

23-24

GRADO EN MATEMÁTICAS  
TERCER CURSO

# GUÍA DE ESTUDIO PÚBLICA



## GEOMETRÍA DIFERENCIAL DE CURVAS Y SUPERFICIES

CÓDIGO 61023067

UNED

**23-24****GEOMETRÍA DIFERENCIAL DE CURVAS Y  
SUPERFICIES****CÓDIGO 61023067**

# ÍNDICE

PRESENTACIÓN Y CONTEXTUALIZACIÓN  
REQUISITOS Y/O RECOMENDACIONES PARA CURSAR LA  
ASIGNATURA  
EQUIPO DOCENTE  
HORARIO DE ATENCIÓN AL ESTUDIANTE  
TUTORIZACIÓN EN CENTROS ASOCIADOS  
COMPETENCIAS QUE ADQUIERE EL ESTUDIANTE  
RESULTADOS DE APRENDIZAJE  
CONTENIDOS  
METODOLOGÍA  
SISTEMA DE EVALUACIÓN  
BIBLIOGRAFÍA BÁSICA  
BIBLIOGRAFÍA COMPLEMENTARIA  
RECURSOS DE APOYO Y WEBGRAFÍA

Nombre de la asignatura	GEOMETRÍA DIFERENCIAL DE CURVAS Y SUPERFICIES
Código	61023067
Curso académico	2023/2024
Departamento	MATEMÁTICAS FUNDAMENTALES
Título en que se imparte	GRADO EN MATEMÁTICAS
Curso	TERCER CURSO
Periodo	SEMESTRE 2
Tipo	OBLIGATORIAS
Nº ETCS	6
Horas	150.0
Idiomas en que se imparte	CASTELLANO

## PRESENTACIÓN Y CONTEXTUALIZACIÓN

La geometría es una de las materias centrales de las matemáticas. Además de ser una de las disciplinas más antiguas, es también una de las que ofrece mayor número de aplicaciones.

Esta asignatura es una introducción a la rama de la geometría que se conoce por **geometría diferencial**. Es la geometría que surge al utilizar los métodos de cálculo diferencial e integral en el estudio de las figuras geométricas. Se estudian las **curvas y superficies** en el espacio euclidiano tridimensional que son los objetos más sencillos dentro de este tipo de geometría.

La geometría diferencial de curvas y superficies es la materia donde se introducen por primera vez las herramientas básicas de geometría diferencial. La geometría diferencial es una de las ramas más activas en investigación y tiene aplicaciones fuera y dentro de las matemáticas. Por ejemplo, fuera de las matemáticas, en física relativista o en diseño asistido por ordenador y dentro de las matemáticas podemos señalar que la conjetura de Poincaré, uno de los problemas más importantes dentro de la topología ha sido demostrada usando técnicas de geometría diferencial.

En la asignatura Geometría Diferencial, optativa de cuarto curso, se profundizará en el estudio de esta rama de la geometría.

## REQUISITOS Y/O RECOMENDACIONES PARA CURSAR LA ASIGNATURA

Esta asignatura es integradora y es capaz de reunir y aplicar métodos de campos distintos de las matemáticas que el alumno debe conocer, al menos básicamente.

Se recomienda haber cursado previamente las siguientes asignaturas del grado:

Lenguaje matemático, conjuntos y números

Geometría básica

Funciones de una variable I y II

Funciones de varias variables I y II

Álgebra lineal I y II

Geometrías lineales  
Introducción a las ecuaciones diferenciales  
Campos y formas  
Topología

## EQUIPO DOCENTE

Nombre y Apellidos  
Correo Electrónico  
Teléfono  
Facultad  
Departamento

CARLOS ESCUDERO LIEBANA  
cescudero@mat.uned.es

Nombre y Apellidos  
Correo Electrónico  
Teléfono  
Facultad  
Departamento

CARLOS SHAHIN SHABAZI ALONSO  
cshahbazi@mat.uned.es

## HORARIO DE ATENCIÓN AL ESTUDIANTE

Se llevará principalmente por la virtualización de la asignatura. El equipo docente y los tutores intercampus (si los hay) atenderán las consultas generales y de contenidos a través de los distintos foros del curso virtual.

Extraordinariamente también se puede utilizar el teléfono: 913987238 o el correo electrónico: cescudero@mat.uned.es. El horario de atención es: martes lectivos de 10:00 a 14:00 horas.

## TUTORIZACIÓN EN CENTROS ASOCIADOS

En el enlace que aparece a continuación se muestran los centros asociados y extensiones en las que se imparten tutorías de la asignatura. Estas pueden ser:

- **Tutorías de centro o presenciales:** se puede asistir físicamente en un aula o despacho del centro asociado.
- **Tutorías campus/intercampus:** se puede acceder vía internet.

Consultar horarios de tutorización de la asignatura 61023067

## COMPETENCIAS QUE ADQUIERE EL ESTUDIANTE

Competencias generales:

- CG1 Iniciativa y motivación
- CG2 Planificación y organización
- CG3 Manejo adecuado del tiempo
- CG4 Análisis y Síntesis
- CG6 Razonamiento crítico
- CG7 Toma de decisiones

- CG8 Seguimiento, monitorización y evaluación del trabajo propio o de otros
- CG9 Motivación por la calidad
- CG10 Comunicación y expresión escrita
- CG13 Comunicación y expresión matemática, científica y tecnológica
- CG14 Competencia en el uso de las TIC
- CG15 Competencia en la búsqueda de información relevante
- CG16 Competencia en la gestión y organización de la información
- CG18 Habilidad para coordinarse con el trabajo de otros
- CG19 Compromiso ético (por ejemplo en la realización de trabajos sin plagios, etc.)

Competencias específicas:

- CED1 Comprensión de los conceptos básicos y familiaridad con los elementos fundamentales para el estudio de las Matemáticas superiores
- CED2 Destreza en el razonamiento cuantitativo, basado en los conocimientos adquiridos
- CEP4 Resolución de problemas
- CEA1 Destreza en el razonamiento y capacidad para utilizar sus distintos tipos, fundamentalmente por deducción, inducción y analogía
- CEA2 Capacidad para tratar problemas matemáticos desde diferentes planteamientos y su formulación correcta en lenguaje matemático, de manera que faciliten su análisis y resolución. Se incluye en esta competencia la representación gráfica y la aproximación geométrica
- CEA3 Habilidad para crear y desarrollar argumentos lógicos, con clara identificación de las hipótesis y las conclusiones
- CEA4 Habilidad para detectar inconsistencias de razonamiento ya sea de forma teórica o práctica mediante la búsqueda de contraejemplos
- CEA6 Habilidad para extraer información cualitativa a partir de información cuantitativa
- CEA7 Habilidad para presentar el razonamiento matemático y sus conclusiones de manera clara y precisa, de forma apropiada a la audiencia a la que se dirige, tanto en la forma oral como escrita
- CE1 Razonamiento crítico, capacidad de evaluar trabajos propios y ajenos

## RESULTADOS DE APRENDIZAJE

Conocimientos:

1. Saber que es una curva o una superficie diferenciable.
2. Conocer los invariantes locales del estudio de curvas y superficies: curvatura, torsión, primera y segunda formas fundamentales, curvatura media y de Gauss.
3. Conocer los teoremas fundamentales y más importantes dentro de la teoría elemental de geometría diferencial de curvas y superficies.

4. Conocer algunos teoremas globales de geometría diferencial.
5. Conocer de modo básico la geometría intrínseca en una superficie, así como los objetos básicos dentro de esa geometría: métrica y geodésicas. Saber que la geometría intrínseca en una superficie puede ser muy diferente a la geometría euclidiana.
6. Conocer el teorema egregio de Gauss y el teorema de Gauss para triángulos geodésicos y la relación entre elementos de geometría intrínseca y curvatura.
7. Conocer el teorema de Gauss-Bonnet y la relación entre la curvatura y la topología.

Destrezas y habilidades:

1. Dotar a un objeto de una estructura de curva o superficie diferenciable y así poder aplicar los métodos del análisis para la resolución de problemas referidos a tal objeto.
2. Definir curvas y superficies por parametrizaciones, atlas y por ecuaciones implícitas.
3. Cálculo de rectas y planos tangentes y normales.
4. Cálculo de los invariantes de curvatura para curvas y superficies.
5. Distinguir gráficamente el signo de la curvatura para una curva plana y el signo de la torsión en una curva espacial.
6. Distinguir los puntos de una superficie que son elípticos, parabólicos e hiperbólicos.
7. Distinguir propiedades e invariantes globales y locales.
8. Medir ángulos y distancias en geometría intrínseca de una superficie.
9. Obtención de geodésicas en ejemplos sencillos.
10. Distinguir gráficamente lo que es una geodésica en una superficie.
11. Relacionar la topología con la curvatura total de una superficie.

Competencias:

1. Abre la posibilidad del estudio de la geometría diferencial más avanzada.
2. Aplicar a problemas reales (ingeniería, diseño, visión por ordenador, teoría de control) herramientas avanzadas de análisis matemático dotando de estructura diferencial (de curva o superficie) a los objetos a estudiar.
3. Abre la posibilidad de entender la física moderna: cosmología, relatividad, mecánica.

## CONTENIDOS

### Curvas en el plano.

1. Curvas en el plano.
2. Recta tangente.
3. Orientación, velocidad, longitud de arco.
4. Sistema de referencia móvil.
5. Curvatura.
6. Fórmulas de Frenet.
7. Interpretación geométrica de la curvatura.
8. Teorema fundamental de curvas planas.

### Curvas en el espacio.

1. Curvas en el espacio.
2. Recta tangente y plano osculador.
3. Orientación, velocidad, longitud de arco.
4. Sistema de referencia móvil.
5. Curvatura y torsión de curvas espaciales.
6. Fórmulas de Frenet.
7. Interpretación geométrica de la torsión.
8. Teorema fundamental de curvas espaciales.

### Superficies.

1. Cartas y superficies en el espacio.
2. Superficies en implícitas.
3. Curvas en una superficie. Plano tangente. Vector normal.
4. Orientabilidad.
5. Aplicaciones entre superficies.
6. Aplicación tangente.

### Geometría intrínseca.

1. Primera forma fundamental.
2. Medida de ángulos, longitudes de curvas y áreas en geometría intrínseca.

3. Geodésicas.
4. Entornos y coordenadas geodésicas.
5. Isometrías.

Teoría clásica de superficies.

1. Operador de Weingarten.
2. Segunda forma fundamental. Secciones normales.
3. Direcciones y curvaturas principales. Líneas de curvatura.
4. Curvatura de Gauss y curvatura media.
5. Direcciones y líneas asintóticas.
6. Algunos teoremas globales.

Geometría intrínseca y curvatura de Gauss.

1. Símbolos de Christoffel.
2. Teorema Egregio de Gauss.
3. Teorema fundamental de superficies.
4. Curvatura geodésica.
5. Fórmula de Gauss-Bonnet y aplicaciones.
6. El teorema de Gauss-Bonnet global.

## METODOLOGÍA

El sistema fundamental de aprendizaje es el estudio del texto básico:

- Antonio F. Costa, Manuel Gamboa y Ana M. Porto, Geometría Diferencial de Curvas y Superficies, Sanz y Torres, Madrid 2018.

A la vez que se estudian los capítulos se deben realizar los ejercicios propuestos.

Se debe completar su estudio con los vídeos en el curso virtual de la asignatura.

## SISTEMA DE EVALUACIÓN

### TIPO DE PRUEBA PRESENCIAL

Tipo de examen	Examen de desarrollo
Preguntas desarrollo	3
Duración del examen	120 (minutos)
Material permitido en el examen	
Ningún tipo de material	
Criterios de evaluación	

Corrección de los argumentos matemáticos.

**Redacción y presentación.**

**Se penalizarán los errores matemáticos graves.**

% del examen sobre la nota final	90
Nota del examen para aprobar sin PEC	5
Nota máxima que aporta el examen a la calificación final sin PEC	10
Nota mínima en el examen para sumar la PEC	4

Comentarios y observaciones

Aunque aparece que el valor de la prueba presencial sobre la nota final es el 90%, en realidad puede llegar a ser el 100% si no se realiza la PEC. Ver final: ¿Cómo se obtiene la nota final?

**PRUEBAS DE EVALUACIÓN CONTINUA (PEC)**

¿Hay PEC? Si

Descripción

La prueba consistirá en la resolución de uno o dos ejercicios prácticos y será depositada por el alumno en la virtualización.

**La fecha de realización se anunciará en el curso virtual de la asignatura.**

Criterios de evaluación

Se valorará principalmente la corrección matemática.

**También se valorará la redacción y presentación.**

**Todas las respuestas deben ir justificadas.**

Ponderación de la PEC en la nota final Hasta el 10%, ver apartado final ¿Cómo se obtiene la nota final?

Fecha aproximada de entrega

Comentarios y observaciones

**OTRAS ACTIVIDADES EVALUABLES**

¿Hay otra/s actividad/es evaluable/s? No

Descripción

Criterios de evaluación

Ponderación en la nota final 0

Fecha aproximada de entrega

Comentarios y observaciones

**¿CÓMO SE OBTIENE LA NOTA FINAL?**

1. Si el estudiante realiza la PEC:

**a. Si obtiene en la Prueba Presencial o en la PEC una calificación inferior a 4:**

**Nota final = Nota Prueba Presencial**

**b. Si obtiene en la Prueba Presencial y en la PEC una calificación superior o igual a 4:**

**Nota final =  $\min(\text{Nota Prueba Presencial} + \text{Nota PEC} \times 0,1, 10)$**

**2. Si el estudiante no realiza la PEC, o si obtiene una nota inferior a 4 en la PEC:**

**Nota final = Nota Prueba Presencial**

## BIBLIOGRAFÍA BÁSICA

ISBN(13):9788416466818

Título:GEOMETRÍA DIFERENCIAL DE CURVAS Y SUPERFICIES (2018)

Autor/es:Gamboa, José Manuel ; Costa, Antonio F. ; Porto, Ana M. ;

Editorial:SANZ Y TORRES

Es conveniente adquirir la última impresión-edición del texto (hay una del año 2020), pues todos los años se corrigen las erratas detectadas.

## BIBLIOGRAFÍA COMPLEMENTARIA

ISBN(13):9788496094482

Título:NOTAS DE GEOMETRÍA DIFERENCIAL DE CURVAS Y SUPERFICIES: TEORÍA Y EJERCICIOS (3ª)

Autor/es:Gamboa Mutuberría, José Manuel ; Porto Ferreira Da Silva, Ana Mª ; Costa González, Antonio Félix ;

Editorial:SANZ Y TORRES

- *Otros libros de consulta:*

- Amores Lázaro, A.M., Curso básico de curvas y superficies, Sanz y Torres, Madrid 2001.
- Cordero, L.A., Fernández, M., Gray, A., Geometría diferencial de curvas y superficies con Mathematica, Addison-Wesley Iberoamericana, S. A., Wilmintong, Delaware, E. U. A., 1995.
- do Carmo, M. P., Geometría diferencial de curvas y superficies, Alianza Universidad Textos, Madrid 1990.
- Hsiung, C-C., A first course in Differential Geometry, International Press, Cambridge MA, 1997.
- Millman, R. S. and Parker, G. D., Elements of Differential Geometry, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ., 1977.
- Montiel S. y Ros A., Curvas y superficies, Proyecto Sur de Ediciones, S. L., Granada 1997.

- O'Neill, B., Elementos de geometría diferencial, Noriega-Limusa, Mexico 1990.
  - Pogorelov, A. V., Geometría Diferencial, Mir, Moscú 1994.
  - Struik, D.J., Lectures on classical differential geometry, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1961.
  - Thorpe, J.A., Elementary topics in differential geometry, U.T.M., Springer-Verlag, New York 1979.
  - Ventura Araújo, P., Geometría Diferencial, IMPA, Rio de Janeiro 1998.
- *Libros de ejercicios:*
- Fedenko, A. S., Problemas de geometría diferencial, Editorial Mir, Moscú 1991.
  - Lipschutz, M., Geometría Diferencial, Serie Schaum, MacGraw-Hill, México 1971. Tiene además una buen resumen teórico en cada tema.
  - López de la Rica, A. y de la Villa Cuenca, A., Geometría Diferencial, Universidad Pontificia de Comillas, Madrid, 1997.

## RECURSOS DE APOYO Y WEBGRAFÍA

En el curso virtual encontrará diversos materiales de apoyo a la asignatura.

En la dirección [www.uv.es/montesin/](http://www.uv.es/montesin/) pueden descargar el programa Superficies que puede ser de ayuda en algunos puntos de la asignatura.

En la siguiente dirección:

<https://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Curves/Curves.html>

pueden encontrar un catálogo de curvas famosas e históricas.

---

## IGUALDAD DE GÉNERO

En coherencia con el valor asumido de la igualdad de género, todas las denominaciones que en esta Guía hacen referencia a órganos de gobierno unipersonales, de representación, o miembros de la comunidad universitaria y se efectúan en género masculino, cuando no se hayan sustituido por términos genéricos, se entenderán hechas indistintamente en género femenino o masculino, según el sexo del titular que los desempeñe.