TEMA I

Los números naturales

Esquema/resumen

1.1. Axiomas de Peano.

1.2. Suma de números naturales.

1.3. Producto de números naturales.

1.4. Potenciación de números naturales.

1.5. Ordenación de los números naturales.

Tema I

Integrales impropias

Esquema/Resumen

1.1. *Integrales impropias de primera especie.*

1.2. *Criterios de comparación.*

1.3. *Convergencia absoluta.*

1.4. *Integrales impropias de segunda especie.*

Sea f una función integrable en todo intervalo $[a, \alpha]$, $\alpha \geqslant a$, y sea F la función que a cada $\alpha \geqslant a$ hace corresponder la integral de f en el intervalo $[a, \alpha]$. El par de funciones (f, F) se llama integral impropia de f en el intervalo $[a, +\infty]$ y se designa por $\int_a^{+\infty} f$.

Se dice que la integral impropia $\int_a^{+\infty} f$ es convergente cuando existe y es finito el límite de F en $+\infty$, y si este límite es igual a $l (\in \mathbb{R})$, se dice que l es el valor de la integral impropia. Cuando el límite anterior no existe o es infinito, se dice que la integral impropia es divergente.

De manera análoga y para funciones f integrables en todo intervalo $[\alpha, a]$, $\alpha \leqslant a$, se definen las integrales impropias de la forma $\int_{-\infty}^{a} f$.

Sea ahora f una función integrable en todo intervalo cerrado. Si para algún $a \in \mathbb{R}$ las dos integrales impropias $\int_{-\infty}^{a} f$ y $\int_a^{+\infty} f$ son convergentes, se dice que la integral impropia $\int_{-\infty}^{+\infty} f$ es convergente y su valor es, por definición, la suma de las dos integrales impropias anteriores. En otro caso, se dice que la integral impropia $\int_{-\infty}^{+\infty} f$ es divergente.

Estas integrales impropias en las que el intervalo de integración I no es acotado y el integrando es una función acotada e integrable en todo intervalo cerrado contenido en I se llaman integrales impropias de primera especie.

En 1.2 y en 1.3 se establecen algunos criterios de convergencia para integrales impropias de primera especie.

En 1.4 se estudian las integrales impropias de segunda especie, es decir, las integrales en intervalos acotados de funciones no acotadas, y las integrales impropias de tipo mixto.

1.1. INTEGRALES IMPROPIAS DE PRIMERA ESPECIE

Sea $f:[a, +\infty)\to\mathbb{R}$ una función integrable en todo intervalo $[a, \alpha]$, $\alpha \geqslant a$ y sea $F:[a, +\infty)\to\mathbb{R}$ la función definida por

$$F(\alpha)=\int_a^\alpha f(x)\,dx$$

para cada $\alpha\geqslant a$. El par de funciones (f, F) se llama *integral impropia* de f en el intervalo $[a, +\infty)$ y se designa por $\int_a^{+\infty} f$ o por $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$.

Se dice que la integral impropia $\int_a^{+\infty} f$ es *convergente* cuando existe y es finito el límite

$$\lim_{\alpha\to+\infty} F(\alpha)=\lim_{\alpha\to+\infty}\int_a^\alpha f(x)\,dx$$

y si este límite es igual a l ($\in\mathbb{R}$), se escribe

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx=l$$

y se dice que l es el valor de la integral impropia $\int_a^{+\infty} f$.

Cuando el límite anterior no existe o es infinito, se dice que la integral impropia $\int_a^{+\infty} f$ es *divergente*.

De manera análoga y para funciones $f:(-\infty, a]\to\mathbb{R}$ integrables en todo intervalo $[\alpha, a]$, $\alpha\leqslant a$, se definen las integrales impropias de la forma $\int_{-\infty}^{a} f$.

Sea ahora $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una función integrable en todo intervalo cerrado. Si para algún $a\in\mathbb{R}$ las dos integrales $\int_{-\infty}^{a} f$ y $\int_{a}^{+\infty} f$ son convergentes, se dice que la integral impropia $\int_{-\infty}^{+\infty} f$ es convergente y su valor es, por definición,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f=\int_{-\infty}^{a} f+\int_{a}^{+\infty} f.$$

En otro caso, se dice que la integral impropia $\int_{-\infty}^{+\infty} f$ es divergente.

Ejemplos:

1. Sea $a>0$. La integral

$$\int_{a}^{+\infty} \frac{dx}{x^r}$$

es convergente si $r>1$ y divergente si $r\leqslant 1$ puesto que

$$\int_{a}^{\alpha} \frac{dx}{x^r}=\begin{cases} \dfrac{1}{r-1}\left(\dfrac{1}{a^{r-1}}-\dfrac{1}{\alpha^{r-1}}\right) & \text{si} \quad r\neq 1 \\ \log \dfrac{\alpha}{a} & \text{si} \quad r=1 \end{cases}$$

y, por tanto,

$$\lim_{\alpha\to+\infty} \int_{a}^{\alpha} \frac{dx}{x^r}=\begin{cases} \dfrac{1}{(r-1)a^{r-1}} & \text{si} \quad r>1 \\ +\infty & \text{si} \quad r\leqslant 1 \end{cases}$$

2. De manera análoga, se ve que para todo $a<0$ la integral

$$\int_{-\infty}^{a} \frac{dx}{x^r}$$

es convergente si $r>1$ y divergente si $r\leqslant 1$.

3. La integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$$

converge y su valor es π, puesto que por ser

$$\lim_{\alpha\to-\infty} \int_{\alpha}^{0} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{\alpha\to-\infty} (-\operatorname{arc\,tg} \alpha) = \frac{\pi}{2}$$

y

$$\lim_{\beta\to+\infty} \int_{0}^{\beta} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{\beta\to+\infty} \operatorname{arc\,tg} \beta = \frac{\pi}{2},$$

se tiene

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2} = \int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$$

y, por tanto,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2} + \int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \pi.$$

4. La integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \cos x \, dx$$

es divergente puesto que para todo $a \in \mathbb{R}$ es

$$\int_{a}^{\alpha} \cos x \, dx = \operatorname{sen} \alpha - \operatorname{sen} a$$

y no existe

$$\lim_{\alpha\to+\infty} (\operatorname{sen} \alpha - \operatorname{sen} a)$$

Observaciones:

1. Sea $f: [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ una función integrable en todo intervalo $[a, \alpha]$, $\alpha \geqslant a$. Si

es $b>a$, las integrales $\int_a^{+\infty} f$ y $\int_b^{+\infty} f$ convergen o divergen simultáneamente, puesto que

$$\int_a^{\alpha} f = \int_a^b f + \int_b^{\alpha} f$$

para todo $\alpha \geqslant a$.

Análogamente, si $f:(-\infty, a] \to \mathbb{R}$ es una función integrable en todo intervalo $[\alpha, a]$, $\alpha \leqslant a$ y es $b<a$, las dos integrales $\int_{-\infty}^{a} f$ y $\int_{-\infty}^{b} f$ tienen el mismo carácter.

Sea ahora $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una función integrable en todo intervalo cerrado. Se ha definido que la integral $\int_{-\infty}^{+\infty} f$ es convergente cuando y sólo cuando existe un $a \in \mathbb{R}$ tal que las dos integrales $\int_{-\infty}^{a} f$ y $\int_a^{+\infty} f$ son convergentes. Pues bien, el carácter de la integral $\int_{-\infty}^{+\infty} f$ no depende del punto a elegido y lo mismo ocurre con el valor de la integral cuando sea convergente.

2. Cuando la integral $\int_{-\infty}^{+\infty} f$ es convergente, su valor es el límite

$$\lim_{\alpha \to +\infty} \int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)\,dx.$$

Sin embargo, este límite puede existir sin que la integral sea convergente. Tal ocurre, por ejemplo, con la función $f(x)=2x$ para la que se verifica

$$\lim_{\alpha \to +\infty} \int_{-\alpha}^{\alpha} 2x\,dx = \lim_{\alpha \to +\infty} (\alpha^2 - \alpha^2) = 0$$

pero la integral $\int_{-\infty}^{+\infty} f$ diverge, pues para todo $a \in \mathbb{R}$ es

$$\lim_{\alpha \to +\infty} \int_{a}^{\alpha} 2x\,dx = \lim_{\alpha \to +\infty} (\alpha^2 - a^2) = +\infty$$

y, por tanto, la integral $\int_a^{+\infty} f$ diverge para todo $a \in \mathbb{R}$.

Se llama *valor principal* de la integral impropia $\int_{-\infty}^{+\infty} f$ y se designa por

$V.P. \int_{-\infty}^{+\infty} f$ al límite

$$\lim_{\alpha \to +\infty} \int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)\,dx$$

cuando este límite existe y es finito.

1.2. CRITERIOS DE COMPARACION

En este párrafo y en el siguiente vamos a establecer algunos criterios de convergencia para integrales impropias de la forma $\int_a^{+\infty} f$. El enunciar y demostrar los criterios análogos para las integrales de la forma $\int_{-\infty}^{a} f$ constituirá sin duda un buen ejercicio para el lector.

Proposición: *Sea $f\colon [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ una función no negativa e integrable en todo intervalo $[a, \alpha]$, $\alpha \geqslant a$. Entonces la integral $\int_a^{+\infty} f$ converge si y sólo si la función $F\colon [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ definida por $F(\alpha) = \int_a^{\alpha} f$ está acotada superiormente.*

Demostración: Como f es no negativa, F es creciente y tendrá límite finito o infinito según que esté acotada superiormente o no.

Proposición. (Primer criterio de comparación): *Sean f y g dos funciones de $[a, +\infty)$ en $\mathbb{R}$ integrables en todo intervalo $[a, \alpha]$, $\alpha \geqslant a$, y supongamos que existe un $b > a$ tal que $0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$ para todo $x \geqslant b$. Si la integral $\int_a g$ es convergente, entonces la integral $\int_a^{+\infty} f$ es también convergente. Si la integral $\int_a^{+\infty} f$ es divergente, entonces la integral $\int_a^{+\infty} g$ es también divergente.*

Demostración: Supongamos, en primer lugar, que la integral $\int_a^{+\infty} g$ es convergente. Entonces la integral $\int_b^{+\infty} g$ es también convergente y como $g(x) \geqslant 0$ para todo $x \geqslant b$, la función $G\colon [b, +\infty) \to \mathbb{R}$ definida por $G(\alpha) = \int_b^{\alpha} g$ está acotada superiormente. Por ser $f(x) \leqslant g(x)$ para todo $x \geqslant b$, la función $F\colon [b, +\infty) \to \mathbb{R}$ definida por $F(\alpha) = \int_b^{\alpha} f$ también está acotada superiormente, luego la integral $\int_b^{+\infty} f$ es convergente y, por tanto, la integral $\int_a^{+\infty} f$ es también convergente.

Supongamos ahora que la integral $\int_a^{+\infty} f$ es divergente. Entonces la integral $\int_b^{+\infty} f$ es también divergente y la función $F(\alpha)=\int_b^{\alpha} f$ no está acotada superiormente. Lo mismo ocurre con la función $G(\alpha)=\int_b^{\alpha} g$ y, por tanto, la integral $\int_b^{+\infty} g$ es divergente, luego la integral $\int_a^{+\infty} g$ es también divergente.

Proposición. (Segundo criterio de comparación): *Sean f y g dos funciones de $[a, +\infty)$ en $\mathbb{R}$ no negativas e integrables en todo intervalo $[a, \alpha]$, $\alpha \geqslant a$, y supongamos que*

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = l \in \mathbb{R}.$$

Si $l \neq 0$, entonces las dos integrales $\int_a^{+\infty} f$ y $\int_a^{+\infty} g$ tienen el mismo carácter. Si $l=0$ y la integral $\int_a^{+\infty} g$ es convergente, entonces la integral $\int_a^{+\infty} f$ es también convergente.

Demostración: Si $l \neq 0$, existe un $b \geqslant a$ tal que para todo $x \geqslant b$ se verifica

$$\frac{1}{2} l \leqslant \frac{f(x)}{g(x)} \leqslant \frac{3}{2} l$$

y, por tanto,

$$\frac{1}{2} l\, g(x) \leqslant f(x) \leqslant \frac{3}{2} l\, g(x)$$

y, para concluir, basta aplicar dos veces el primer criterio de comparación. (Obsérvese que por ser $l \neq 0$ las tres integrales

$$\int_a^{+\infty} g, \quad \int_a^{+\infty} \frac{1}{2} l\, g \quad \text{y} \quad \int_a^{+\infty} \frac{3}{2} l\, g$$

tienen el mismo carácter).

Si $l=0$, existe un $b \geqslant a$ tal que para todo $x \geqslant b$ se verifica

$$\frac{f(x)}{g(x)} \leqslant 1$$

y, por tanto,

$$f(x) \leqslant g(x)$$

y el resultado se sigue también del primer criterio de comparación.

Observaciones:

1. En el segundo criterio de comparación, si $l=0$ y la integral $\int_a^{+\infty} g$ es divergente no se puede afirmar nada sobre el carácter de la integral $\int_a^{+\infty} f$. Esto se ve considerando, por ejemplo, las funciones $g(x)=x$, $f_1(x)=1/x$ y $f_2(x)=1/x^2$. La integral $\int_1^{+\infty} g$ es divergente. La integral $\int_1^{+\infty} f_1$ es divergente mientras que la integral $\int_1^{+\infty} f_2$ es convergente.

2. Como las dos integrales $\int_a^{+\infty} f$ y $\int_a^{+\infty} (-f)$ tienen el mismo carácter, si es $f(x)\leqslant 0$ para todo $x\geqslant a$, para estudiar el carácter de la integral $\int_a^{+\infty} f$, basta estudiar el carácter de la integral $\int_a^{+\infty} (-f)$.

3. Para poner en práctica los criterios de comparación debemos disponer de algunas integrales de carácter conocido. Uno de los tipos de integrales más utilizados para este objeto es el de las integrales de la forma

$$\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^r} \quad , \quad a>0,$$

que como sabemos convergen cuando $r>1$ y divergen cuando $r\leqslant 1$.

Ejemplos:

1. Del primer criterio de comparación se deduce que la integral

$$\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2}\, dx$$

es convergente puesto que para todo $x\geqslant 1$ se verifica

$$0\leqslant \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2} \leqslant \frac{1}{x^2}$$

y la integral

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$$

es convergente.

2. Por el segundo criterio de comparación resulta que la integral

$$\int_1^{+\infty} \operatorname{sen}^2 \frac{1}{x}\, dx$$

es convergente puesto que

$$\operatorname{sen}^2 \frac{1}{x} \geqslant 0 \text{ para todo } x \geqslant 1$$

y además,

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\operatorname{sen}^2 \frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}} = 1$$

y la integral

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$$

es convergente.

1.3. CONVERGENCIA ABSOLUTA

Proposición: *Sea $f: [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ una función integrable en todo intervalo $[a, \alpha]$, $\alpha \geqslant a$. Si la integral $\int_a^{+\infty} |f|$ es convergente entonces la integral $\int_a^{+\infty} f$ es también convergente.*

Demostración: Para todo $x \geqslant a$ se verifica

$$-|f(x)| \leqslant f(x) \leqslant |f(x)|$$

y, por tanto,

$$0 \leqslant |f(x)| - f(x) \leqslant 2\ |f(x)|$$

Entonces, como la integral $\int_a^{+\infty} |f|$ es convergente, por el primer criterio de comparación la integral $\int_a^{+\infty} (|f| - f)$ es también convergente y de la igualdad

$$\int_a^{\alpha} f = \int_a^{\alpha} |f| - \int_a^{\alpha} (|f| - f)$$

se sigue la convergencia de la integral $\int_a^{+\infty} f$.

Observación: La recíproca de la proposición anterior no es cierta en general. Para ver esto consideremos la función $f(x)=\operatorname{sen} x/x$, $x \geqslant \pi$. Entonces

$$\int_\pi^{2^n\pi} |f| = \sum_{k=2}^{2^n} \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \frac{|\operatorname{sen} x|}{x}\, dx \geqslant \sum_{k=2}^{2^n} \frac{1}{k\pi} \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} |\operatorname{sen} x|\, dx = \frac{2}{\pi} \sum_{k=2}^{2^n} \frac{1}{k} =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\dots+\left(\frac{1}{2^{n-1}+1}+\dots+\frac{1}{2^n}\right)\right]$$

$$> \frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)+\dots+\left(\frac{1}{2^n}+\dots+\frac{1}{2^n}\right)\right]$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{\pi}\,\frac{n}{2} = \frac{n}{\pi}$$

luego la función $F(\alpha)=\int_\pi^\alpha |f|$ no está acotada y, por tanto, la integral $\int_\pi^{+\infty} |f|$ es divergente.

Sin embargo, integrando por partes, resulta

$$\int_\pi^\alpha \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx = -\frac{\cos\alpha}{\alpha} + \frac{\cos\pi}{\pi} - \int_\pi^\alpha \frac{\cos x}{x^2}\, dx$$

y como

$$\left|\frac{\cos\alpha}{\alpha}\right| \leqslant \frac{1}{\alpha} \quad \text{y} \quad \left|\frac{\cos x}{x^2}\right| \leqslant \frac{1}{x^2}$$

se tiene

$$\lim_{\alpha\to+\infty} \frac{\cos\alpha}{\alpha} = 0 \quad \text{y} \quad \int_\pi^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}\, dx \text{ converge}$$

y, por tanto, existe y es finito el límite

$$\lim_{\alpha\to+\infty} \int_\pi^\alpha \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx$$

luego la integral $\int_\pi^{+\infty} f$ converge.

Definición: *Sea* $f:[a, +\infty)\to\mathbb{R}$ *una función integrable en todo intervalo* $[a, \alpha]$, $\alpha\geqslant a$. *Se dice que la integral* $\int_a^{+\infty} f$ *es absolutamente convergente cuando la integral* $\int_a^{+\infty} |f|$ *es convergente. Se dice que la integral* $\int_a^{+\infty} f$ *es condicionalmente convergente o semiconvergente cuando la integral* $\int_a^{+\infty} f$ *es convergente pero la integral* $\int_a^{+\infty} |f|$ *es divergente.*

Según esto, la proposición anterior podría enunciarse diciendo que *la convergencia absoluta implica la convergencia.*

1.4. INTEGRALES IMPROPIAS DE SEGUNDA ESPECIE

1.4.1. Sea $f:[a, b)\to\mathbb{R}$ una función integrable en todo intervalo $[a, \alpha]$, $\alpha\in[a, b)$ y sea $F:[a, b)\to\mathbb{R}$ la función definida por

$$F(\alpha)=\int_a^{\alpha} f(x)\,dx$$

para cada $\alpha\in[a, b)$. El par de funciones (f, F) se llama *integral impropia* de f en el intervalo $[a, b)$ y se designa por $\int_a^{b-} f$ o por $\int_a^{b-} f(x)\,dx$.

Se dice que la integral impropia $\int_a^{b-} f$ es *convergente* cuando existe y es finito el límite

$$\lim_{\alpha\to b-} F(\alpha)=\lim_{\alpha\to b-}\int_a^{\alpha} f(x)\,dx$$

y si este límite es igual a l $(\in\mathbb{R})$, se escribe

$$\int_a^{b-} f(x)\,dx=l$$

y se dice que l es el valor de la integral impropia $\int_a^{b-} f$.

Cuando el límite anterior no existe o es infinito, se dice que la integral impropia $\int_a^{b-} f$ es *divergente.*

De manera análoga y para funciones f: $(a, b]\to\mathbb{R}$ integrables en todo intervalo $[\alpha, b]$, $\alpha\in(a, b]$, se definen las integrales impropias de la forma $\int_{a+}^{b} f$.

Sea ahora $f\colon (a, b) \to \mathbb{R}$ una función integrable en todo intervalo cerrado contenido en (a, b). Si para algún $c \in (a, b)$ las dos integrales $\int_{a+}^{b} f$ y $\int_{a}^{b-} f$ son convergentes, se dice que la integral $\int_{a+}^{b-} f$ es convergente y su valor es, por definición,

$$\int_{a+}^{b-} f = \int_{a+}^{c} f + \int_{c}^{b-} f$$

En otro caso, se dice que la integral $\int_{a+}^{b-} f$ es divergente.

Ejemplos:

1. La integral

$$\int_{a}^{b-} \frac{dx}{(b-x)^r}$$

es convergente si $r < 1$ y divergente si $r \geqslant 1$ puesto que

$$\int_{a}^{\alpha} \frac{dx}{(b-x)^r} = \begin{cases} \dfrac{1}{r-1}\left[\dfrac{1}{(b-a)^{r-1}} - \dfrac{1}{(b-\alpha)^{r-1}}\right] & \text{si} \quad r \neq 1 \\ \log\dfrac{b-a}{b-\alpha} & \text{si} \quad r = 1 \end{cases}$$

y, por tanto,

$$\lim_{\alpha \to b-} \int_{a}^{\alpha} \frac{dx}{(b-x)^r} = \begin{cases} \dfrac{1}{(r-1)(b-a)^{r-1}} & \text{si } r < 1 \\ -\infty & \text{si } r > 1 \\ +\infty & \text{si } r = 1 \end{cases}$$

2. De manera análoga se ve que la integral

$$\int_{a+}^{b} \frac{dx}{(x-a)^r}$$

es convergente si $r < 1$ y divergente si $r \geqslant 1$.

1.4.2. Las demostraciones de las cuatro proposiciones siguientes son análogas a las de 1.2 y 1.3.

Proposición: *Sea f: $[a, b) \to \mathbb{R}$ una función no negativa e integrable en todo intervalo $[a, \alpha]$, $\alpha \in [a, b)$. Entonces la integral $\int_a^{b-} f$ converge si y sólo si la función F: $[a, b) \to \mathbb{R}$ definida por $F(\alpha) = \int_a^{\alpha} f$ está acotada superiormente.*

Proposición. (Primer criterio de comparación): *Sean f y g dos funciones de $[a, b)$ en $\mathbb{R}$ integrables en todo intervalo $[a, \alpha]$, $\alpha \in [a, b)$, y supongamos que existe un $c \in [a, b)$ tal que $0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$ para todo $x \in [c, b)$. Si la integral $\int_a^{b-} g$ es convergente entonces la integral $\int_a^{b-} f$ es también convergente. Si la integral $\int_a^{b-} f$ es divergente entonces la integral $\int_a^{b-} g$ es también divergente.*

Proposición. (Segundo criterio de comparación): *Sean f y g dos funciones de $[a, b)$ en $\mathbb{R}$ no negativas e integrables en todo intervalo $[a, \alpha]$, $\alpha \in [a, b)$, y supongamos que*

$$\lim_{x \to b-} \frac{f(x)}{g(x)} = l \in \mathbb{R}$$

Si $l \neq 0$ entonces las dos integrales $\int_a^{b-} f$ y $\int_a^{b-} g$ tienen el mismo carácter. Si $l = 0$ y la integral $\int_a^{b-} g$ es es convergente entonces la integral $\int_a^{b-} f$ es también convergente

Proposición: *Sea f: $[a, b) \to \mathbb{R}$ una función integrable en todo intervalo $[a, \alpha]$, $\alpha \in [a, b)$. Si la integral $\int_a^{b-} |f|$ es convergente entonces la integral $\int_a^{b-} f$ es también convergente.*

Definición: *Sea f: $[a, b) \to \mathbb{R}$ una función integrable en todo intervalo $[a, \alpha]$, $\alpha \in [a, b)$. Se dice que la integral $\int_a^{b-} f$ es absolutamente convergente cuando la integral $\int_a^{b-} |f|$ es convergente. Se dice que la integral $\int_a^{b-} f$ es condicionalmente convergente o semiconvergente cuando la integral $\int_a^{b-} f$ es convergente pero la integral $\int_a^{b-} |f|$ es divergente.*

Ejemplos:

1. Para determinar el carácter de la integral

$$\int_{0+}^{1-} \log x \log(1-x)\, dx$$