

ÍNDICE

PRÓLOGO.....	13
BREVE INTRODUCCIÓN HISTÓRICA.....	17
OBSERVACIONES GENERALES.....	23

TOMO I UNIDAD DIDÁCTICA 1

TEMA I.	Introducción a las ecuaciones diferenciales ordinarias.....	27
	1.1. Definiciones. Ejemplos.....	29
	1.2. Interpretación geométrica. Curvas integrales.....	31
	1.3. Ecuación diferencial de un haz de curvas planas.....	34
	Ejercicios de autocomprobación con soluciones.....	37
TEMA II.	Métodos elementales de integración de ecuaciones diferenciales (I).....	43
	2.1. Ecuaciones de variables separadas.....	45
	2.2. Ecuaciones homogéneas.....	49
	2.3. Ecuaciones reducibles a homogéneas.....	53
	Ejercicios de autocomprobación con soluciones.....	59
TEMA III.	Métodos elementales de integración de ecuaciones diferenciales (II).....	83
	3.1. Ecuación lineal.....	85
	3.2. Ecuación de Bernoulli.....	94

	3.3. Ecuación de Ricati.....	101
	Ejercicios de autocomprobación con soluciones.....	104
TEMA IV.	Métodos elementales de integración de ecuaciones diferenciales (III).....	125
	4.1. Condición necesaria para que una ecuación sea diferencial exacta.....	127
	4.2. Condición suficiente para que una ecuación sea diferencial exacta.....	130
	Ejercicios de autocomprobación con soluciones.....	136
TEMA V.	Métodos elementales de integración de ecuaciones diferenciales (IV).....	139
	5.1. Integración de ecuaciones diferenciales exactas.....	141
	5.2. Factores integrantes.....	143
	Ejercicios de autocomprobación con soluciones.....	147
TEMA VI.	Métodos elementales de integración de ecuaciones diferenciales (V).....	157
	6.1. Cociente de factores integrantes.....	159
	6.2. Diversos tipos de factores integrantes.....	161
	Ejercicios de autocomprobación con soluciones.....	169
BIBLIOGRAFÍA.....		179
PRUEBA OBJETIVA.....		181

UNIDAD DIDÁCTICA 2

TEMA I.	Ecuaciones de primer orden no lineales en y' (I).....	185
	1.1. Ecuación de Lagrange.....	187
	1.2. Ecuación de Clairaut.....	192
	1.3. Ecuaciones resolubles en y o en x	195
	Ejercicios de autocomprobación con soluciones.....	199
TEMA II.	Ecuaciones de primer orden no lineales en y' (II).....	215
	2.1. Ecuaciones en las que falta la x o la y	217
	2.2. Ecuaciones homogéneas.....	223
	Ejercicios de autocomprobación con soluciones.....	227
TEMA III.	Aplicaciones geométricas.....	235
	3.1. Problemas de trayectorias.....	237
	3.2. Curvas de nivel y líneas de máxima pendiente sobre una superficie.....	244
	Ejercicios de autocomprobación con soluciones.....	248
TEMA IV.	Ecuaciones diferenciales de orden superior (I).....	257
	4.1. Ecuaciones que no contienen la variable y	259
	4.2. Ecuaciones que no contienen la variable x	264

4.3. Ecuaciones que contienen solamente dos derivadas cuyos órdenes difieran en dos unidades.....	265
Ejercicios de autocomprobación con soluciones.....	268
TEMA V. Ecuaciones diferenciales de orden superior (II).....	279
5.1. Ecuaciones diferenciales exactas.....	281
5.2. Ecuaciones homogéneas.....	283
Ejercicios de autocomprobación con soluciones.....	288
TEMA VI. Problemas geométricos de ecuaciones diferenciales.....	293
BIBLIOGRAFÍA.....	318
PRUEBA OBJETIVA.....	320

UNIDAD DIDÁCTICA 3

TEMA I. Estudio de la existencia de soluciones en las ecuaciones diferenciales.....	323
1.1. Sucesiones equicontinuas de funciones.....	325
1.2. Teorema de Ascoli.....	329
1.3. Teorema de existencia de Peano.....	330
TEMA II. Teoremas de existencia y unicidad de soluciones en las ecuaciones diferenciales.....	337
2.1. Método de Picard.....	339
2.2. Método de las aplicaciones contractivas.....	344
2.3. Teorema de Cauchy.....	349
TEMA III. Estudio de la existencia y soluciones en los sistemas de ecuaciones diferenciales.....	353
3.1. Ecuaciones diferenciales de orden superior y sus sistemas.....	355
3.2. Teorema de existencia de Peano.....	356
TEMA IV. Teoremas de existencia y unicidad de soluciones en los sistemas de ecuaciones diferenciales.....	365
4.1. Método de Picard.....	367
4.2. Método de las aplicaciones contractivas.....	373
4.3. Teorema de Cauchy.....	376
TEMA V. Dependencia de los datos.....	381
5.1. Variación de las condiciones iniciales.....	383
5.2. Variación de la función.....	392
TEMA VI. Derivación con respecto a los datos iniciales.....	397
6.1. Derivación con respecto a la ordenada.....	399
6.2. Derivación con respecto a la abscisa.....	402
BIBLIOGRAFÍA.....	405
ÍNDICE TERMINOLÓGICO.....	407

TOMO II
UNIDAD DIDÁCTICA 4

TEMA I.	Prolongación de las soluciones en las ecuaciones diferenciales..	15
	1.1. Intervalo máximo de existencia de una solución.....	17
	1.2. Prolongación de soluciones en el caso de dominios acotados.....	21
	1.3. Soluciones de los sistemas lineales de ecuaciones diferenciales.....	27
TEMA II.	Sistemas de ecuaciones diferenciales lineales (I).....	35
	2.1. Propiedades de las soluciones en un sistema lineal y homogéneo.....	37
	2.2. Fórmula de Liouville.....	40
	2.3. Reducción de orden de un sistema lineal y homogéneo...	42
TEMA III.	Sistemas de ecuaciones diferenciales lineales (II).....	51
	3.1. Método de variación de los parámetros.....	53
	3.2. Forma matricial de un sistema de ecuaciones diferenciales lineales.....	57
	3.3. La ecuación lineal de orden n	58
TEMA IV.	Ecuaciones lineales con coeficientes constantes (I).....	63
	4.1. Soluciones complejas de los sistemas de ecuaciones diferenciales lineales.....	65
	4.2. Ecuaciones lineales homogéneas con coeficientes constantes: caso de raíces simples.....	66
	4.3. Determinación de las soluciones reales en el caso de raíces simples.....	72
TEMA V.	Ecuaciones lineales con coeficientes constantes (II).....	85
	5.1. Ecuaciones lineales homogéneas con coeficientes constantes: caso de raíces múltiples.....	87
	5.2. Determinación de las soluciones reales en el caso de raíces múltiples.....	95
	5.3. Ecuación lineal no homogénea con coeficientes constantes.	97
TEMA VI.	Ecuaciones lineales con coeficientes constantes (III).....	117
	6.1. Sistemas de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes: método de eliminación.....	119
	6.2. Ecuación de Euler.....	122

UNIDAD DIDÁCTICA 5

TEMA I.	Soluciones de los sistemas de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes (I).....	131
	1.1. Funciones casipolinomiales.....	133
	1.2. Sistemas homogéneos de ecuaciones diferenciales lineales.	135
	1.3. Soluciones reales de los sistemas homogéneos de ecuaciones diferenciales lineales.....	141

TEMA II.	Vectores propios y valores propios en una transformación lineal..	167
	2.1. Determinación de los valores propios y de los vectores propios.....	169
	2.2. Propiedades de los vectores propios.....	175
	2.3. Diagonalización de una matriz.....	177
TEMA III.	Estudio del polinomio característico.....	183
	3.1. Teorema de Cayley-Hamilton.....	185
	3.2. Reducción de una matriz a forma casidiagonal.....	187
TEMA IV.	Reducción de una matriz a forma canónica.....	193
	4.1. Estudio de las transformaciones lineales nilpotentes.....	195
	4.2. Teorema de Jordan.....	197
TEMA V.	Soluciones de los sistemas de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes (II).....	205
	5.1. Caso de raíces simples de la ecuación característica.....	207
	5.2. Caso de raíces múltiples de la ecuación característica.....	211
TEMA VI.	Soluciones de los sistemas de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes (III).....	223
	6.1. Utilización de las series de matrices para la resolución de sistemas de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes.....	225

UNIDAD DIDÁCTICA 6

TEMA I.	La ecuación lineal y homogénea de segundo orden.....	239
	1.1. Forma normal para la ecuación lineal y homogénea.....	241
	1.2. Teoremas de Sturm.....	244
TEMA II.	El problema de Sturm-Liouville (I).....	255
	2.1. Sistema de Sturm-Liouville.....	257
	2.2. Reducción del sistema de Sturm-Liouville a forma normal.....	262
TEMA III.	El problema de Sturm-Liouville (II).....	267
	3.1. Proposiciones previas al teorema de oscilación.....	269
	3.2. El teorema de oscilación.....	284
TEMA IV.	Estudio de la función de Green.....	291
	4.1. Función de Green.....	293
	4.2. Utilización de la función de Green.....	299
TEMA V.	La ecuación diferencial de Legendre.....	311
	5.1. Desarrollo de una solución en serie.....	313
	5.2. Ecuación de Legendre.....	318
TEMA VI.	La ecuación diferencial de Bessel.....	327
	6.1. Singularidades regulares.....	329
	6.2. La ecuación de Bessel.....	330
BIBLIOGRAFÍA.....		339
ÍNDICE TERMINOLÓGICO.....		341

TEMA I

INTRODUCCIÓN A LAS ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS

ESQUEMA/RESUMEN

- 1.1. Definiciones. Ejemplos
- 1.2. Interpretación geométrica. Curvas integrales
- 1.3. Ecuación diferencial de un haz de curvas planas

Tras definir la e.d.o. de grado n , se ponen ejemplos.

Se estudia el significado geométrico de las e.d.o. del tipo:

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$$

viendo que las rectas tangentes a las curvas-solución son de la forma:

$$(x - x_0)P(x_0, y_0) = (y - y_0)Q(x_0, y_0)$$

Finalmente, se trata de la obtención de la e.d. asociada a una familia de curvas de la forma:

$$F(x, y, C) = 0$$

1.1. DEFINICIONES. EJEMPLOS

Una ecuación diferencial ordinaria de orden n es, por definición, una relación de la forma

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0, \quad (1)$$

en donde F es una función de $n + 2$ variables, definida en un dominio D (conjunto abierto y conexo) del espacio euclídeo $(n + 2)$ -dimensional, x es una variable independiente, y es una función de x e $y', y'', \dots, y^{(n)}$ son las derivadas de y hasta la de orden n . La palabra «ordinaria» significa aquí que en (1) sólo entra una variable independiente.

Una función $f(x)$, definida en el intervalo abierto $]a, b[$, $a < b$, en donde a o b pueden tomar valores infinitos, que admite derivadas hasta la de orden n en dicho intervalo, se dice que es una solución o una integral de la ecuación diferencial (1) si para cada x del intervalo $]a, b[$ el punto

$$(x, f(x), f'(x), \dots, f^{(n)}(x))$$

está en D , y al sustituir en (1) y por $f(x)$, y' por $f'(x)$, ..., $y^{(n)}$ por $f^{(n)}(x)$, dicha relación se reduce a una identidad.

Resolver o integrar una ecuación diferencial ordinaria es obtener las soluciones de dicha ecuación.

Si una ecuación diferencial ordinaria puede ponerse en la forma.

$$y^{(n)} = G(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}),$$

en donde G es una función de $n + 1$ variables, definida en un dominio del espacio euclídeo $n + 1$ -dimensional, se dice que dicha ecuación está en forma normal.

Ejemplo 1

La ecuación diferencial ordinaria

$$F(x, y, y', y'') \equiv 4 - 4x^2 + y'^2 - y''^2 = 0$$

es de segundo orden, de manera que la función F está definida en el dominio formado por todos los puntos del espacio euclídeo de dimensión 4. La función $f(x) \equiv x^2$, definida en el intervalo $] -\infty, \infty [$, es una solución, puesto que admite derivadas hasta la de segundo orden y si se sustituye en $F(x, y, y', y'')$ y por x^2 , y' por $2x$ e y'' por 2 , se tiene

$$4 - 4x^2 + (2x)^2 - 2^2 = 0$$

Ejemplo 2

La ecuación diferencial ordinaria

$$y' = xy - x^2 + 1$$

es de primer orden y está puesta en forma normal. La función $f(x) \equiv x$, definida en el intervalo $] -\infty, +\infty [$ es una solución de dicha ecuación.

Ejemplo 3

La ecuación diferencial ordinaria

$$y' = 3x^2 + 2x - 1$$

es de primer orden y está puesta en forma normal. Para resolverla basta con efectuar una cuadratura. Se obtiene entonces

$$y = \int (3x^2 + 2x - 1) dx = x^3 + x^2 - x + C.$$

Al darle al parámetro C todos los valores reales posibles se obtienen las infinitas soluciones de la ecuación dada.

Ejemplo 4

Una partícula se mueve en el eje OX con una velocidad definida por la función continua $f(t)$, en donde t es el tiempo. Si para el instante t_0 la

posición de la partícula es x_0 , veamos cuál es la posición de dicha partícula en cualquier instante t .

Puesto que la velocidad sobre el eje OX es la derivada de la abscisa con respecto al tiempo se tiene que

$$\frac{dx}{dt} = f(t),$$

de donde se deduce fácilmente que

$$x = \int_{t_0}^t f(u) du + C.$$

Puesto que, para $t = t_0$, x toma el valor x_0 , resulta que

$$x_0 = x(t_0) = \int_{t_0}^{t_0} f(u) du + C \Rightarrow c = x_0$$

$$x = \int_{t_0}^t f(u) du + x_0.$$

1.2. INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA. CURVAS INTEGRALES

Consideremos la expresión

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0, \quad (1)$$

en donde $P(x, y)$ y $Q(x, y)$ son funciones continuas en un dominio D del plano euclídeo, de manera que $P(x, y)$ y $Q(x, y)$ no se anulen simultáneamente en D . Si en un subdominio D_1 de D no se anula $Q(x, y)$ entonces podemos obtener de (1) la ecuación diferencial ordinaria de primer orden

$$y' = -\frac{P(x, y)}{Q(x, y)}, \quad (2)$$

Análogamente si en un subdominio D_2 de D , $P(x, y)$ no toma el valor cero, se obtiene de (2) la ecuación diferencial

$$x' = \frac{Q(x, y)}{P(x, y)}$$

en donde x es la función e y la variable independiente.

Dado un punto cualquiera (x, y) de D consideramos la recta que pasa por (x, y) , de parámetros directores $(Q(x, y), -P(x, y))$. De esta manera a cada punto de D le queda asociada una recta y se tiene definido un campo de rectas en dicho dominio.

Se dice que una curva $f(x, y) = 0$ es una curva integral o solución de (1), si la gráfica de $f(x, y) = 0$ está contenida en D y en cada punto de ella, (x, y) la recta asociada es tangente a la curva en dicho punto. Obviamente, si se tiene una solución $y = y(x)$ de (2), la curva que representa esta solución es una curva integral de (1). Análogamente se tiene para cada solución $x = x(y)$ de (3).

Ejemplo 1

Sea la ecuación

$$x dy - y dx = 0.$$

En este caso, $P(x, y) = -y$, $Q(x, y) = x$, están definidas, son continuas y no se anulan simultáneamente en el dominio D formado por todo el plano euclídeo excepto el origen $(0, 0)$. Dado el punto $(x_0, y_0) \in D$, la recta asociada a él tiene por ecuación

$$(x - x_0)y_0 - (y - y_0)x_0 = 0,$$

o también

$$y_0x - x_0y = 0$$

y, por lo tanto, todas las rectas del campo asociado a la ecuación diferencial dada pasan por el origen, como indica la figura 1. Para x distinto de cero podemos poner la ecuación dada en la forma

$$\frac{x dy - y dx}{x^2} = 0,$$

de donde se deduce

$$d \frac{y}{x} = 0,$$

y de aquí $\frac{y}{x} = C$, o sea, $y - Cx = 0$, $y = Cx$.