ÍNDICE

UNIDAD DIDÁCTICA 2

UNIDAD DIDÁCTICA 3

TOMO II
UNIDAD DIDÁCTICA 4

UNIDAD DIDÁCTICA 5

UNIDAD DIDÁCTICA 6

TEMA I
INTRODUCCIÓN A LAS ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS

ESQUEMA/RESUMEN

1.1. Definiciones. Ejemplos

1.2. Interpretación geométrica. Curvas integrales

1.3. Ecuación diferencial de un haz de curvas planas

Tras definir la e.d.o. de grado n, se ponen ejemplos.

Se estudia el significado geométrico de las e.d.o. del tipo:

$$P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = 0$$

viendo que las rectas tangentes a las curvas-solución son de la forma:

$$(x - x_0)P(x_0, y_0) = (y - y_0)Q(x_0, y_0)$$

Finalmente, se trata de la obtención de la e.d. asociada a una familia de curvas de la forma:

$$F(x, y, C) = 0$$

1.1. DEFINICIONES. EJEMPLOS

Una ecuación diferencial ordinaria de orden n es, por definición, una relación de la forma

$$F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0, \tag{1}$$

en donde F es una función de $n + 2$ variables, definida en un dominio D (conjunto abierto y conexo) del espacio euclídeo $(n + 2)$-dimensional, x es una variable independiente, y es una función de x e y', y'', ..., $y^{(n)}$ son las derivadas de y hasta la de orden n. La palabra «ordinaria» significa aquí que en (1) sólo entra una variable independiente.

Una función $f(x)$, definida en el intervalo abierto $]a, b[$, $a < b$, en donde a o b pueden tomar valores infinitos, que admite derivadas hasta la de orden n en dicho intervalo, se dice que es una solución o una integral de la ecuación diferencial (1) si para cada x del intervalo $]a, b[$ el punto

$$(x, f(x), f'(x), ..., f^{(n)}(x))$$

está en D, y al sustituir en (1) y por $f(x)$, y' por $f'(x)$, ..., $y^{(n)}$ por $f^{(n)}(x)$, dicha relación se reduce a una identidad.

Resolver o integrar una ecuación diferencial ordinaria es obtener las soluciones de dicha ecuación.

Si una ecuación diferencial ordinaria puede ponerse en la forma.

$$y^{(n)} = G(x, y, y', ..., y^{(n-1)}),$$

en donde G es una función de $n + 1$ variables, definida en un dominio del espacio euclídeo $n + 1$-dimensional, se dice que dicha ecuación está en forma normal.

Ejemplo 1

La ecuación diferencial ordinaria

$$F(x, y, y', y'') \equiv 4 - 4x^2 + y'^2 - y''^2 = 0$$

es de segundo orden, de manera que la función F está definida en el dominio formado por todos los puntos del espacio euclídeo de dimensión 4. La función $f(x) \equiv x^2$, definida en el intervalo $]-\infty, \infty[$, es una solución, puesto que admite derivadas hasta la de segundo orden y si se sustituye en $F(x, y, y', y'')$ y por x^2, y' por $2x$ e y'' por 2, se tiene

$$4 - 4x^2 + (2x)^2 - 2^2 = 0$$

Ejemplo 2

La ecuación diferencial ordinaria

$$y' = xy - x^2 + 1$$

es de primer orden y está puesta en forma normal. La función $f(x) \equiv x$, definida en el intervalo $]-\infty, +\infty[$ es una solución de dicha ecuación.

Ejemplo 3

La ecuación diferencial ordinaria

$$y' = 3x^2 + 2x - 1$$

es de primer orden y está puesta en forma normal. Para resolverla basta con efectuar una cuadratura. Se obtiene entonces

$$y = \int (3x^2 + 2x - 1)\,dx = x^3 + x^2 - x + C.$$

Al darle al parámetro C todos los valores reales posibles se obtienen las infinitas soluciones de la ecuación dada.

Ejemplo 4

Una partícula se mueve en el eje OX con una velocidad definida por la función continua $f(t)$, en donde t es el tiempo. Si para el instante t_0 la posición de la partícula es x_0, veamos cuál es la posición de dicha partícula en cualquier instante t.

Puesto que la velocidad sobre el eje OX es la derivada de la abscisa con respecto al tiempo se tiene que

$$\frac{dx}{dt} = f(t),$$

de donde se deduce fácilmente que

$$x = \int_{t_0}^{t} f(u)\,du + C.$$

Puesto que, para $t = t_0$, x toma el valor x_0, resulta que

$$x_0 = x(t_0) = \int_{t_0}^{t_0} f(u)\,du + C \quad \Rightarrow \quad c = x_0$$

$$x = \int_{t_0}^{t} f(u)\,du + x_0.$$

)u'

1.2. INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA. CURVAS INTEGRALES

Consideremos la expresión

$$P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = 0, \tag{1}$$

en donde $P(x, y)$ y $Q(x, y)$ son funciones continuas en un dominio D del plano euclídeo, de manera que $P(x, y)$ y $Q(x, y)$ no se anulen simultáneamente en D. Si en un subdominio D_1 de D no se anula $Q(x, y)$ entonces podemos obtener de (1) la ecuación diferencial ordinaria de primer orden

$$y' = -\frac{P(x, y)}{Q(x, y)}, \tag{2}$$

Análogamente si en un subdominio D_2 de D, $P(x, y)$ no toma el valor cero, se obtiene de (2) la ecuación diferencial

$$x' = \frac{Q(x, y)}{P(x, y)}$$

en donde x es la función e y la variable independiente.

Dado un punto cualquiera (x, y) de D consideramos la recta que pasa por (x, y), de parámetros directores $(Q(x, y), -P(x, y))$. De esta manera a cada punto de D le queda asociada una recta y se tiene definido un campo de rectas en dicho dominio.

Se dice que una curva $f(x, y) = 0$ es una curva integral o solución de (1), si la gráfica de $f(x, y) = 0$ está contenida en D y en cada punto de ella, (x, y) la recta asociada es tangente a la curva en dicho punto. Obviamente, si se tiene una solución $y = y(x)$ de (2), la curva que representa esta solución es una curva integral de (1). Análogamente se tiene para cada solución $x = x(y)$ de (3).

Ejemplo 1

Sea la ecuación

$$x\,dy - y\,dx = 0.$$

En este caso, $P(x, y) = -y$, $Q(x, y) = x$, están definidas, son continuas y no se anulan simultáneamente en el dominio D formado por todo el plano euclídeo excepto el origen $(0, 0)$. Dado el punto $(x_0, y_0) \in D$, la recta asociada a él tiene por ecuación

$$(x - x_0)y_0 - (y - y_0)x_0 = 0,$$

o también

$$y_0x - x_0y = 0$$

y, por lo tanto, todas las rectas del campo asociado a la ecuación diferencial dada pasan por el origen, como indica la figura 1. Para x distinto de cero podemos poner la ecuación dada en la forma

$$\frac{x\,dy - y\,dx}{x^2} = 0,$$

de donde se deduce

$$d\,\frac{y}{x} = 0,$$

y de aquí $\frac{y}{x} = C$, o sea, $y - Cx = 0$, $y = Cx$.