatorio. Fórmulas de integración numérica de tipo interpolatorio. Aproximación de derivadas de orden superior. Estudio del error en las fórmulas de tipo interpolatorio. Simplificación y acotación del error.

#### **TEMA 9. Fórmulas usuales de derivación numérica**

Derivadas de primer orden. Construcción de fórmulas y expresión del error.

Derivadas de orden superior. Construcción de fórmulas y expresión del error.

Otros procedimientos de construcción de fórmulas de derivación numérica.

Procedimiento basado en los desarrollos de Taylor de las  $f(x_i)$ . Errores de redondeo y truncamiento. Cotas de estos errores.

#### **TEMA 10. Fórmulas usuales de integración numérica**

Generalidades y primeras fórmulas. Rectángulo, punto medio y trapecio. Errores e interpretación geométrica. Fórmulas de Newton-Cotes. Fórmulas cerradas de Simpson y abiertas. Otras fórmulas de cuadratura de tipo interpolatorio con expresión del error.

#### **TEMA 11. Fórmulas de cuadratura de Gauss**

Planteamiento del problema y condiciones para que una fórmula de cuadratura sea exacta para polinomios de grado  $n+q$ . Fórmulas de cuadratura de Gauss. Construcción, exactitud, ventajas e inconvenientes y expresión del error. Fórmulas de Gauss con función de peso. Fórmulas de Gauss-Legendre y Gauss-Chebyshev.

#### **TEMA 12. Fórmulas de cuadratura compuestas**

Introducción: Planteamiento, definición y obtención de fórmulas. Fórmulas de cuadratura compuestas: Fórmulas del trapecio, rectángulo y Simpson. Error en las fórmulas de cuadratura compuestas más usuales. Extrapolación de Richardson y método de Romberg.

### **Unidad Didáctica III. Aproximación de funciones**

#### **TEMA 13. Introducción a la teoría de aproximación**

Planteamiento del problema. Espacios métricos y vectoriales normados. Seudométrica y seminorma. Aproximación de funciones. Mejor aproximación en un subconjunto. Subconjuntos densos y cualesquiera. Problemas usuales de aproximación de funciones. Aproximación uniforme de funciones continuas. Aproximación por mínimos cuadrados continua y discreta.

#### **TEMA 14. Aproximación en espacios normados**

Revisión de algunos conceptos: Compacidad. Conjuntos convexos. Espacios prehilbertianos. Desigualdad de Cauchy-Schwarz. Existencia de mejor aproximación en un subespacio de dimensión finita. Unicidad de la mejor aproximación en subespacios de dimensión finita.

#### **TEMA 15. Aproximación en espacios prehilbertianos**

Introducción y caracterización de la mejor aproximación en subespacios de dimensión finita. Condición necesaria y suficiente para que un elemento sea mejor aproximación de otro en un subespacio de dimensión finita. Construcción de la mejor aproximación. Sistema de ecuaciones lineales que determina la mejor aproximación en subespacios. Determinante de Gram. Uso de bases ortogonales. Elementos ortogonales. Base ortogonal y ortonormal. Coeficientes y sumas de Fourier. Algoritmo de ortogonalización de Gram-Schmidt. Mejor aproximación en el traslado de un subespacio.

#### **TEMA 16. Aproximación por mínimos cuadrados**

Espacios prehilbertianos cualesquiera. Aproximación por mínimos cuadrados. Aproximación por mínimos cuadrados continua. Aproximación por mínimos cuadrados continua ponderada. Polinomios ortogonales. Definición, propiedades y relación recurrente. Polinomios de Legendre, Chebyshev, Laguerre y Hermite. Aproximación por mínimos cuadrados discreta.

#### **TEMA 17. Aproximación uniforme de funciones continuas: el teorema de Weierstrass**

Introducción: Aproximación en un subconjunto y aproximación uniforme de funciones continuas por polinomios. Polinomios de Bernstein. Teorema de Weierstrass.

#### **TEMA 18. Aproximación uniforme de funciones continuas por polinomios de grado fijado**

Caracterización de la mejor aproximación. Construcción de la mejor aproximación: algoritmo de Rémès. Polinomios de Chebyshev. Aproximación uniforme de funciones continuas por polinomios de bajo grado. Aproximación uniforme de funciones continuas por polinomios de dimensión finita.

### **Unidad Didáctica IV. Resolución aproximada de ecuaciones**

#### **TEMA 19. Métodos iterativos de resolución de ecuaciones: generalidades**

Planteamiento del problema. Teorema del punto fijo. Métodos iterativos de resolución de ecuaciones. Estudio de la convergencia. Estudio del error y orden de convergencia. Interpretación gráfica de los métodos iterativos.

#### **TEMA 20. El método de Newton-Raphson**

Dedución del método. Convergencia local y global del método. Caso de ecuaciones con raíces múltiples. Interpretación gráfica. Obtención de la raíz m-ésima positiva de un número positivo como ejemplo de aplicación práctica del método de Newton.

#### **TEMA 21. Otros métodos usuales de resolución de ecuaciones**

Método de bisección. Acotación del error. Métodos de Whittaker, regula falsi y de la secante. Interpretación gráfica. Ventajas e inconvenientes. Otros métodos. Métodos de Müller,

Interpolación inversa, Aitken y Steffensen.

#### TEMA 22. **Resolución de sistemas de ecuaciones no lineales**

Introducción: Métodos iterativos de resolución de sistemas. Convergencia del método. El método de Newton-Raphson para sistemas.

#### TEMA 23. **Ecuaciones polinómicas: localización de las raíces**

Algoritmo de Horner para la evaluación de polinomios y derivadas de polinomios. Acotaciones de raíces: teorema de Sturm. Aproximación de raíces por el método de bisección.

#### TEMA 24. **Ecuaciones polinómicas: su resolución aproximada**

Método de Bairstow para la determinación de factores cuadráticos. El método de Graeffe. Estimación de una cota de error relativo de la solución aproximada en un método cualquiera. Caso de raíces coincidentes o muy próximas.

### **Unidad Didáctica V. Resolución de sistemas de ecuaciones lineales**

#### TEMA 25. **Algunas propiedades interesantes de las matrices**

Revisión de algunos conceptos. –Vectores propios, valores propios, polinomios característicos, radio espectral, matriz simétrica, matriz ortogonal, etc. Normas matriciales. Sucesiones matriciales.

#### TEMA 26. **Métodos directos de resolución de sistemas lineales: el método de Gauss**

Métodos directos y métodos iterativos: Coste de los métodos directos. Resolución de sistemas triangulares: Coste del método. El método de Gauss: Coste del método. Variantes de método de Gauss: elección de pivotes. Método de Jordan.

#### TEMA 27. **Métodos directos. Otros métodos usuales**

Descomposición de una matriz como producto de matrices triangulares. Existencia de una descomposición en matrices no singulares. Método de Cholesky para matrices simétricas definidas positivas: coste del método. Otros métodos. Método de Givens y de Householder. Error y acondicionamiento del sistema.

#### TEMA 28. **Métodos iterativos de resolución de sistemas lineales**

Limitación de los métodos directos. Métodos iterativos. Condiciones necesarias y suficientes para la convergencia de métodos iterativos. Construcción de métodos iterativos.

#### TEMA 29. **Métodos iterativos usuales**

El método de Jacobi. El método de Gauss-Seidel. Ventajas sobre el método de Jacobi. Métodos de relajación. Ventaja sobre los métodos de Jacobi y Gauss-Seidel. Convergencia de los métodos.

#### TEMA 30. **Cálculo de valores propios e inversión de matrices**

Cálculo de los valores propios Métodos directos e iterativos. Métodos de determinación del polinomio característico Método de Krylov. Teorema de Cayley-Hamilton. Método de Leverrier modificado. Métodos de transformación de matrices. Tridiagonalización de matrices reales y simétricas. Polinomio característico y valores propios en matrices tridiagonales. Métodos para el cálculo del valor propio dominante. El método de potencias. Convergencia y modificación del método. Inversión de matrices. Método para mejorar la aproximación de la matriz inversa.

### **Unidad Didáctica VI: Resolución aproximada de ecuaciones diferenciales**

#### TEMA 31. **Ecuaciones en diferencias lineales**

Ecuaciones en diferencias lineales. Orden de una ecuación Ecuaciones lineales de coeficientes constantes. Ecuación homogénea. Sistema fundamental de soluciones. Solución general de la ecuación homogénea y de la ecuación completa.

**TEMA 32. Resolución de las ecuaciones en diferencias lineales de coeficientes constantes**

Construcción de soluciones de la ecuación homogénea. Ecuación característica con raíces simples o múltiples. Construcción de soluciones de la ecuación completa. Caso en que el segundo miembro es un polinomio o una función exponencial. Método de variación de constantes. Método de Bernoulli de resolución de ecuaciones polinómicas.

**TEMA 33. Métodos de resolución aproximada de problemas de condiciones iniciales en ecuaciones diferenciales ordinarias: el método de Euler**

Introducción: El método de Euler. Interpretación gráfica. Estudio del error.

**TEMA 34. Otros métodos usuales de un paso para la resolución aproximada de problemas de valores iniciales**

Formulación general Método de Taylor. Métodos de Taylor más simples. Métodos de Runge-Kutta. Métodos con una evaluación de función, con dos evaluaciones y métodos de Runge-Kutta clásico o de cuarto orden.

**TEMA 35. Métodos de varios pasos lineales**

Formulación general. Métodos lineales de varios pasos usuales Método de Simpson.–Métodos de Adams-Bashforth y Adams-Moulton.Métodos de Nyström y Milne-Simpson. Métodos predictor-corrector.

**TEMA 36. Introducción a la resolución aproximada de problemas de contorno**

Problemas de contorno. Métodos de diferencias finitas. Métodos de tiro.

## EQUIPO DOCENTE

## BIBLIOGRAFÍA BÁSICA

ISBN(13):9788436221183

Título:CÁLCULO NUMÉRICO I (6ª)

Autor/es:Gasca González, Mariano ;

Editorial:U.N.E.D.

Unidades didácticas, del profesor Gasca González. UNED.

Está previsto que en el curso académico 2009-10, entren en vigor unas nuevas unidades didácticas que introducirán una reorganización metodológica y de contenidos en la asignatura. No obstante, durante el curso 2008-09 se mantendrán las referidas previamente.

## BIBLIOGRAFÍA COMPLEMENTARIA

CONTES, D. y DE BOOR, C.: *Análisis Numérico*. Ed. Libros McGraw-Hill.

DEMIDOVITCH, B. y MARON, I.: *Cálculo Numérico Fundamental*. Ed.

Paraninfo. S.A.FROBERG, C. E.: *Introduction to Numerical Analysis*. Ed. Addison WesleyPublishing Company.

SCHEID, F.: *Análisis Numérico*. Ed. Libros McGraw-Hill.

CURTIS, F. GERALD: *Análisis Numérico*. Ed. Representaciones y servicios de ingeniería, S.A.

## SISTEMA DE EVALUACIÓN

### 6.1. PRUEBAS DE EVALUACIÓN A DISTANCIA

Esta asignatura tiene Pruebas de Evaluación a Distancia, correspondientes a las Unidades Didácticas 1, 2, 4 y 5. El carácter de estas pruebas es formativo, por lo que no se califican. En fechas anteriores a las de realización de pruebas presenciales se publicarán las soluciones del profesor en el curso virtual.

### 6.2. PRUEBAS PRESENCIALES

Las Unidades Didácticas se consideran autosuficientes para la preparación de la materia cuyo conocimiento se exige en esta asignatura. De la Unidad Didáctica 6 no se exige teoría, solamente se plantearán sobre ella ejercicios prácticos. De las restantes cinco Unidades se exige toda la teoría.

En los exámenes de febrero, junio y septiembre se ponen cinco ejercicios (4 ejercicios prácticos + 1 pregunta teórica). Las respuestas a los ejercicios y preguntas teóricas propuestas deben ser precisas y ajustadas. Por ejemplo, si la pregunta es "estudio del error en la fórmula de integración del trapecio", no se puede responder incluyendo también las de orden superior.

En el examen se puede utilizar una calculadora no programable que permita hacer operaciones de logaritmos, funciones exponenciales y trigonométricas, raíces, etc.. Con posterioridad a la celebración de las pruebas presenciales se publicarán en el curso virtual las soluciones a los ejercicios prácticos propuestos. El alumno que desee presentar una reclamación sobre la nota otorgada en la prueba presencial, deberá conocer en detalle las soluciones propuestas por el profesor.

### HORARIO DE ATENCIÓN AL ALUMNO

Lunes de 16 a 20 horas.Despacho: 116 Tel.: 91 398 72 57

## HORARIO DE ATENCIÓN AL ESTUDIANTE

Lunes 16h-20h

---

## IGUALDAD DE GÉNERO



En coherencia con el valor asumido de la igualdad de género, todas las denominaciones que en esta Guía hacen referencia a órganos de gobierno unipersonales, de representación, o miembros de la comunidad universitaria y se efectúan en género masculino, cuando no se hayan sustituido por términos genéricos, se entenderán hechas indistintamente en género femenino o masculino, según el sexo del titular que los desempeñe.