Índice

Capítulo 3

Formas de Jordan de endomorfismos lineales

Problema 3.1 *Sea ε una base del espacio vectorial real de dimensión 3, $V_3(\mathbb{R})$. Sea f el endomorfismo tal que:*

$$M_\varepsilon(f) = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & -7 \\ -3 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

a) *Hallar la matriz de Jordan J_f de f.*

b) *Encontrar una base ε' tal que $M_{\varepsilon'}(f) = J_f$.*

Solución:

a) Calculamos el polinomio característico de f:

$$\mid M - \lambda I \mid = (1-\lambda)[(5-\lambda)^2 + 9] = (1-\lambda)(\lambda^2 - 10\lambda + 34).$$

Las raíces del polinomio corresponden a los autovalores de f:

$$\begin{cases} \lambda = 1 \\ \lambda = 5 \pm 3i \end{cases}$$

Como estamos en un espacio vectorial real, $V_3(\mathbb{R})$, a los autovalores complejos conjugados $\lambda = \alpha \pm \beta i$ les correponde la caja de Jordan:

$$\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}.$$

Por lo que la matriz de Jordan de f es:

$$J_f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -3 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

b) Sea $\varepsilon' = \{\vec{e}\,'_1,\ \vec{e}\,'_2,\ \vec{e}\,'_3\}$ la base de $V_3(\mathbb{R})$ respecto a la cual la matriz de f tiene la forma de Jordan J_f. Las imágenes de los vectores de ε' por el endomorfismo f se expresan, respecto a ε', según indica la matriz J_f:

$$J_f = \left(\begin{array}{ccc} \boxed{\begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} 0 \\ 5 \\ 3 \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} 0 \\ -3 \\ 5 \end{matrix}} \end{array} \right)$$
$$\begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ J_f(\vec{e}\,'_1) & J_f(\vec{e}\,'_2) & J_f(\vec{e}\,'_3) \end{array}$$

Entonces:

$$\begin{cases} \mathbf{1)} \quad f(\vec{e}\,'_1) = \vec{e}\,'_1 & \Longrightarrow \quad (f - id)(\vec{e}\,'_1) = \vec{0} \\ \mathbf{2)} \quad f(\vec{e}\,'_2) = 5\vec{e}\,'_2 + 3\vec{e}\,'_3 & \Longrightarrow \quad \vec{e}\,'_3 = \frac{1}{3}(f - 5id)(\vec{e}\,'_2) \\ \mathbf{3)} \quad f(\vec{e}\,'_3) = -3\vec{e}\,'_2 + 5\vec{e}\,'_3 & \Longrightarrow \quad \vec{e}\,'_2 = -\frac{1}{3}(f - 5id)(\vec{e}\,'_3) \end{cases}$$

De **1)** tenemos $\vec{e}\,'_1 \in Ker(f - id)$, luego $\vec{e}\,'_1$ es autovector asociado al autovalor $\lambda = 1$. A partir de **2)** y **3)** vemos que:

$$\vec{e}\,'_2 = -\frac{1}{3}(f - 5id)(\vec{e}\,'_3) = -\frac{1}{9}(f - 5id)^2(\vec{e}\,'_2),$$

por lo que:

$$(f - 5id)^2(\vec{e}\,'_2) + 9(\vec{e}\,'_2) = \vec{0} \quad \Longrightarrow \quad \vec{e}\,'_2 \in Ker[(f - 5id)^2 + 9id].$$

Calculamos el autoespacio $Ker(f - id)$ asociado al autovalor $\lambda = 1$:

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & -7 \\ -3 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x_1 + 3x_3 \\ -x_1 - 7x_3 \\ -3x_1 + 4x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad x_1 = x_3 = 0.$$

Podemos tomar $\vec{e}'_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Para hallar $\vec{e}'_2$ calculamos $Ker[(f-5id)^2+9id]$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 25 & 25 & 25 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad x_1+x_2+x_3=0$$

Tomando $\vec{e}'_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, obtenemos:

$$\vec{e}'_3 = \tfrac{1}{3}(f-5id)(\vec{e}'_2) = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Así resulta:

$$\varepsilon' = \{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \}.$$

Se puede comprobar que la matriz del cambio de base P de ε' a ε satisface $P^{-1}MP = J_f$:

$$P^{-1}MP = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1/2 & 0 & -1/2 \\ -1/2 & 0 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & -7 \\ -3 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -3 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

□

Problema 3.2 *Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ de dimensión 4.*

a) *Sea f un endomorfismo de V con polinomio característico:*

$$\chi_f(t) = (t-2)^2(t^2+1) \qquad \textit{y tal que:} \qquad rg(f-2id) = 3.$$

Hallar la forma de Jordan de f para $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ y $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

b) *Sea g el endomorfismo de $V_4(\mathbb{R})$ con matriz respecto a la base canónica ε:*

$$M_\varepsilon(g) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Estudiar si f y g son linealmente equivalentes.

Solución:

a) Por ser las raíces del polinomio característico: $\lambda = 2$, con multiplicidad 2 y $\lambda = \pm i$, tenemos que considerar de forma distinta la matriz de Jordan en el caso real y en el caso complejo.

Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ se admiten los autovalores complejos, luego la forma de Jordan es:

$$J_f = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ \epsilon & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \end{pmatrix},$$

donde $\epsilon = 1$ ó 0, dependiendo de la dimensión del autoespacio asociado al autovalor $\lambda = 2$. Como $rg(f-2id) = 3$, se tiene que $dim[Ker(f-2id)] = 1$, luego $\epsilon = 1$ y se obtiene:

$$J_f = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \end{pmatrix}.$$

Para $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, cuando se tienen autovalores complejos de la forma $\alpha \pm i\beta$ como raíces del polinomio $(\alpha - t)^2 + \beta^2$, la matriz de Jordan es:

$$\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}.$$

Aquí tenemos como autovalores complejos conjugados $\alpha \pm i\beta = \pm i$, por lo que la matriz de Jordan de f en el espacio vectorial real es:

$$J_f = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

b) Los endomorfismos f y g no son linealmente equivalentes pues el invariante lineal:

$$rg(f - 2id) = 3, \qquad rg(g - 2id) = 2,$$

no coincide. Por otra parte, puede observarse que la matriz de g dada es ya una matriz de Jordan y no es semejante a la matriz de Jordan de f para el caso real. Sin embargo, nótese que ambos endomorfismos tienen el mismo polinomio característico, lo que prueba que el polinomio característico no es un invariante completo para la clasificación lineal de endomorfismos. Dicho de otro modo, si dos endomorfismos son linealmente equivalentes, han de tener el mismo polinomio característico, pero ésta es una condición necesaria, no suficiente.

$\square$

Problema 3.3 *Sea f un endomorfismo de un espacio vectorial real de dimensión 4, $V_4(\mathbb{R})$. Sea ε una base de $V_4(\mathbb{R})$ respecto a la cual:*

$$M_\varepsilon(f) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & -1 \\ 1 & 3 & -4 & -3 \\ 0 & -4 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \qquad [\chi_f(\lambda) = (\lambda+1)^2(\lambda^2+4)].$$

a) *Hallar la matriz de Jordan J_f de f.*

b) *Explicar cómo obtener una base ε' de $V_4(\mathbb{R})$, tal que $M_{\varepsilon'}(f) = J_f$.*

Solución:

a) Como el polinomio característico de f es $\chi_f(t) = (t+1)^2(t^2+4)$, sus raíces corresponden a los autovalores:

$$\begin{cases} \lambda = -1 & \text{doble,} \\ \lambda = \pm 2i & \text{complejos conjugados.} \end{cases}$$

Por tratarse de un espacio vectorial real y haber autovalores complejos, la matriz J_f tiene la forma:

$$J_f = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ \epsilon & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{donde } \epsilon = 1 \text{ ó } 0.$$

Para determinar ϵ calculamos la dimensión del subespacio $Ker(f + id)$ (o de manera equivalente, el rango $rg(f + id)$):

$$Ker(f + id) = \{\vec{w} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \text{ tales que } (f + id)(\vec{w}) = \vec{0}\}.$$

Obtenemos:

$$Ker(f + id) := (x = 0,\ y = z,\ t = 0)$$

y $dim[Ker(f + id)] = 1$ (equivalentemente, $rg(f + id) = rg(J_f + I) = 3$, donde I denota la matriz identidad). Así tenemos que $\epsilon = 1$ y:

$$J_f = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

b) Denotemos por $\varepsilon' = \{\vec{e}'_1,\ \vec{e}'_2,\ \vec{e}'_3,\ \vec{e}'_4\}$ la base de $V_4(\mathbb{R})$ para la cual $M_{\varepsilon'}(f) = J_f$, es decir, el endomorfismo f está representado, respecto de la base ε', por la matriz de Jordan J_f.

Si analizamos la matriz J_f, podemos conocer la imagen por J_f de los vectores de ε' y, de este modo, las condiciones que han de satisfacer los vectores $\{\vec{e}'_1,\ \vec{e}'_2,\ \vec{e}'_3,\ \vec{e}'_4\}$:

$$J_f = \begin{array}{cccc} \left(\begin{array}{c} \boxed{\begin{array}{r} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{array}} \end{array} \right. & \boxed{\begin{array}{r} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{array}} & \boxed{\begin{array}{r} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{array}} & \left. \boxed{\begin{array}{r} 0 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{array}} \right) \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ J_f(\vec{e}\,'_1) & J_f(\vec{e}\,'_2) & J_f(\vec{e}\,'_3) & J_f(\vec{e}\,'_4) \end{array}$$

Las condiciones vienen dadas por las igualdades:

$$\left\{ \begin{array}{llcl} \mathbf{1}) & J_f(\vec{e}\,'_1) = -\vec{e}\,'_1 + \vec{e}\,'_2 & \Longrightarrow & \vec{e}\,'_2 = (J_f + I)(\vec{e}\,'_1) \\ \mathbf{2}) & J_f(\vec{e}\,'_2) = -\vec{e}\,'_2 & \Longrightarrow & \vec{0} = (J_f + I)(\vec{e}\,'_2) \\ \mathbf{3}) & J_f(\vec{e}\,'_3) = 2\vec{e}\,'_4 & \Longrightarrow & \vec{e}\,'_4 = \frac{1}{2} J_f(\vec{e}\,'_3) \\ \mathbf{4}) & J_f(\vec{e}\,'_4) = -2\vec{e}\,'_3 & \Longrightarrow & \vec{e}\,'_3 = -\frac{1}{2} J_f(\vec{e}\,'_4) \end{array} \right.$$

A partir de **1)** y **2)** tenemos:

$$\vec{0} = (J_f + I)(\vec{e}\,'_2) = (J_f + I)^2(\vec{e}\,'_1).$$

A partir de **3)** y **4)** tenemos:

$$\vec{e}\,'_3 = -\tfrac{1}{2} J_f(\vec{e}\,'_4) = -\tfrac{1}{2} J_f[\tfrac{1}{2} J_f(\vec{e}\,'_3)] = -\tfrac{1}{4} J_f^2(\vec{e}\,'_3).$$

Obtenemos así las siguientes condiciones para ε':

$$\boxed{\left\{ \begin{array}{l} \vec{e}\,'_1 \in Ker(f + id)^2 - Ker(f + id) \\ \vec{e}\,'_2 = (f + id)(\vec{e}\,'_1) \\ \vec{e}\,'_3 \in Ker(f^2 + 4id) \\ \vec{e}\,'_4 = \frac{1}{2} f(\vec{e}\,'_3) \end{array} \right.}$$

Obsérvese que la condición $\vec{e}\,'_1 \notin Ker(f + id)$ es necesaria para evitar que $\vec{e}\,'_2$ sea el vector $\vec{0}$, que no puede formar parte de una base.

$\square$

Problema 3.4 *Sea f el endomorfismo de $V_4(\mathbb{R})$ con matriz respecto a la base canónica ε:*

$$M_\varepsilon(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

a) *Hallar la matriz de Jordan J_f de f.*

b) *Hallar una base ε' tal que $M_{\varepsilon'}(f) = J_f$.*

Solución:

a) Mediante el cálculo del determinante $|M_\varepsilon(f) - \lambda I|$ obtenemos el polinomio característico del endomorfismo f, $\chi_f(\lambda) = (1-\lambda)^2(1+\lambda)^2$, cuyas raíces corresponden a los autovalores de f:

- $\lambda_1 = 1$ con multiplicidad 2,
- $\lambda_2 = -1$ con multiplicidad 2.

Esto nos permite ya afirmar que la matriz de Jordan de f tiene la forma:

$$J_f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \epsilon_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_2 & -1 \end{pmatrix},$$

y falta determinar los valores 0 ó 1 de ϵ_1 y ϵ_2. Para encontrar estos valores necesitamos averiguar las dimensiones de los autoespacios asociados a cada uno de los autovalores.

Para $\lambda_1 = 1$, el autoespacio asociado es $Ker(M - I)$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow dim[Ker(M - I)] = 1 \text{ y } \epsilon_1 = 1.$$

Para $\lambda_2 = -1$, calculamos $Ker(M + I)$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = x_3 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \; dim[Ker(M + I)] = 2 \text{ y } \epsilon_2 = 0.$$

Así, la matriz de Jordan de f es:

$$J_f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

b) Sea $\varepsilon' = \{\vec{e}'_1,\ \vec{e}'_2,\ \vec{e}'_3,\ \vec{e}'_4\}$ la base de $V_4(\mathbb{R})$ respecto a la cual la matriz del endomorfismo f es la matriz de Jordan hallada, es decir, $M_{\varepsilon'}(f) = J_f$. A través de J_f, obtenemos las condiciones de los vectores de ε':

$$\begin{cases} \vec{e}'_1 \in Ker(M - I)^2 - Ker(M - I) \\ \vec{e}'_2 = (M - I)(\vec{e}'_1) \quad \Rightarrow \; \vec{e}'_2 \in Ker(M - I) \\ \vec{e}'_3 \in Ker(M + I) \\ \vec{e}'_4 \in Ker(M + I), \end{cases}$$

donde además $\vec{e}'_3$ y $\vec{e}'_4$ han de ser linealmente independientes.

Calculamos $Ker(M - I)^2$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

Tomemos $\vec{e}'_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, que no pertenece a $Ker(M - I)$.