Índice general

1 Álgebra

EJERCICIO 1 Un número natural n se dice que es perfecto cuando la suma de sus divisores propios es n.

(a) Demuestre que, si $2^k - 1$ es primo, entonces $n = 2^{k-1}(2^k - 1)$ es perfecto.

(b) Demuestre que si n es perfecto y par, entonces $\exists k \in \mathbb{N}$: $n = 2^{k-1}(2^k - 1)$ con $2^k - 1$ primo.

SOLUCIÓN:

(a) Los divisores propios de un número son todos los divisores de dicho número excepto él mismo. Dado que $p = 2^k - 1$ es primo, sus únicos divisores son 1 y p y los de 2^{k-1} son $1, 2, \cdots, 2^{k-1}$, por lo tanto, los divisores propios de n son $1, 2, \cdots, 2^{k-1}, p, 2p, \cdots, 2^{k-2}p$. En consecuencia,

$$1 + 2 + \cdots + 2^{k-1} + p + 2p + \cdots + 2^{k-2}p = 2^k - 1 + p(2^{k-1} - 1) = p2^{k-1} = n.$$

(b) Dado que n es par, se puede expresar como $n = 2^{k-1}a$, siendo a impar y $k > 1$. Sean $s(a)$ y $s(n)$ la suma de los divisores de a y de n, respectivamente; por ser n perfecto

$$s(n) - n = n \Rightarrow s(n) = 2n = 2^k a.$$

Además, por definición de n, se tiene

$$s(n) = \left(1 + 2 + \cdots + 2^{k-1}\right) s(a) = \left(2^k - 1\right) s(a).$$

Como a es impar y $2^k - 1$ es impar, se tiene que $s(a)$ debe ser múltiplo de 2^k, es decir

$$s(a) = 2^k c \Rightarrow 2^k a = \left(2^k - 1\right) 2^k c \Rightarrow a = (2^k - 1)c \Rightarrow a + c = 2^k c = s(a).$$

Puesto que $c|a$, si $c \neq 1$, entonces $s(a) \geq 1 + c + a$, con contradice que $s(a) = a + c$, por tanto $c = 1$ y finalmente a es primo con $a = 2^k - 1$.

EJERCICIO 2 Demostrar por inducción que $n\left(n+\frac{1}{2}\right)(n+1)$ es múltiplo de 3 ($n \in \mathbb{N}$).

SOLUCIÓN:

i) Para $n = 1$, se comprueba $1\left(1+\frac{1}{2}\right)(1+1) = 3$.

ii) Se supone cierto para $n = k$, es decir, $k\left(k+\frac{1}{2}\right)(k+1) = k^3 + \frac{3k^2}{2} + \frac{k}{2} = \dot{3}$.

iii) Para $n = k+2$, usamos la hipótesis de inducción

$$(k+1)\left(k+\frac{3}{2}\right)(k+2) =$$
$$= \left(k^3 + \frac{3k^2}{2} + \frac{k}{2}\right) + \left(3k^2+6k+3\right) = \dot{3} + 3(k+1)^2 = \dot{3}.$$

EJERCICIO 3 En una división se conoce el dividendo 258728 y los restos sucesivos que se obtuvieron al ir efectuando la división, que son 379, 480, 392. Hallar el divisor y cociente. ¿Existe más de una división?

SOLUCIÓN:

Sea d el divisor y x el cociente. De este modo, x se puede expresar como $x = 100a + 10b + c$. Con los datos del enunciado,

$$\begin{cases} 258728 = 100ad + 37928 \Rightarrow 2208 = ad, \\ 37928 = 10bd + 4808 \Rightarrow 3312 = bd, \\ 4808 = cd + 392 \Rightarrow 4416 = cd. \end{cases}$$

De las tres ecuaciones anteriores se sigue que $c = 2a$, $b = \frac{3}{2}a$, lo que implica $x = 117a$ y que los valores de a deben ser múltiplos de 2. Además, b debe ser mayor que cero y menor que 10; por consiguiente, los posibles valores de a son 2 ó 4. Para cada caso

$$\begin{cases} a = 2 \Rightarrow x = 234, \quad d = 1104, \\ a = 4 \Rightarrow x = 468, \quad d = 552. \end{cases}$$

EJERCICIO 4 Dada la función:

$$F_n(x) = \begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+x & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1+x \end{vmatrix},$$

se pide:

(a) Demostrar que $F_n(x) = x^n + nx^{n-1}$.

(b) Demostrar que $F_n'(x) = nF_{n-1}(x)$.

SOLUCIÓN:

(a) Sumando todas las columnas en la primera,

$$F_n(x) = \begin{vmatrix} n+x & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ n+x & 1+x & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 1 \\ n+x & 1 & 1 & \cdots & 1+x \end{vmatrix} = (n+x) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+x & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1+x \end{vmatrix}.$$

Restando a cada fila la primera,

$$F_n(x) = (n+x) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & x & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x \end{vmatrix} = (n+x)x^{n-1} = x^n + nx^{n-1}.$$

(b) Derivando,

$$F_n'(x) = n\left(x^{n-1} + (n-1)x^{n-2}\right) = nF_{n-1}(x).$$

EJERCICIO 5 En el conjunto de los números naturales, se define la aplicación $d : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$, dada por $d(x, y) =$ "número de divisores de x que no son divisores de y más número de divisores de y que no son divisores de x". Demostrar:

(a) La aplicación define una distancia en $\mathbb{N}$.

(b) Hallar las condiciones que deben cumplir x e y para que $d(x, y) = 1$.

(c) Hallar los valores de x para los que $d(x, 3) = 2$.

SOLUCIÓN:

(a) Comprobamos que se cumplen las condiciones de que definen una distancia.

i) Por definición del problema $d(x, y) \geq 0$. Si $d(x, y) = 0$, todos los divisores de x están en y y viceversa; por tanto, x e y tienen los mismos divisores. Así, $x = y$.

ii) Si $d(x, y) =$ "número de divisores de x que no son divisores de y más número de divisores de y que no son divisores de x"se sigue que la propiedad es igual a $d(y, x) =$ "número de divisores de y que no son divisores de x más número de divisores de x que no son divisores de y".

iii) Es la conocida propiedad triangular: $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$. Sea p divisor de x que no divide a y, si p divide a z como p no divide a y se tiene que $p \in d(z,y)$: Si p no divide a z como p divide a x entonces $p \in d(x,z)$. En el caso de que p fuese divisor de y y no de x, el razonamiento sería idéntico al realizado.

(b) Si $d(x,y) = 1$, hay un único divisor que cumple la propiedad y los divisores del menor deben estar contenidos en el mayor. Por ello, si p es primo, $x = p^n$ e $y = p^{n+1}$.

(c) Si $d(x,3) = 2$ se dan las siguientes situaciones:

i) $x = p$, con p primo distinto de 3.

ii) $x = 3p$.

iii) $x = 3^3$.

EJERCICIO 6 Hallar la última cifra en la que acaba 4^{5932}.

SOLUCIÓN:

Calculamos la última cifra de las primeras potencias de 4:

$$4^0 \equiv 1; \quad 4^1 \equiv 4; \quad 4^2 \equiv 6; \quad 4^3 \equiv 4; \quad 4^4 \equiv 6; \quad 4^5 \equiv 4; \quad 4^6 \equiv 6; \quad 4^7 \equiv 4;$$

$$4^8 \equiv 6; \quad 4^9 \equiv 4$$

En consecuencia, como 5932 es par la última cifra acaba en 6.

EJERCICIO 7 Hallar todas las soluciones de la ecuación:

$$z^3 - (8+i)\,z^2 + (24+4i)\,z - (24-6i) = 0,$$

teniendo en cuenta que el producto de dos de ellas es $15 + 9i$.

SOLUCIÓN:

Sean z_1, z_2 y z_3 las soluciones de la ecuación del enunciado. Las fórmulas de Cardano nos proporcionan

$$z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 = 24 - 6i, \quad z_1 + z_2 + z_3 = 8 + i$$

Teniendo en cuenta que $z_2 \cdot z_3 = 15 + 9i$, será

$$z_1 = \frac{24-6i}{15+9i} = 1 - i \Rightarrow z_2 + z_3 = 7 + 2i.$$

De acuerdo con las fórmulas de Cardano, z_2 y z_3 deben ser las soluciones de la ecuación

$$z^2 - (7+2i)\,z + 15 + 9i = 0 \Rightarrow z_2 = 3 + 3i, \quad z_3 = 4 - i.$$

EJERCICIO 8 Dada la matriz:

$$A_n(a) = \begin{pmatrix} 1+a & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a & 1+a & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a & 1+a & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & 1+a \end{pmatrix},$$

se pide:

(a) Calcular $det(A_1(a)), det(A_2(a)), det(A_3(a))$.

(b) Obtener la relación lineal entre $det(A_n(a)), det(A_{n+1}(a))$ y $det(A_{n+2}(a))$.

(c) Calcular $det(A_n(a))$.

(d) Estudiar el siguiente sistema según los valores de a, n y b

$$A_n(a) \cdot X = (0, 0, \cdots, b)^T .$$

SOLUCIÓN: ▪▪▪

(a) Calculando directamente,

$$det(A_1(a)) = 1 + a, \quad det(A_2(a)) = 1 + a + a^2, \quad det(A_3(a)) = 1 + a + a^2 + a^3.$$

(b) Desarrollando por los elementos de la primera columna se tiene:

$$det\,(A_n(a)) = \begin{vmatrix} 1+a & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a & 1+a & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a & 1+a & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & 1+a \end{vmatrix} = det\,(A_{n-1}(a)) +$$

$$+ a\,[det\,(A_{n-1}(a)) - det\,(A_{n-2}(a))] = (1 + a)\,det\,(A_{n-1}(a)) - a \cdot det\,(A_{n-2}(a))\,.$$

(c) Teniendo en cuenta los anteriores apartados, la expresión del determinante es

$$det(A_n(a)) = 1 + a + a^2 + \cdots + a^n,$$

que pasamos a demostrar por inducción. En los apartados anteriores se ha comprobado que la expresión es cierta para $n = 1, 2$ y 3. Se se supone cierta para $n - 1$,

$$det(A_n(a)) = det(A_{n-1}(a)) + a\,[det\,(A_{n-1}(a)) - det\,(A_{n-2}(a))] =$$

$$= 1 + a + a^2 + \cdots + a^{n-1} + a \cdot a^{n-1} = 1 + a + a^2 + \cdots + a^n.$$

(d) Si n es par, $det(A_n(a)) \neq 0$ para cualquier valor de a, por tanto el sistema es compatible y determinado. En el caso de $b = 0$, la única solución es la trivial. Si n es impar y $a = -1$ entonces $det(A_n(a)) = 0$, si $b = 0$ el sistema es compatible e indeterminado, si $b \neq 0$ el sistema es incompatible. Si n es impar y $a \neq -1$ entonces $det(A_n(a)) \neq 0$ y el sistema es compatible y determinado para todo b.

EJERCICIO 9 Los afijos $z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6$, son los vértices consecutivos de un hexágono regular. Sabiendo que $z_1 = 0$ y $z_4 = 4 + 6i$, hallar z_2, z_3, z_5, z_6.

SOLUCIÓN:

El centro del hexágono regular es el punto medio de los vértices z_1 y z_4, es decir, $C = 2 + 3i$. Para obtener los vértices z_2 y z_3 realizamos giros con centro en C del vértice z_1 de $\frac{\pi}{3}$ y $\frac{2\pi}{3}$, respectivamente.

$$z_2 = 2+3i+(-2-3i)\, e^{i\frac{\pi}{3}} = 2+3i+(-2-3i)\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \frac{2+3\sqrt{3}}{2}+\frac{3-2\sqrt{3}}{2}i,$$

$$z_3 = 2+3i+(-2-3i)\, e^{i\frac{2\pi}{3}} = \frac{6+3\sqrt{3}}{2}+\frac{9-2\sqrt{3}}{2}i.$$

Los vértices z_5 y z_6 se pueden obtener girando el vértice z_4, con centro de giro en C y ángulos $\frac{\pi}{3}$ y $\frac{2\pi}{3}$, o teniendo en cuenta que C es el punto medio de z_5 y z_2 y de z_6 y z_3

$$2+3i = \frac{z_2+z_5}{2} \Rightarrow z_5 = \frac{6-3\sqrt{3}}{2}+\frac{9+2\sqrt{3}}{2}i,$$

$$2+3i = \frac{z_3+z_6}{2} \Rightarrow z_6 = \frac{2-3\sqrt{3}}{2}+\frac{3+2\sqrt{3}}{2}i.$$

EJERCICIO 10 Hallar el número (o los números) de la forma $N = 2^a \cdot 3^b$, sabiendo que la suma de todos sus divisores es 363.

SOLUCIÓN:

Puesto que $N = 2^a \cdot 3^b$, la suma de todos los divisores de dicho número viene dada por la siguiente expresión

$$363 = \left(2^{a+1}-1\right)\left(\frac{3^{b+1}-1}{2}\right) = 3 \cdot 11^2.$$

El factor $\left(2^{a+1}-1\right)$ es impar y múltiplo de 3. Ya que el factor $\frac{3^{b+1}-1}{2}$ no puede serlo, se tienen los siguientes casos

Si $a = 1 \Rightarrow 2^2 - 1 = 3, \quad 3^{b+1} - 1 = 242 \Rightarrow b = 4 \Rightarrow N = 2 \cdot 3^2 = 162.$

Si $a = 2 \Rightarrow 2^3 - 1 = 7$, que no puede ser puesto que 7 no es divisor de 363.

Si $a = 3 \Rightarrow 2^4 - 1 = 15 = 3 \cdot 5$, que no puede ser ya que 5 no es divisor de 363.

Si $a = 4 \Rightarrow 2^5 - 1 = 33$. Por lo tanto, $3^{b+1} - 1 = 22 \Rightarrow 3^{b+1} = 23$, que no es posible. En consecuencia, el número solicitado es

$$N = 162.$$

EJERCICIO 11 En una batalla en la que participaron entre 8000 y 10000 soldados, resultaron muertos $\frac{23}{165}$ y heridos $\frac{16}{65}$ del total. Hallar cuántos soldados resultaron ilesos.

SOLUCIÓN:

Sea N el número de soldados que participaron, de manera que N debe cumplir que $8000 < N < 10000$ y, además, como el número de muertos y heridos deben ser números naturales, N deber múltiplo de 65 y 165. Con todo, debe ser múltiplo del mínimo común múltiplo de dichos números, $mcm\,(165, 65) = 2145$. Es decir, N debe ser un múltiplo de 2145 que este comprendido entre 8000 y 10000. En consecuencia, $N = 8580$. Los muertos son 1196 y los heridos 2112, con lo que los ilesos son 5272.

EJERCICIO 12 Estando en EEUU el señor Pérez cambió un cheque de viaje. El cajero al pagarle confundió el número de dólares con los centavos y viceversa. El señor Pérez gastó 68 centavos en sellos y comprobó que el dinero que le quedaba era el doble del importe del cheque de viaje que había cambiado. ¿Qué valor mínimo tenía el cheque de viaje?

SOLUCIÓN:

Sea x el número de dólares e y el número de centavos del cheque de viaje. Al realizar el cambio y pagar, le quedan $100y + x - 68$ centavos. De acuerdo con el enunciado, se trata de hallar los números naturales x e y que cumplan

$$100y + x - 68 = 200x + 2y \Rightarrow 98y - 199x = 68.$$

Aplicando la identidad de Bezout[1], se tiene que

$$-199 \cdot (-33) + 98 \cdot (-67) = 1 \Rightarrow 68 = -199 \cdot (-33 \cdot 68) + 98 \cdot (-67 \cdot 68)\,.$$

Por ello,

$$\begin{cases} x = -33 \cdot 68 + 98 \cdot k, \\ y = -67 \cdot 68 + 199 \cdot k. \end{cases}$$

Resolviendo, el mínimo valor del cheque de viaje es 10 dólares y 21 centavos.

[1] Véase la identidad de Bezout 5.4 del Capítulo 5.

EJERCICIO 13 Resolver la ecuación:

$$\begin{vmatrix} x^3 & 3x^2 & 3x & 1 \\ x^2 & x^2+2x & 2x+1 & 1 \\ x & 2x+1 & x+2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

SOLUCIÓN:

Si restamos la última fila a cada una de las restantes, sacamos el término común $x-1$ de cada una de las columnas resultantes y desarrollamos por la última columna, obtenemos

$$\begin{vmatrix} x^3 & 3x^2 & 3x & 1 \\ x^2 & x^2+2x & 2x+1 & 1 \\ x & 2x+1 & x+2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x^3-1 & 3(x^2-1) & 3(x-1) & 0 \\ x^2-1 & x^2+2x-3 & 2x-2 & 0 \\ x-1 & 2x-2 & x-1 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$
$$= (x-1)^3 \begin{vmatrix} x^2+x+1 & 3(x+1) & 3 \\ x+1 & x+3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Restando a la primera columna la última, a la segunda columna el doble de la última, sacando factor común $x-1$ de la primera y segunda columna y desarrollando por la última fila, se tiene:

$$(x-1)^3 \begin{vmatrix} x^2+x+1 & 3(x+1) & 3 \\ x+1 & x+3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (x-1)^5 \begin{vmatrix} x+2 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$
$$= (x-1)^5 \begin{vmatrix} x+2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (x-1)^6 = 0 \Rightarrow x = 1.$$

EJERCICIO 14 Calcula el límite en el infinito de la sucesión A_n, siendo A_n el siguiente determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ x & 1 & -\frac{1}{3} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ x^2 & 0 & 1 & -\frac{1}{4} & 0 & \cdots & 0 \\ x^3 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{5} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x^{n-2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -\frac{1}{n} \\ x^{n-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}.$$

SOLUCIÓN:

Desarrollamos por los elementos de la primera fila

$$A_n = \begin{vmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ x & 1 & -\frac{1}{3} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ x^2 & 0 & 1 & -\frac{1}{4} & 0 & \cdots & 0 \\ x^3 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{5} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x^{n-2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -\frac{1}{n} \\ x^{n-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 + \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x & -\frac{1}{3} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ x^2 & 1 & -\frac{1}{4} & 0 & \cdots & 0 \\ x^3 & 0 & 1 & -\frac{1}{5} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x^{n-2} & 0 & 0 & 0 & \cdots & -\frac{1}{n} \\ x^{n-1} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}.$$

Sacando el factor x de la primera columna y, volviendo a desarrollar el determinante resultante por la primera fila, se obtiene

$$A_n = 1 + \frac{1}{2}x \left[1 + \frac{1}{3}x \begin{vmatrix} 1 & -\frac{1}{4} & 0 & \cdots & 0 \\ x & 1 & -\frac{1}{5} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x^{n-4} & 0 & 0 & \cdots & -\frac{1}{n} \\ x^{n-3} & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} \right].$$

Por recurrencia,

$$A_n = 1 + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \frac{x^3}{4!} + \cdots + \frac{x^{n-1}}{n!}.$$

Teniendo en cuenta la expresión de e^x,

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \begin{cases} \dfrac{e^x - 1}{x}, & \text{si} \quad x \neq 0, \\ 1, & \text{si} \quad x = 0. \end{cases}$$

EJERCICIO 15 Hallar el número n tal que el número $25 \cdot 18^n$ tiene 348 divisores más que el número 72.

SOLUCIÓN:

Descomponiendo el número en factores primos, $N = 25 \cdot 18^n = 2^n \cdot 3^{2n} \cdot 5^2$, vemos que el número de divisores es $(n+1)(2n+1) \cdot 3$. El número de divisores de 72 es 12. Por tanto, de acuerdo con el enunciado

$$3(n+1)(2n+1) = 360 \Rightarrow 2n^2 + 3n - 119 = 0 \Rightarrow n = 7.$$

EJERCICIO 16 El precio de la entrada a un cine es de 640 unidades monetarias (u.m.)

para una persona adulta y 330 u.m. para una persona menor de edad. Si una persona compró entradas por valor de 7140 u.m., ¿cuántas entradas de cada tipo compró, sabiendo que compró menos entradas de persona adulta que de menor de edad?

SOLUCIÓN: ■■■

Sean x e y los números de entradas de adultos y de menor de edad, respectivamente. De acuerdo con el enunciado, se tiene la siguiente ecuación y sus restricciones

$$\begin{cases} 640x + 330y = 7140, \\ x, y \in \mathbb{N}, \\ x, y \geq 0, \\ y > x. \end{cases}$$

Sustituyendo $y = x$ en la ecuación $640x+330y = 7140$, se tiene que la parte entera de x es 6, que es el máximo valor natural que puede tomar x. Para dicho valor es $y = 10$. Para cualquier otro valor natural, con $x < 6$, el valor de y que verifica la ecuación no es un número natural. En consecuencia, la solución pedida es: $x = 6$ e $y = 10$.

EJERCICIO 17 Demostrar que si n es un número entero impar, el resto al dividir n^2 entre 8 es 1.

SOLUCIÓN: ■■■

Al ser n impar se escribe $n = 2k + 1$, con $k \in \mathbb{Z}$. Por ello,

$$n^2 = 4k\,(k + 1) + 1.$$

Si k es par entonces $4k = \dot{8}$, por lo que $n^2 = \dot{8} + 1$ y queda demostrado.
Si k es impar entonces $k + 1$ es par y $4\,(k + 1) = \dot{8}$, en consecuencia $n^2 = \dot{8} + 1$ y queda demostrado.

EJERCICIO 18 Hallar todos los números enteros b y c para que la ecuación $x^2+bx+c = 0$ tenga dos soluciones diferentes y reales, α y β, tales que $\alpha^2 + \beta^2 = 5$.

SOLUCIÓN: ■■■

Por las fórmulas de Cardano,

$$b = -\,(\alpha + \beta) \Rightarrow b^2 = \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha \cdot \beta$$

y $c = \alpha \cdot \beta$. Por tanto, $b^2 = 5 + 2c$. Además, como las soluciones deben ser reales y distintas, se debe cumplir

$$b^2 > 4c \Rightarrow 5 + 2c > 4c \Rightarrow c < \frac{5}{2}, \quad y \quad 2c + 5 > 0 \Rightarrow -\frac{5}{2} < c < \frac{5}{2}.$$

Finalemente, $-\dfrac{5}{2} < c < \dfrac{5}{2}$ y $b = \pm\sqrt{5 + 2c}$.

EJERCICIO 19 Sea $p \in \mathbb{R}$, si las raíces de $x^3 + 2px^2 - px + 10 = 0$ están en progresión aritmética, calcula dichas raíces y p.

SOLUCIÓN:

Sean las raíces $a - d$, a y $a + d$, de acuerdo con las fórmulas de Cardano, se tiene:

$$\left\{\begin{array}{l} -2p = a - d + a + a + d = 3a, \\ -p = (a-d)(a+d) + a(a-d) + a(a+d), \\ -10 = a\left(a^2 - d^2\right), \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} -p = \dfrac{3a}{2}, \\ -p = 3a^2 - d^2, \\ d^2 = \dfrac{10}{a} + a^2. \end{array}\right.$$

Sustituyendo d^2 en la segunda ecuación e igualando la primera y la segunda, se tiene

$$4a^3 - 3a^2 - 20 = 0,$$

cuya solución real es $a = 2$. Con ello, las raíces son $-1, 2$ y 5 y p, -3.

EJERCICIO 20 Dada la ecuación $x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 12x + k = 0$, con $k \in \mathbb{R}$, se pide:

(a) Discutir las soluciones en función de k.

(b) Resolver la ecuación para $k = -27$.

SOLUCIÓN:

(a) Haciendo el cambio $x = y - 1$, con el objetivo de eliminar el término en x^3, se tiene:

$$(y-1)^4 + 4(y-1)^3 - 2(y-1)^2 - 12(y-1) + k = y^4 - 8y^2 + 7 + k = 0,$$

que es una ecuación bicuadrada y, por tanto, $y^2 = 4 \pm \sqrt{9-k}$. Dependiendo de los valores de k se pueden obtener las siguientes soluciones:

- Si $k > 9$, entonces $9 - k < 0$ y las cuatro raíces son complejas.
- Si $k = 9$, entonces $y = 2$ es doble e $y = -2$ también doble. Las soluciones pedidas son $x = \pm 1$ dobles.
- Si $-7 < k < 9$, entonces $0 < \sqrt{9-k} < 4$, en consecuencia, las cuatro soluciones son reales y distintas.
- Si $k = -7$, entonces $\sqrt{9-k} = 4$ y las soluciones son: $x = \pm\sqrt{8} - 1$ y $x = -1$ dobles.
- si $k < -7$, entonces existen dos soluciones reales y distintas y dos soluciones complejas.

(b) Si $k = -27$, entonces, $y^2 = 4 \pm 6 \Rightarrow y = \pm\sqrt{10}, y = \pm\sqrt{2}i$. Finalmente, las soluciones son

$$x = -1 \pm \sqrt{10}, \quad x = -1 \pm \sqrt{2}i.$$

EJERCICIO 21 Consideramos los polinomios $P(x) = x^3 + Ax^2 + Bx + C$ y $Q(x) = 3x^2 + 2Ax + B$ (con A, B, C reales). Si a, b, c son las raíces de $P(x)$ y las de $Q(x)$ son $\frac{a+b}{2}$ y $\frac{b+c}{2}$, determinar todos los posibles polinomios P y Q.

SOLUCIÓN:

En el polinomio $P(x)$, por las fórmulas de Cardano, será $-A = a+b+c$, y $Q(x)$, $-\frac{2A}{3} = \frac{a+2b+c}{2}$. De estas dos ecuaciones se tiene que $b = \frac{a+c}{2}$. Reescribimos las raíces de $Q(x)$ como

$$\frac{3a+c}{4}, \quad \frac{a+3c}{4}.$$

Aplicando las fórmulas de Cardano a $P(x)$, se llega a $B = ab + ac + bc$ y de la misma manera para $Q(x)$, $\frac{B}{3} = \left(\frac{3a+c}{4}\right)\left(\frac{a+3c}{4}\right)$. De estas dos igualdades y teniendo en cuenta el valor encontrado de b,

$$\left(a\frac{a+c}{2} + ac + \frac{a+c}{2}c\right) = 3\left(\frac{3a+c}{4}\right)\left(\frac{a+3c}{4}\right) \Rightarrow a = c.$$

En consecuencia, las raíces de $P(x)$, son $a = b = c$ y, así,

$$P(x) = x^3 - 3ax^2 + 3a^2x + a^3; \quad Q(x) = 3x^2 - 6ax + 3a^2.$$

EJERCICIO 22 Sea $z = e^{\frac{2\pi i}{7}}$ una raíz séptima de la unidad. Calcular

$$1 + z + z^4 + z^9 + z^{16} + z^{25} + z^{36}.$$

SOLUCIÓN:

Al ser z la raíz séptima de la unidad se tiene

$$z^7 = 1, z^9 = z^2;, z^{16} = z^2, z^{25} = z^4 \text{ y } z^{36} = z.$$

Entonces,

$$w = 1 + z + z^4 + z^9 + z^{16} + z^{25} + z^{36} = 1 + 2\left(z + z^2 + z^4\right).$$

Se sabe que $1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 + z^6 = 0$ y además $z^5 = \overline{z^2}$, $z^6 = \overline{z}$ y $z^3 = \overline{z^4}$. Sea $w_1 = z + z^2 + z^4 = \mathrm{Re}(w_1) + i\mathrm{Im}(w_1)$, calculando, por una parte,

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Re}\left(1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 + z^6\right) = 0\\
&\Rightarrow 1 + \mathrm{Re}(z) + \mathrm{Re}(z^2) + \mathrm{Re}(z^4) + \mathrm{Re}(z^4) + \mathrm{Re}(z^2) + \mathrm{Re}(z) = 0\\
&\Rightarrow 1 + 2\mathrm{Re}(w_1) = 0 \Rightarrow \mathrm{Re}(w_1) = -\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Por otra parte,

$$\left\|z+z^2+z^4\right\| = \sqrt{(z+z^2+z^4)\,\overline{(z+z^2+z^4)}} = \sqrt{(z+z^2+z^4)\,(z^6+z^5+z^3)}$$
$$= \sqrt{3+z+z^2+z^3+z^4+z^5+z^6} = \sqrt{2}.$$

Dado que $\|w_1\|^2 = \mathrm{Re}(w_1)^2 + \mathrm{Im}(w_1)^2$, será

$$2 = \frac{1}{4} + \mathrm{Im}(w_1)^2 \Rightarrow \mathrm{Im}(w_1) = \pm\frac{\sqrt{7}}{2}.$$

La solución no puede ser negativa puesto que

$$\mathrm{Im}(w_1) = 0 + \mathrm{Im}(z) + \mathrm{Im}(z^2) + \mathrm{Im}(z^4) = 2\left(\sin(\frac{2\pi}{7}) + \sin(\frac{4\pi}{7}) - \sin(\frac{\pi}{7})\right) > 0.$$

De esta manera,

$$w = 1 + 2\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{7}}{2}\right) = i\sqrt{7}.$$

EJERCICIO 23 Dada la matriz

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & a & 2 \end{pmatrix},$$

Estudiar para qué valores de a la matriz es diagonalizable en $\mathbb{R}$.

SOLUCIÓN:

Calculamos los autovalores de la matriz como

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & a & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda = 0; \quad \lambda = 1 \pm \sqrt{1+a}.$$

Puesto que A debe ser diagonalizable en $\mathbb{R}$, tendremos $a \geq -1$. Si $a \neq -1$ y $a \neq 0$, los tres autovectores son distintos y, por tanto, la matriz es diagonalizable.
Si $a = -1$, los autovalores son 0 y 1 (doble). Se calcula la dimensión del subespacio vectorial asociado al autovalor 1. Puesto que el rango de la matriz

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

es dos, existe un grado de libertad y, por tanto, la dimensión del subespacio vectorial asociado a dicho autovalor es uno. Por ser distintas la multiplicidad algebraica y geométrica, la matriz no es diagonalizable.
Si $a = 0$, los autovectores son 2 y 0 (doble). Se calcula la dimensión del subespacio

vectorial asociado al autovalor 0. El rango de la matriz

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

es dos, se tiene que existe un grado de libertad y por el mismo motivo que en el caso anterior, la matriz no es diagonalizable.

EJERCICIO 24 Determinar las fracciones irreducibles $\frac{a}{c}$ y $\frac{b}{d}$, sabiendo que $\frac{a}{c} - \frac{b}{d} = \frac{5}{6}$, el máximo común divisor de a y b es $a - b$ y el mínimo común múltiplo de a y b es 1050.

SOLUCIÓN:

Descomponiendo en factores primos el número 1050, se tiene $1050 = 2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7$. Sean $a = 75$ y $b = 70$, que cumplen que $MCD(75, 70) = 5 = 75 - 70$. A partir del enunciado del problema,

$$\frac{a}{c} - \frac{b}{d} = \frac{5}{6} \Rightarrow \frac{15}{c} - \frac{14}{d} = \frac{1}{6}.$$

Además, las fracciones $\frac{a}{c}$ y $\frac{b}{d}$ deben ser irreducibles. Sean $c = 2r$ y $d = 3s$, de modo que

$$\frac{15}{2r} - \frac{14}{3s} = \frac{1}{6} \Rightarrow \frac{45s}{28+s} = r.$$

Tomando $s = 17$, se tiene que $r = 17$ y las fracciones pedidas son $\dfrac{75}{34}$ y $\dfrac{70}{51}$.

EJERCICIO 25 Demostrar que $x^{2n} - y^{2n}$ es divisible por $x - y$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

SOLUCIÓN:

Por inducción:
i) Para $n = 1$, se comprueba que $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$.
ii) Se supone cierto para n, es decir,

$$x^{2n} - y^{2n} = (x - y) \cdot P(x, y).$$

iii) Se prueba para $n + 1$, usando la hipóesis anterior,

$$\begin{aligned} x^{2n+1} - y^{2n+1} &= \left(x^2 \cdot x^{2n} - y^2 \cdot y^{2n}\right) = \left(x^2 \cdot x^{2n} - x^2 \cdot y^{2n} + x^2 \cdot y^{2n} - y^2 \cdot y^{2n}\right) \\ &= x^2\left(x^{2n} - y^{2n}\right) + y^{2n}\left(x^2 - y^2\right) \\ &= (x - y)\, x^2 \cdot P(x, y) + (x - y)(x + y)\, y^2 \\ &= (x - y) \cdot Q(x, y). \end{aligned}$$

EJERCICIO 26 Hallar los criterios de divisibilidad por 7 y 13. Hallar el mayor número de seis cifras divisible por 7 y 13.

SOLUCIÓN: ■■■

(a) Criterio divisibilidad por 7. Sea N número natural, entonces

$$N = a_n a_{n-1} a_{n-2} \cdots a_2 a_1 a_0 = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \cdots + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0 -$$

Dicho número será divisible por siete si en base 7 es congruente con 0, es decir, el resto de la división entre 7 es 0. Veamos las congruencias de las distintas potencias de 10:

$$10 \equiv 3, \quad 10^2 \equiv 2, \quad 10^3 \equiv -1, \quad 10^4 \equiv -3, \quad 10^5 \equiv -2, \quad 10^6 \equiv 1, \quad 10^7 \equiv 3.$$

Se puede observar que a partir de 10^6 se repite la serie de congruencias, por tanto,

$$N \equiv a_0 + (3a_1 + 2a_2 - a_3) - (3a_4 + 2a_5 - a_6) + \cdots$$

Ahora, para que N sea divisible por 7, se debe cumplir que:

$$a_0 + (3a_1 + 2a_2 - a_3) - (3a_4 + 2a_5 - a_6) + \cdots \equiv 0.$$

(b) Criterio divisibilidad por 13. Realizando operaciones similares a las anteriores pero para 13, se tiene

$$a_0 - (3a_1 + 4a_2 + a_3) + (3a_4 + 4a_5 + a_6) + \cdots \equiv 0.$$

(c) El mayor número de seis cifras, $N = a_5 a_4 a_3 a_2 a_1 a_0$, divisible por 7 y 13, debe cumplir

$$a_0 + (3a_1 + 2a_2 - a_3) - (3a_4 + 2a_5) \equiv 0, \quad a_0 - (3a_1 + 4a_2 + a_3) + (3a_4 + 4a_5) \equiv 0.$$

El número solicitado es $N = 999999$. Además, se observa que si tienen repetidas sus 6 cifras son divisibles por 7 y por 13.

EJERCICIO 27 Dado un número perfecto par, es decir,

$$N = 2^{p-1}\left(2^p - 1\right), \quad p > 1, \quad y \quad 2^p - 1 \quad es \quad primo,$$

se pide

(a) Demostrar que la suma de todos los inversos de los divisores de N es 2.

(b) N termina en 6 o en 8.

SOLUCIÓN: ■■■

(a) Los divisores de N son

$$1\,,2\,,2^2\,,\ldots,\,2^{p-1}\,,(2^p-1),\,2(2^p-1)\,,\ldots,2^{p-1}(2^p-1).$$

Si se denota por S la suma de sus inversos,

$$S=\left(1+\frac{1}{2^p-1}\right)\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{p-1}}\right)=\frac{2^p}{2^p-1}\,\frac{\dfrac{1}{2^p}-1}{-\dfrac{1}{2}}=2.$$

(b) Dado que 2^p-1 es primo, entonces p es primo y por tanto impar (excepto el 2) Así, $2^{p-1}=2^{2k}=4^k$, y 2^{p-1} acaba en 4 o 6. Si 2^{p-1} acaba en 4, entonces 2^p-1 acaba en 7, por lo que $2^{p-1}\,(2^p-1)$ acaba en 8. Si 2^{p-1} acaba en 6, 2^p-1 acaba en 1, y $2^{p-1}\,(2^p-1)$ acaba en 6.

EJERCICIO 28 Hallar un polinomio de tercer grado $P(x)$ que verifique que

$$P(x)-P(x-1)=x^2,\quad P(0)=0,$$

y deducir a partir de ahí el valor de la suma $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^2$.

SOLUCIÓN:

Sea $P(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ el polinomio pedido. Por el enunciado, $P(0)=0\Rightarrow d=0$. Realizando el cálculo,

$$\begin{aligned}P(x)-P(x-1)&=ax^3+bx^2+cx-\big(a(x-1)^3+b(x-1)^2+c(x-1)\big)\\&=3ax^2-3ax+2bx+a-b+c.\end{aligned}$$

Puesto que $P(x)-P(x-1)=x^2$, identificando términos, se tiene

$$3a=1,\quad -3a+2b=0,\quad a-b+c=0.$$

Con ello, el polinomio solicitado es

$$P(x)=\frac{2x^3+3x^2+x}{6}.$$

Usando lo demostrado,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}k^2&=P(1)-P(0)+P(2)-P(1)+\cdots\\&\quad+P(n-1)-P(n-2)+P(n)-P(n-1)\\&=P(n)-P(0)=P(n)=\frac{n\left(2n^2+3n+1\right)}{6}=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.\end{aligned}$$

EJERCICIO 29 Demuestra que todos los términos de la sucesión a_n con $n > 2$ son múltiplos de 600, siendo

$$a_n = (n^2 - 1)(n^2 + 1)(n^4 - 16)n^2.$$

SOLUCIÓN:

En primer lugar factorizamos 600 como $600 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^2$. Trataremos de ver que a_n es un múltiplo de 600 porque es un múltiplo de sus factores. Pasamos a factorizar también el término general de la sucesión, de forma que llegamos a

$$a_n = (n-2)(n-1)n^2(n+1)(n+2)(n^2+1)(n^2+4).$$

Si nos fijamos en los factores $(n-2)(n-1)n$ tenemos que son tres números consecutivos, luego uno de ellos es múltiplo de 3. Por el mismo motivo, en el producto $(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)$ hay un múltiplo de 5. Se tiene también lo siguiente:

- Si n es par, entonces cada uno de los factores de $n(n-2)(n^2+4)$ es múltiplo de 2, por lo que el producto de los tres es múltiplo de 2^3.

- Si n es impar, entonces cada uno de los factores de $(n-1)(n+1)(n^2+1)$ es múltiplo de 2 y, así, el producto es múltiplo de 2^3.

Con todo, a_n es múltiplo de $2^3 \cdot 3 \cdot 5$. Falta ver que a_n es múltiplo 5^2. Para ello tomemos el producto $n(n^2+1)(n^2+4)$, o lo que es igual, $n^5 + 5n^2 + 4n$. Por el pequeño teorema de Fermat[2], n^5 es congruente con n módulo 5, es decir, podemos escribir este polinomio como $n + 5n^2 + 4n = 5(n^2 + n)$. Finalmente, a_n es múltiplo de $2^3 \cdot 3 \cdot 5^2$, como queríamos demostrar.

EJERCICIO 30 Si $\xi_1 = 1, \xi_2 = e^{\frac{2\pi}{5}i}, \xi_3 = e^{\frac{4\pi}{5}i}, \xi_4 = e^{\frac{6\pi}{5}i}$ y $\xi_5 = e^{\frac{8\pi}{5}i}$ son las raíces quintas de la unidad y $n \in \mathbb{N}$, estudiar qué valores toma

$$\xi_1^n + \xi_2^n + \xi_3^n + \xi_4^n + \xi_5^n.$$

SOLUCIÓN:

En primer lugar, vemos que si n es un múltiplo de 5, entonces, $\xi_i^n = 1$, por lo que $\xi_1^n + \xi_2^n + \xi_3^n + \xi_4^n + \xi_5^n = 5$. En otro caso,

$$\sum_{k=1}^{5} e^{\frac{2nk\pi}{5}i} = e^{2n\pi i} \cdot \frac{e^{2n\pi i}2 - 1}{e^{\frac{2n\pi}{5}i} - 1} = 0.$$

[2]Véase el pequeño teorema de Fermat 5.1 del Capítulo 5.

EJERCICIO 31 Sean x_1 y x_2 las raíces de la ecuación $x^2 - px + 1 = 0$, en la que p es un número natural impar mayor o igual que 3. Para cada entero $n \geq 0$ definimos $a_n = x_1^n + x_2^n$. Probar que a_n es un número entero y que los números a_n y a_{n+1} son primos entre sí para cada $n \geq 0$.

SOLUCIÓN:

Calculamos en función de p las soluciones

$$x_1 = \frac{p + \sqrt{p^2 - 4}}{2}, \quad x_2 = \frac{p - \sqrt{p^2 - 4}}{2}.$$

Es evidente que $x_1 \cdot x_2 = 1$ y $x_1 + x_2 = p$. Veamos que a_n es un número entero para cualquier n por inducción.
Para $n = 1$, $a_1 = p$, que es un número natural, luego se cumple. Asumamos que $a_k = x_1^k + x_2^k$ también es un número natural. Para $n = k+1$, pongamos lo siguiente:

$$\begin{aligned} a_{k+1} = x_1^{k+1} + x_2^{k+1} &= (x_1^k + x_2^k)(x_1 + x_2) - x_1 x_2^k - x_2 x_1^k \\ &= (x_1^k + x_2^k)(x_1 + x_2) - x_1 x_2 (x_1^{k-1} + x_2^{k-1}) \\ &= (x_1^k + x_2^k)(x_1 + x_2) - (x_1^{k-1} + x_2^{k-1}), \end{aligned}$$

es decir, por hipótesis de inducción, a_{k+1} es una diferencia de enteros, luego es un número entero.
Para ver que a_n y a_{n+1} son primos entre sí usaremos también inducción. Para $n = 1$ podemos ver que $a_1 = p$ y $a_2 = x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = p^2 - 2$, que claramente son primos entre sí. Supongamos que a_{n-1} y a_n también lo son, es decir, no comparten ningún factor distinto de 1.
Tal y como se hizo antes, ponemos

$$a_{n+1} = (x_1^n + x_2^n)p - (x_1^{n-1} + x_2^{n-1}) = a_n p - a_{n-1}.$$

Supongamos que a_n y a_{n+1} no son primos entre sí, de forma que existe algún d natural tal que $a_n = c \cdot d$ y $a_{n+1} = c' \cdot d$. Entonces,

$$a_{n-1} = a_n p - a_{n+1} = c \cdot d \cdot p - c' \cdot d = d \cdot (c \cdot p - c'),$$

en contradicción con que a_{n-1} y a_n no comparten factores.

EJERCICIO 32 Sea $\mathcal{M}_3$ el espacio vectorial de las matrices reales cuadradas de orden 3.

(a) Demostrar que el conjunto $\mathcal{A}$ de las matrices reales antisimétricas de orden 3 es un subespacio vectorial de $\mathcal{M}_3$ y obtener razonadamente una base canónica de este subespacio.

(b) Si $T : \mathcal{A} \to \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ es la aplicación lineal definida mediante

$$T\left(\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix}\right) := ax + bx^2 + cx^3$$

hallar la matriz de esta aplicación lineal asociada a la base canónica de $\mathcal{A}$ y la base canónica $\{1, x, x^2, x^3\}$ de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ y escribir la ecuación matricial de la aplicación lineal.

(c) Hallar el número y la imagen de esta aplicación lineal y demostrar que es un isomorfismo sobre el conjunto imagen $\mathrm{Im}\ T$.

(d) Comprobar que se cumple el Teorema de las dimensiones.

SOLUCIÓN: ■■■

(a) Para demostrar que $\mathcal{A}$ es un subespacio de $\mathcal{M}_3$ comprobaremos que $\alpha A+\beta B \in \mathcal{A}$ para cualesquiera $A, B \in \mathcal{A}$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Por pertenecer a $\mathcal{A}$, se tiene $A^t = -A$ y $B^t = -B$, y así,

$$(\alpha A + \beta B)^t = -\alpha A^t - \beta B^t = -(\alpha A^t + \beta B^t),$$

es decir, $\alpha A + \beta B \in \mathcal{A}$ y este es un subespacio. Toda matriz del subespacio puede escribirse como

$$\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

y estas tres matrices forman una base de $\mathcal{A}$.

(b) Para hallar la matriz de la aplicación, calcularemos las imágenes de los elementos de la base por T:

$$T\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = x,$$

$$T\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = x^2,$$

$$T\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}\right) = x^3.$$

Con todo, la matriz M_T de la aplicación será aquella que tiene por columnas las imagen anteriores:

$$M_T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La ecuación es entonces, $M_T \cdot C = \mathcal{P}$, donde C es un vector 3×1 con las coordenadas de una matriz en la base de $\mathcal{A}$ y $\mathcal{P}$ es un polinomio.

(c) Para hallar el núcleo miramos qué valores hacen $M_T \cdot X = 0$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

De aquí se obtiene $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ y así, $\ker(T) = \{\emptyset\}$. De aquí se concluye que la aplicación es inyectiva. Como además toda aplicación es sobreyectiva sobre su imagen, se tiene que T es un isomorfismo sobre $\operatorname{Im} T$.

(d) La dimensión de $\mathcal{A}$ se vio en el primero apartado que es 3, y en el anterior que la dimensión del núcleo es 0. La dimensión de la imagen coincide con el rango de la matriz de la aplicación, que es 3, luego se cumple el teorema de las dimensiones

$$3 = \dim(\mathcal{A}) = \dim(\ker T) + \dim(\operatorname{Im} T) = 0 + 3.$$

EJERCICIO 33 En el espacio vectorial de las matrices cuadradas de orden 2 consideramos los subespacios:

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} a-b+2c & b-2c \\ 0 & 2c \end{pmatrix} / a,b,c \in \mathbb{R} \right\}, \; M = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

(a) Determinar el subespacio $L \cap M$ y comprobar que $L = L + M$ decidiendo, además, si se trata de una suma directa.

(b) Sea $B_L = \left\{ u = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ una base de L y consideramos la aplicación $f : L \to L \,/\, f(u) = v,\ f(v) = u,\ f(w) = w$. Hallar la matriz de f respecto de la base B_L y los subespacios $\ker f$ e Im f.

SOLUCIÓN:

(a) Queda claro que la tercera matriz de M puede escribirse como la diferencia de la segunda y la primera:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

con lo que la dimensión de M es 2. Para hallar la dimensión de L vemos que cualquier matriz de este subespacio puede ponerse como

$$\begin{pmatrix} a-b+2c & b-2c \\ 0 & 2c \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 2c\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Las últimas tres matrices forman una base de L, luego la dimensión es 3. Si formamos una familia de vectores con los dos elementos de una base de M y los tres elementos de una base de L y estudiamos el rango de la matriz resultante:

$$rg\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3 \Rightarrow \dim(L+M) = 3.$$

Por la fórmula de las dimensiones,

$$\dim(L) + \dim(M) = \dim(L+M) + \dim(L \cap M) \Rightarrow \dim(L \cap M) = 2$$

y se tiene $M = L \cap M$ (pues $M \subset L \cap M$ y las dimensiones coinciden) y $L = L + M$. No puede tratarse de una suma directa pues la dimensión de la intersección no es nula.

(b) Bajo las condiciones del enunciado, la aplicación f manda el primer elemento de la base, de coordenadas $(1,0,0)$ respecto a esa misma base, al segundo, de coordenadas $(0,1,0)$, y así

$$f((1,0,0)) = (0,1,0), \quad f((0,1,0)) = (1,0,0), \quad f((0,0,1)) = (0,0,1).$$

Por ello, la matriz, M_f, de la aplicación será

$$M_f = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Estudiando su rango vemos rápidamente que $\dim(\text{Im } f) = rg(M_f) = 3$, lo que implica $\text{Im } f = L$, y $\ker f = \emptyset$.

EJERCICIO 34 Sea V un K-espacio vectorial, con K cuerpo de característica distinta de 2. Sea $f : V \to V$ una aplicación lineal tal que $f^2 = Id$ y sean $V_1 = \{a \in V, f(a) = a\}$ y $V_2 = \{a \in V, f(a) = -a\}$. Demostrar que $V = V_1 \oplus V_2$. ¿Significa esto que para todo a en V se cumple $f(a) = a$ ó $f(a) = -a$? (Nota: $f^2 = f \circ f$, $Id : V \to V$ tal que $Id(x) = x$).

SOLUCIÓN:

Dado que $f^2 = Id$, f es biyectiva y en particular, $\ker f = \{0\}$. Usaremos este hecho para hallar la intersección de V_1 y V_2. Supongamos que existe algún $a \in V_1 \cap V_2$, entonces

$$0 = f(0) = f(a-a) = f(a) - f(a) = a - (-a) = 2a \Rightarrow a = 0,$$

es decir, $V_1 \cap V_2 = \{0\}$. Por ser f biyectiva se tiene $\text{Im } f = V$, luego para todo $y \in V$, existe $x \in V$ tal que $y = f(x)$. Sea $y = a_1 - a_2$ para $a_1 \in V_1$ y $a_2 \in V_2$, entonces,

$$y = a_1 - a_2 = f(a_1) + f(a_2) = f(a_1 + a_2) = f(x) \Rightarrow x = a_1 + a_2.$$

Lo que junto con la intersección antes encontrada prueba que $V = V_1 \oplus V_2$. Nótese que esto no significa que para todo a en V se cumple $f(a) = a$ ó $f(a) = -a$ pues para $a + b \in V$ con $a \in V_1$ y $b \in V_2$ se tiene

$$f(a + b) = f(a) + f(b) = a - b,$$

que no es $a + b$ ni $-a - b$.

EJERCICIO 35 Dada la matriz $A \in \mathbb{R}^{4\times 3}$, el vector $b \in \mathbb{R}^4$, $\alpha \in \mathbb{R}$ y el subespacio F de $\mathbb{R}^4$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \alpha - 2 \\ \alpha^2 \end{pmatrix} \quad \text{y } F \equiv \left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_2 - x_4 = 0, \\ x_1 + x_3 + x_4 = 0. \end{array} \right.$$

(a) Discutir y resolver cuando sea compatible el sistema $AX = b$ con $X \in \mathbb{R}^3$.

(b) Sea E el espacio columna de A, calcular sus ecuaciones implícitas.

(c) Encontrar una base del subespacio $E \cap F$.

(d) Calcular la matriz B de la transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ que verifica:

$$T(e_1) = A(e_2 + e_3), \quad T(e_2) = Ae_3, \quad T(e_3) = Ae_2,$$

donde $\{e_1, e_2, e_3\}$ es la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

SOLUCIÓN: ▪▪▪

(a) El sistema será compatible cuando sea $rg(A) = rg(A^*)$, donde

$$A^* = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & \alpha - 2 \\ 0 & 1 & -1 & \alpha^2 \end{pmatrix}.$$

Claramente, $rg(A) = 2$. Ahora, si $\alpha \neq 1$, el menor de A^*

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \alpha^2 \end{vmatrix}$$

es no nulo, por lo que en ese caso $rg(A^*) = 3$ y el sistema es incompatible. Para $\alpha = 1$, es rutinario comprobar que $rg(A^*) = 2$ y el sistema es compatible e indeterminado. La solución es el subespacio generado por los vectores $(2, -1, 0, 1)$ y $(-2, 1, 1, 0)$.

(b) Las ecuaciones implícitas de E se obtienen despejando los parámetros (λ, μ, ρ) de

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = \lambda(-1, 0, -1, 0) + \mu(2, 1, 1, 1) + \rho(0, -1, 1, -1).$$

De aquí, $x_2 = x_4$, luego una ecuación es $x_2 - x_4 = 0$. También, $x_1 - x_3 = \mu - \rho = x_2$, luego la otra ecuación es $x_1 - x_2 - x_3 = 0$.

(c) Para hallar una base de $E \cap F$ resolvemos el sistema que resulta de considerar las dos ecuaciones de E y las dos de F (pues los vectores de la intersección deben pertenecer a ambos subespacios):

$$E \cap F \equiv \left\{ \begin{array}{r} x_2 - x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 - x_4 = 0, \\ x_1 + x_3 + x_4 = 0. \end{array} \right.$$

La primera y la tercera ecuación implican que $x_1 = 0$. De aquí, $x_2 = x_4 = -x_3$, por lo que $B_{E \cap F} = \{(0, 1, -1, 1)\}$.

(d) Calculamos las imágenes de los elementos de la base canónica de $\mathbb{R}^3$:

$$T(e_1) = A(e_2 + e_3) = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$T(e_2) = Ae_3 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

y

$$T(e_3) = Ae_2 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Finalmente, la matriz B es

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

EJERCICIO 36 Si $z \neq 1$ y $z^7 = 1$, hallar

$$\frac{z^4}{1+z} + \frac{z^5}{1+z^3} + \frac{z^6}{1+z^5}.$$

SOLUCIÓN:

Según el enunciado z es una de las raíces séptimas de la unidad, distinta de 1, por tanto, se puede escribir de la forma: $z = e^{\theta i}$. Si z es una de las raíces $n-$ésimas de la unidad, distinta de la unidad, se tiene que: $1 + z + z^2 + z^3 + \cdots + z^{n-1} = 0$. Este resultado lo aplicamos al problema planteado en el ejercicio. Reduciendo a común denominador, se tiene

$$\begin{aligned}
&\frac{z^4}{1+z} + \frac{z^5}{1+z^3} + \frac{z^6}{1+z^5} = \\
&\qquad = \frac{z^4\left(1+z^3\right)\left(1+z^5\right) + z^5(1+z)\left(1+z^5\right) + z^6(1+z)\left(1+z^3\right)}{(1+z)(1+z^3)(1+z^5)}
\end{aligned}$$

Usando $z^7 = 1$, $z^8 = z$, $z^9 = z^2$, $z^{10} = z^3$, $z^{11} = z^4$ y $z^{12} = z^5$, será

$$\begin{aligned}
\frac{z^4}{1+z} + \frac{z^5}{1+z^3} + \frac{z^6}{1+z^5} &= \frac{2\left(1+z^2+z^3+z^4+z^5+z^6\right)}{1+2z+z^2+z^3+z^4+z^5+z^6} \\
&= \frac{2\left(1+z+z^2+z^3+z^4+z^5+z^6\right) - 2z}{\left(1+z+z^2+z^3+z^4+z^5+z^6\right)+z} \\
&= \frac{0-2z}{0+z} \\
&= -2.
\end{aligned}$$

EJERCICIO 37 Calcular el siguiente determinante:

$$D_n = \begin{vmatrix}
\frac{1}{1!} & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
\frac{1}{2!} & \frac{1}{1!} & 1 & \cdots & 0 & 0 \\
\frac{1}{3!} & \frac{1}{2!} & \frac{1}{1!} & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\frac{1}{(n-1)!} & \frac{1}{(n-2)!} & \frac{1}{(n-3)!} & \cdots & \frac{1}{1!} & 1 \\
\frac{1}{n!} & \frac{1}{(n-1)!} & \frac{1}{(n-2)!} & \cdots & \frac{1}{2!} & \frac{1}{1!}.
\end{vmatrix}$$

SOLUCIÓN:

Se obtienen, en primer lugar, los valores de los determinantes D_1, D_2, D_3, D_4 y D_5, con el fin de obtener una ley de recurrencia.

$$D_1 = \frac{1}{1!},\ D_2 = \frac{1}{2!},\ D_3 = \frac{1}{1!}D_2 - \begin{vmatrix} \frac{1}{2!} & 1 \\ \frac{1}{3!} & \frac{1}{1!} \end{vmatrix} = \frac{1}{3!},$$

$$D_4 = \frac{1}{1!}D_3 - \begin{vmatrix} \frac{1}{2!} & 1 & 0 \\ \frac{1}{3!} & \frac{1}{1!} & 1 \\ \frac{1}{4!} & \frac{1}{2!} & \frac{1}{1!} \end{vmatrix} = \frac{1}{1!}D_3 - \frac{1}{2!}D_2 + \begin{vmatrix} \frac{1}{3!} & 1 \\ \frac{1}{4!} & \frac{1}{1!} \end{vmatrix} = \frac{1}{4!}.$$

Realizando las mismas operaciones, desarrollando por los elementos de la primera