TEMA I

ESPACIOS TOPOLOGICOS

ESQUEMA/RESUMEN

1.1. Bases de entornos abiertos en los puntos de un conjunto.

1.2. Conjuntos abiertos. Topología en un conjunto.

1.3. Bases de entornos abiertos equivalentes.

1.4. Propiedades de una topología.

1.5. Espacio topológico.

1.6. Conjuntos cerrados en una topología.

TEMA II

BASE DE UNA TOPOLOGIA

ESQUEMA/RESUMEN

2.1. Base de una topología.

2.2. Segundo axioma de numerabilidad.

2.3. Condiciones para que una familia de conjuntos sea base de una topología.

2.4. Topología engendrada por una familia cualquiera de subconjuntos.

TEMA III

ENTORNOS EN UN ESPACIO TOPOLOGICO

ESQUEMA/RESUMEN

3.1. Entornos de un punto en un espacio topológico.

3.2. Base de entornos de un punto en un espacio topológico, o sistema fundamental de entornos.

3.3. Primer axioma de numerabilidad.

TEMA IV

SUBCONJUNTOS EN UN ESPACIO TOPOLOGICO

ESQUEMA/RESUMEN

4.1. Clasificación de los puntos de un espacio topológico en relación con un subconjunto.

4.2. Interior de un conjunto.

43. Adherencia o cierre de un conjunto.

4.4. Puntos de acumulación y puntos aislados de un conjunto.

4.5. Subconjunto denso.

TEMA V

SUCESIONES. LIMITES DE SUCESIONES

ESQUEMA/RESUMEN

5.1. Sucesiones.

5.2. Base de filtro en un conjunto.

5.3. Límite de una sucesión y de una base de filtro en un espacio topológico.

5.4. Espacios topológicos separados T_2, o espacios de Hausdorff.

5.5. Puntos de aglomeración de una sucesión.

TEMA VI

APLICACIONES CONTINUAS. HOMEOMORFISMOS

ESQUEMA/RESUMEN

6.1. Aplicaciones continuas en un punto.

6.2. Aplicaciones continuas en todo el espacio.

6.3. Composición de aplicaciones continuas.

6.4. Homeomorfismos.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE
EDUCACION A DISTANCIA

TOPOLOGIA

CONSTRUCCION DE ESPACIOS TOPOLOGICOS

UNIDAD DIDACTICA/2

Preparada por:
Dr. D. Joaquín Arregui Fernández

TEMA I

TOPOLOGIA INDUCIDA POR UNA O VARIAS APLICACIONES

ESQUEMA/RESUMEN

1.1. Topología inducida por una aplicación.

1.2. Propiedades de la Topología inducida por una aplicación.

1.3. Propiedad universal de la Topología inducida por una aplicación.

1.4. Topología inducida por la composición de aplicaciones.

1.5. Topología inducida por varias aplicaciones.

1.6. Propiedad universal de la Topología inicial de varias aplicaciones.

TEMA II

TOPOLOGIA RELATIVA. SUBESPACIO TOPOLOGICO

ESQUEMA/RESUMEN

2.1. Topología relativa. Subespacio topológico.

2.2. Propiedades de la topología relativa de un subespacio.

2.3. Continuidad de aplicaciones en relación con subespacios.

2.4. Propiedades hereditarias.

2.5. Subespacios de un espacio métrico.

TEMA III

TOPOLOGIA PRODUCTO. PRODUCTO TOPOLOGICO DE ESPACIOS

ESQUEMA/RESUMEN

3.1. Topología producto. Producto topológico de espacios.

3.2. Abiertos de la Topología producto.

3.3. Propiedades de la Topología producto.

3.4. Continuidad de aplicaciones en relación con la Topología producto.

3.5. Base de entornos de un punto.

3.6. Propiedades multiplicativas.

3.7. Producto de espacios métricos.

3.8. Producto de n espacios topológicos.

TEMA IV

TOPOLOGIA FINAL PARA UNA Y VARIAS APLICACIONES

ESQUEMA/RESUMEN

4.1. Topología final para una aplicación.

4.2. Propiedades de la topología final para una aplicación.

4.3. Propiedad universal de la topología final para una aplicación.

4.4. Topología final y composición de aplicaciones.

4.5. Topología final para una familia de aplicaciones.

4.6. Propiedad universal de la topología final de varias aplicaciones.

TEMA V

TOPOLOGIA COCIENTE

ESQUEMA/RESUMEN

5.1. Acerca de la relación de equivalencia en un conjunto.

5.2. Topología cociente.

5.3. Propiedades de la topología cociente.

5.4. Descomposición canónica de una aplicación continua.

5.5. Transitividad de espacios cocientes.

TEMA VI

TOPOLOGIA SUMA

ESQUEMA/RESUMEN

6.1. Suma disjunta de conjuntos.

6.2. Suma de espacios topológicos. Topología suma.

6.3. Propiedades de la topología suma.

6.4. Topología coherente con una familia de espacios

UNIVERSIDAD NACIONAL DE EDUCACION A DISTANCIA

TOPOLOGIA

UNIDAD DIDACTICA/3

Preparada por:

Dr. D. Joaquín Arregui Fernández

TEMA I

ESPACIOS COMPACTOS

ESQUEMA/RESUMEN

1.1. Definición de espacio compacto.

1.2. Caracterización de espacios compactos por medio de cerrados.

1.3. Caracterización de espacios compactos por medio de bases de filtro.

1.4. Sucesiones en un espacio compacto.

1.5. Conjuntos infinitos en un espacio compacto.

1.6. Aplicaciones continuas definidas en un espacio compacto.

TEMA II

SUBCONJUNTOS COMPACTOS DE UN ESPACIO TOPOLOGICO

ESQUEMA/RESUMEN

2.1. Subconjuntos compactos de un espacio topológico.

2.2. Propiedades de los subconjuntos compactos.

2.3. Propiedades de separación de subconjuntos compactos en un espacio de Hausdorff.

2.4. Unión e intersección de subconjuntos compactos.

2.5. Subconjuntos compactos de $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^n$

2.6. Aplicación a funciones numéricas definidas en un espacio compacto.

TEMA III

ESPACIOS METRICOS COMPACTOS

ESQUEMA/RESUMEN

3.1. Propiedades de espacios métricos relacionadas con sucesiones.

3.2. El número ρ de Lebesgue.

3.3. Caracterización de un espacio métrico compacto por sucesiones.

3.4. Sucesiones de Cauchy en espacios métricos compactos.

3.5. Propiedades topológicas de un espacio métrico compacto.

3.6. Aplicaciones continuas definidas en un espacio métrico compacto.

TEMA IV

ESPACIOS LOCALMENTE COMPACTOS

ESQUEMA/RESUMEN

4.1. Espacios localmente compactos.

4.2. Aplicaciones continuas en un espacio localmente compacto.

4.3. Propiedades topológicas de espacios de Hausdorff localmente compactos.

4.4. Subconjuntos localmente compactos.

4.5. Compactificación de $(\mathbb{R}, T_u)$ por medio de dos puntos.

4.6. Compactificación de $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^n$ por punto.

TEMA V

ESPACIOS CONEXOS

ESQUEMA/RESUMEN

TEMA VI

ESPACIOS CONEXOS POR CAMINOS Y ESPACIOS LOCALMENTE CONEXOS

ESQUEMA/RESUMEN

6.1. Espacios conexos por caminos.

6.2. Propiedades de la conexión por caminos.

6.3. Componentes conexas por caminos.

6.4. Espacios localmente conexos.

6.5. Caracterización de los espacios localmente conexos por sus conjuntos abiertos.

6.6. Propiedades de la conexión local.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE EDUCACION A DISTANCIA

TOPOLOGIA

UNIDAD DIDACTICA/4

Preparada por:
Dr. D. Joaquín Arregui Fernández

TEMA I

HOMOTOPIA DE CAMINOS Y DE APLICACIONES CONTINUAS

ESQUEMA/RESUMEN

1.1. Homotopía de caminos en un espacio topológico.

1.2. Clasificación homotópica de caminos.

1.3. Homotopía de caminos relativa a los puntos extremos.

1.4. Producto de caminos.

1.5. Homotopía de aplicaciones continuas.

1.6. Tipo de homotopía de espacios topológicos.

TEMA II

GRUPO FUNDAMENTAL DE HOMOTOPIA DE UN ESPACIO TOPOLOGICO

ESQUEMA/RESUMEN

2.1. Caminos cerrados con un punto base.

2.2. Definición de un producto en $\Pi(X, p)$

2.3. Propiedad asociativa del producto en $\Pi(X, p)$

2.4. Existencia de elemento inverso en $\Pi(X, p)$

2.5. Cambio de punto base.

TEMA III

INVARIANCIA TOPOLOGICA DEL GRUPO FUNDAMENTAL DE HOMOTOPIA

ESQUEMA/RESUMEN

UNIVERSIDAD NACIONAL DE
EDUCACION A DISTANCIA

TOPOLOGIA

GRUPOS ABELIANOS DE TIPO FINITO

UNIDAD DIDACTICA/5

Preparada por:
Dr. D. Joaquín Arregui Fernández

TEMA I

ESQUEMA/RESUMEN

1.1. Sistema de generadores de un grupo abeliano.

1.2. Grupos monógenos.

1.3. Subgrupo de torsión de un grupo abeliano de tipo finito.

1.4. Suma directa de dos subgrupos de un grupo abeliano.

1.5. Suma directa de varios subgrupos de un grupo abeliano.

1.6. Suma directa de una familia finita de grupos abelianos.

TEMA II

ESQUEMA/RESUMEN

2.1. Grupos abelianos libres de tipo finito.

2.2. Rango de un grupo abeliano libre de tipo finito.

2.3. Subgrupos de un grupo abeliano libre de tipo finito.

2.4. Condiciones para que un elemento esté en una base.

2.5. Rango de un grupo abeliano de tipo finito.

TEMA III

ESQUEMA/RESUMEN

3.1. Presentación de un grupo abeliano de tipo finito por medio de generadores y relaciones.

3.2. Sistemas mínimos de generadores en un grupo abeliano de tipo finito.

3.3. Teorema de estructura de los grupos abelianos de tipo finito.

3.4. Método para calcular los coeficientes de torsión y número de Betti de un grupo abeliano de tipo finito.

3.5. Otro método para calcular los coeficientes de torsión y el número de Betti.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE
EDUCACION A DISTANCIA

TOPOLOGIA

GRUPOS DE HOMOLOGIA SIMPLICIAL DE UN POLIEDRO COMPACTO

UNIDAD DIDACTICA/6

Preparada por:
Dr. D. Joaquín Arregui Fernández

TEMA I

COMPLEJO SIMPLICIAL GEOMETRICO ORIENTADO

ESQUEMA/RESUMEN

1.1. Espacio afín. Coordenadas baricéntricas.

1.2. Símplices rectilíneos.

1.3. Complejos simpliciales geométricos finitos.

1.4. Poliedros geométricos.

1.5. Complejos simpliciales geométricos orientados.

TEMA II

GRUPOS DE HOMOLOGIA DE UN COMPLEJO SIMPLICIAL GEOMETRICO ORIENTADO

ESQUEMA/RESUMEN

2.1. Grupos de cadenas orientadas.

2.2. Homomorfismo borde.

2.3. Grupos de homología de un complejo simplicial geométrico orientado.

2.4. Componentes conexas de un complejo. Complejo conexo.

2.5. La conexión de un complejo K y el grupo $H_o(K)$.

2.6. Fórmula de Euller-Poincaré para complejos simpliciales.

TEMA III

POLIEDROS. GRUPOS DE HOMOLOGIA DE POLIEDROS

ESQUEMA/RESUMEN

3.1. Homomorfismos de los grupos de homología inducidos por una aplicación simplicial.

3.2. Subdivisión baricéntrica de un complejo simplicial.

3.3. Aplicaciones continuas entre poliedros geométricos.

3.4. Poliedros curvilíneos compactos.

3.5. Invariancia por homeomorfismos de los grupos de homología de poliedros.

1.1. Bases de entornos abiertos en los puntos de un conjunto

Para introducir el concepto de bases de entornos abiertos en los puntos de un conjunto y por medio de él llegar a la noción de espacio topológico, vamos a situarnos en el conjunto de los números reales y recordar la definición de límite de una sucesión de números reales:

Si $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ es una sucesión de números reales, se dice que el número real p es límite de esta sucesión cuando para cada número real $\varepsilon > 0$ existe un número natural m tal que para todo número natural $n \geqslant m$ es $|p - a_n| < \varepsilon$.

Representando por $(p - \varepsilon, p + \varepsilon)$ el intervalo abierto formado por los números reales t que verifican $p - \varepsilon < t < p + \varepsilon$, es decir, aquellos cuya distancia $|p - t|$ al número p es menor que ε, la definición anterior puede enunciarse así:

Se dice que p es límite de la sucesión de números reales $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ cuando para cada intervalo abierto de números reales $(p - \varepsilon, p + \varepsilon)$, donde ε es un número real positivo, existe un número natural m tal que para todo número natural $n \geqslant m$ se verifica que $a_n \in (p - \varepsilon, p + \varepsilon)$.

En el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales, la distancia entre dos números, definida por el valor absoluto de su diferencia, expresa la idea intuitiva de proximidad entre ellos. Por esto, cuando se considera la familia de los intervalos acotados $(p - \varepsilon, p + \varepsilon)$ con $\varepsilon > 0$, esta familia de conjuntos describe de alguna manera la «proximidad» del punto p en la recta $\mathbb{R}$ de los números reales.

Con la noción de bases de entornos abiertos en los puntos de un conjunto X se va a conseguir expresar una idea de proximidad a cada uno de los puntos p de X sin necesidad de tener o haber definido previamente una distancia entre los puntos del conjunto X. De este modo, con los espacios topológicos, introducidos a partir de la noción de bases de entornos abiertos en los puntos de un conjunto, se conseguirá una formalización matemática, abstracta, que sustituye y generaliza la idea intuitiva de proximidad entre los puntos del conjunto de los números reales.

Este proceso de generalización se va a realizar sustituyendo la familia de intervalos abiertos y acotados $(p - \varepsilon, p + \varepsilon)_{\varepsilon>0}$ que podemos representar por B(p), por la que definiremos como base de entornos abiertos de un punto.

Las familias de intervalos B(p) para los distintos puntos p de $\mathbb{R}$ verifican estas tres propiedades, que son las que con el paso del tiempo se han demostrado útiles para describir formalmente la idea intuitiva de proximidad:

I. Cada punto p pertenece a todos los intervalos $(p - \varepsilon, p + \varepsilon)$ de B(p).

II. Dados dos intervalos $(p - \varepsilon, p + \varepsilon)$ y $(p - \varepsilon', p - \varepsilon', p + \varepsilon')$ de B(p), su intersección contiene algún intervalo $(p - \delta, p + \delta)$ de B(p).

III. Si $(p - \varepsilon, p + \varepsilon)$ pertenece a B(p), para cada punto $q \in (p - \varepsilon, p + \varepsilon)$ existe un intervalo $(q - \delta, q + \delta)$ de la familia B(q) tal que $(q - \delta, q + \delta) \subset (p - \varepsilon, p + \varepsilon)$.

Estas tres propiedades, porque se enuncian utilizando solamente relaciones de pertenencia y de contenido entre puntos y conjuntos, sin utilizar ninguna noción de distancia, sugieren la definición de base de entornos abiertos en los puntos de un conjunto del siguiente modo:

Definición 1

Sea un conjunto X no vacío, y para cada punto p de X una familia no vacía B(p) de subconjuntos de X. Se dirá que cada familia B(p) es una base de entornos abiertos del punto respectivo p, si todas las familias B(p) verifican estas tres propiedades:

B_1: Si U es un elemento de B(p), entonces $p \in U$.

B_2: Si $U \in B(p)$ y $V \in B(p)$, entonces existe un conjunto $W \in B(p)$ tal que $W \subset U \cap V$.

B_3: Si $U \in B(p)$, para cada punto $q \in U$ existe un conjunto $V \in B(q)$ tal que $V \subset U$. Véase la figura 1.

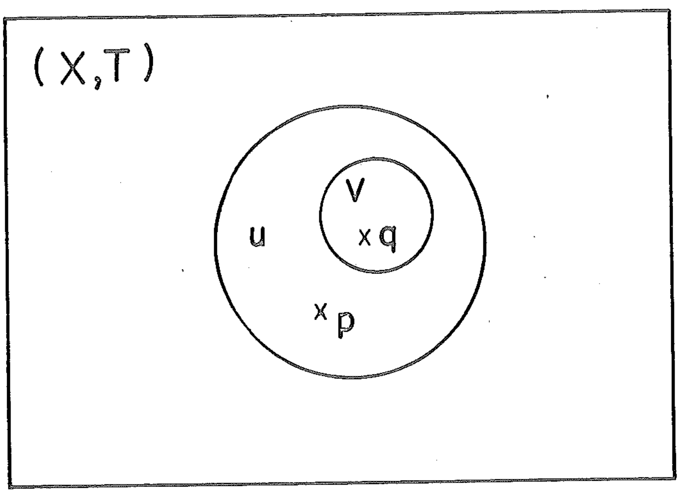

Figura 1.1

Se observa que las propiedades B_1 y B_2 se refieren a cada una de las familias B(p) individualmente, mientras que B_3 relaciona B(p) con las familias B(q) correspondientes a los puntos q que están en los entornos abiertos de p, es decir, que son próximos a p según estos entornos. Esto hace que las bases de entornos abiertos para los distintos puntos de un conjunto X estén relacionadas entre sí, formando un **sistema de bases de entornos abiertos** para los distintos puntos de X.

Ejemplo 1

Sea el conjunto X formado por los cuatro elementos a, b, c, d. Un sistema de bases de entornos abiertos para estos cuatro puntos es el siguiente:

B(a) es la familia de conjuntos {a} y {a, b}.

B(b) es la familia con el elemento {a, b}.

B(c) está formada por $\{c, d\}$ y $\{a, c, d\}$.

B(d) tiene solamente $\{c, d\}$.

El lector puede comprobar sencillamente que estas familias de conjuntos verifican las propiedades B_1, B_2 y B_3.

Ejemplo 2

Como se sabe, una distancia en un conjunto X es una aplicación $d: X \times X \to \mathbb{R}^+$(donde $\mathbb{R}^+$ es el conjunto de los números reales no negativos) que verifica estas tres propiedades:

d_1: $d(x, y) = 0$ si y sólo si $x = y$.

d_2: Si x, y son dos puntos cualesquiera del conjunto X, se cumple que $d(x, y) = d(y, x)$. (Propiedad simétrica.)

d_3: Para tres puntos cualesquiera x, y, z, del conjunto X se verifica que $d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z)$. (propiedad triangular de la distancia.)

Se llama espacio métrico (X, d) a un conjunto X con una distancia d definida en él. Así, por ejemplo, cuando en el plano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ se considera definida la distancia usual (distancia euclídea) entre sus puntos, dada por $d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$, donde $x = (x_1, x_2)$ e $y = (y_1, y_2)$, se puede comprobar que esta aplicación de $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^+$ cumple las propiedades d_1, d_2 y d_3. El espacio métrico $(\mathbb{R}^2, d)$ es el plano euclídeo.

En un espacio métrico (X, d) se llama bola abierta de centro el punto p y radio el número real positivo r, al conjunto $E(p, r) = \{t \in X, d(p, t) < r\}$ de puntos t de X cuya distancia a p es menor que r.

Pues bien, las familias B(p) formadas por todas las bolas abiertas de centro p y radio los distintos números reales positivos cumplen las propiedades B_1, B_2 y B_3, por lo que constituyen bases de entornos abiertos en el espacio métrico (X, d).

Ejemplo 3

En el conjunto $\mathbb{Q}$ de los números racionales, los intervalos abiertos y acotados $(p - r, p + r)$ de centro el número racional p y radio los números racionales positivos r constituyen bases de entornos abiertos para los distintos puntos p de $\mathbb{Q}$.

1.2. Conjuntos abiertos. Topología en un conjunto

Definición 2

Sea X un conjunto para cuyos puntos se ha definido un sistema de bases de entornos abiertos B(p). Un subconjunto A de X se dice que es un conjunto abierto (o simplemente un abierto) cuando es el conjunto vacío, o bien cuando para cada punto $t \in A$ existe un subconjunto $U \in B(t)$ que está contenido en A.

Definición 3

Se llama topología T del conjunto X, determinada por las bases de entornos abiertos B(p), a la familia de los conjuntos abiertos de X definidos por medio de las bases de entornos abiertos B(p).

Se observa que por la propiedad B_3 de las bases de entornos abiertos, cada conjunto que pertenece a una de estas bases es un abierto de la topología de X.

En un espacio métrico, la topología definida a partir de las esferas abiertas se llama topología métrica.

Ejemplo 4

La topología determinada en el conjunto $\mathbb{Q}$ de los números racionales por las bases de entornos abiertos que se indican en el ejemplo 3 es la topología usual de los números racionales.

Ejemplo 5

En el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales, la topología usual viene determinada por las bases de entornos abiertos $B(p) = (p - \varepsilon, p + \varepsilon)$, donde ε toma como valores los números reales positivos. En esta topología T_u de $\mathbb{R}$ cada intervalo abierto y acotado (a, b), con $a < b$, es un conjunto abierto, pues representando por t el número real $\frac{a + b}{2}$, es $(a, b) \in B(t)$.

Parece oportuno comentar que cuando se dice intervalo abierto (a, b), o intervalo cerrado [a, b], en el conjunto $\mathbb{R}$, estas palabras abierto y cerrado se refieren a la relación de orden habitual del conjunto de los números reales, es decir, $(a, b) = \{x \in \mathbb{R}, a < x < b\}$ y $[a, b] = \{x \in \mathbb{R}, a \leqslant x \leqslant b\}$. La afirmación anterior significa, por tanto, que un intervalo acotado de $\mathbb{R}$ abierto según la relación de orden usual de $\mathbb{R}$ es abierto en la topología usual de $\mathbb{R}$.

Ejemplo 6

El intervalo de $\mathbb{R}$: $[a, b) = \{t \in \mathbb{R}, a \leqslant t < b\}$ no es un abierto en la topología usual de $\mathbb{R}$, pues el punto $a \in [a, b)$ y no existe ningún número real positivo ε tal que $(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \subset [a, b)$.

1.3. Bases de entornos abiertos equivalentes

A partir de las bases de entornos abiertos en un conjunto X se ha determinado una topología en el conjunto X. Esto lleva a considerar los distintos sistemas de bases de entornos abiertos que determinan la misma topología en un conjunto, y motiva la siguiente definición.

Definición 4

Sea un conjunto X y en él los sistemas de bases de entornos abiertos B(p) y B′(p) para los distintos puntos de X. Se dirá que los dos sistemas de bases de entornos abiertos son equivalentes cuando determinan la misma topología T en el conjunto X.

Se recomienda al lector comprobar que una condición necesaria y suficiente para que dos sistemas de bases de entornos abiertos B(p) y B'(p) en un conjunto X sean equivalentes es que para cada punto p de X, dado un conjunto cualquiera $U \in B(p)$ exista uno $U' \in B'(p)$ tal que $U' \subset U$, y que dado un conjunto cualquiera $V' \in B'(p)$ exista uno $V \in B(p)$ tal que $V \subset V'$.

Ejemplo 7

En el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales, si para cada número real x se considera la familia de los intervalos abiertos $B(x) = \{(x - r, x - r)\}$ donde r toma como valores los números racionales positivos, se tiene un sistema de bases de entornos abiertos para $\mathbb{R}$; otro sistema de bases de entornos abiertos para $\mathbb{R}$ viene dado por $B'(x) = \{(x - \varepsilon, x + \varepsilon)\}$ cuando ε toma como valores los números reales positivos. Ambos sistemas son equivalentes, pues dado un número racional positivo cualquiera r siempre existe un número real positivo $\varepsilon \leqslant r$ (por ejemplo $\varepsilon = r$), y dado un número real positivo cualquiera ε, siempre existe un número racional positivo $r \leqslant \varepsilon$.

1.4. **Propiedades de una topología**

Proposición 1

Sea un conjunto X, y en él un sistema de bases de entornos abiertos B(p). Según la definición dada en (1.2) de conjunto abierto, la topología de X determinada por las bases B(p) tiene estas propiedades:

P_1: ϕ y X pertenecen a esta topología T.

P_2: Dada una familia cualquiera, finita o infinita, de abiertos $\{U_\lambda\}_{\lambda \in L}$ de la topología T de X, la unión de los elementos de esta familia $\bigcup_\lambda \{U_\lambda\}$ es también un elemento de T.

P_3: Dada una familia finita $\{U_i\}$, $i = 1 \ldots n$, de elementos de la topología T, la intersección de los elementos de esta familia es también un elemento de T: $\bigcap_{i=1}^{n} \{U_i\} \in T$.

Demostración

De P_1: $\phi \in T$ por definición. Por otra parte, para cada punto $t \in X$, como B(t) es una familia no vacía, existe al menos un $U \in B(t)$, por lo que es $t \in U \subset X$. Luego X es un abierto de la topología.

De P_2: Sea un punto cualquiera $p \in \bigcup_\lambda \{U_\lambda\}$. Existe un índice λ_0 de modo que $p \in U_{\lambda_0}$. De aquí se deduce que existe un elemento $A \in B(p)$ tal que $A \subset U_{\lambda_0}$. Por lo tanto, es $p \in A \subset \bigcup \{U_\lambda\}$.

De P_3: Supongamos que U_1 y U_2 son dos abiertos: si $U_1 \cap U_2 = \phi$ entonces $U_1 \cap U_2 \in T$. Si $U_1 \cap U_2 \neq \phi$, y es $p \in U_1 \cap U_2$, existen V_1 y V_2 en B(p) tales que $V_1 \subset U_1$ y $V_2 \subset U_2$. Por la propiedad B_2 de (1.1) existe $W \in B(p)$ que cumple $p \in W \subset V_1 \cap V_2 \subset U_1 \cap U_2$. Luego $U_1 \cap U_2$ es un conjunto abierto. Repitiendo este proceso un número finito de veces se demuestra que $U_1 \cap U_2 \cap U_3 \ldots \cap U_n$ es un abierto de T. Ver figura 2.

Ejemplo 8

El conjunto $(a, \rightarrow) = \{t \in \mathbb{R},\ t > a\}$ es abierto en la topología usual T_u de $\mathbb{R}$, pues el intervalo no acotado $(a, \rightarrow)$ se puede obtener como unión de una familia de intervalos abiertos acota-

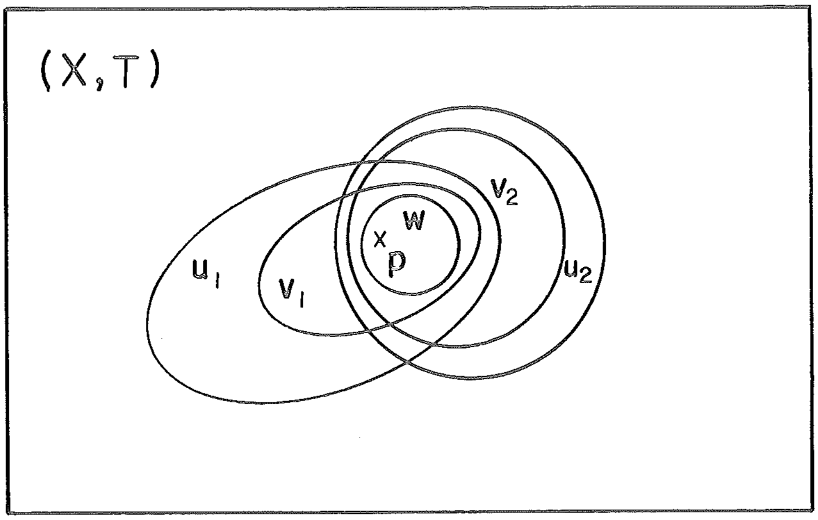

Figura 1.2

dos: $(a, \rightarrow) = (a, a+2) \cup (a+1, a+3) \cup \ldots = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (a+n, a+n+2)$ cuando n toma todos los valores naturales. Igualmente es abierto en $(\mathbb{R}, T_u)$ el intervalo no acotado $(\leftarrow, a) = \{t \in \mathbb{R}, t < a\}$.

La importancia grande de las propiedades P_1, P_2 y P_3 radica en que si se tiene en un conjunto no vacío X una familia H de subconjuntos que las verifique, se puede construir de modo muy sencillo un sistema de bases de entornos abiertos B(p) en los puntos p de X, de tal modo que la topología que éstas determinan en X es precisamente la familia H de partida.

Proposición 2

Sea X un conjunto no vacío y H una familia de subconjuntos de X que verifican las propiedades P_1, P_2 y P_3. Para cada punto p de X sea H(p) la familia formada por los elementos de H que contienen el punto p. Entonces estas familias H(p) son bases de entornos abiertos en X, y H es la topología por ellos determinada.

Demostración

En efecto, las familias H(p) verifican B_1 por la misma construcción de H(p).

Supongamos ahora que U y V son elementos de H(p). Es claro que $p \in U \cap V$, que pertenece a H por P_3. Luego $U \cap V \in H(p)$, que así cumple B_2.

Sea ahora $U \in H(p)$ y supongamos que $q \in U$. Evidentemente es $U \in H(q)$, con lo que B_3 se cumple de modo trivial.

Para demostrar la segunda parte de la proposición, representemos por T la topología determinada por las bases de entornos abiertos H(p), y vamos a ver que T = H. En primer lugar, todos los conjuntos no vacíos de H por pertenecer a algún H(p) son abiertos de la topología T, según se vio en (1.2).

Recíprocamente, si $V \in T$, para cada punto t de V existe un elemento $U_t \in H(t)$ tal que $t \in U_t \subset V$ y así es $V = \bigcup_{t \in V} \{U_t\}$. Como cada U_t es un elemento de H, por P_2, V también es de H. Luego T y H tienen los mismos elementos, y T = H.