ANALISIS MATEMATICO V

UNIDAD DIDACTICA 1

Preparada por:

Manuel Valdivia Ureña

TEMA I

1. Espacios vectoriales (I)

1.1. Bases de Hamel.
2.1. Subespacios de un espacio vectorial.
3.1. Aplicaciones lineales.

1.1. BASES DE HAMEL

En todo lo que sigue, los espacios vectoriales estarán definidos sobre el cuerpo K de los números reales R o de los números complejos C.

Recordamos al lector que un espacio vectorial sobre K es un conjunto no vacío E, una ley de composición interna sobre E, llamada adición o suma:

$$(x, y) \to x + y,$$

y una ley de composición externa, multiplicación por escalares, que asocia a cada elemento α de K y a cada elemento x de E un elemento αx de E, de manera que, si x, y, z pertenecen a E y α y β están en K, se cumplen las siguientes condiciones:

1. $(x + y) + z = x + (y + z)$.
2. $x + y = y + x$.
3. Existe un elemento 0 de E, llamado origen, cero o elemento neutro, tal que
$$x + 0 = x$$
4. Existe un elemento $-x$, opuesto de x, de manera que
$$x + (-x) = 0$$
5. $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$.
6. $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$.
7. $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$.
8. $1x = x$.

Nota 1

Puesto que no existe confusión, utilizamos 0 para el origen de E y para el cero de K. A los elementos de E les llamamos vectores o puntos. A K se le denomina el cuerpo de los escalares de E. Muchos de los resultados expuestos en este tema siguen siendo válidos cuando se sustituye K por un cuerpo conmutativo cualquiera.

De los anteriores axiomas se deduce que E, con la adición definida, es un grupo abeliano, y que la multiplicación por un escalar fijo es un endomorfismo de este grupo.

A continuación recordaremos al lector algunos conceptos y definiciones relativos a E.

Dados los elementos de E:

$$x, x_1, x_2, \dots, x_n,$$

se dice que x es combinación lineal de $x_1, x_2, \dots, x_n$ si existen n elementos en K : $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, de manera que

$$x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n.$$

Los vectores $x_1, x_2, \dots, x_n$ son linealmente independientes si

$$\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_n x_n, \quad \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n \in K,$$

es el vector cero sólo cuando

$$\beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_n = 0.$$

Si los n vectores anteriores no son linealmente independientes, se dice que son linealmente dependientes.

Un subconjunto no vacío A de E es linealmente independiente cuando los vectores que forman cada subconjunto finito no vacío de A son linealmente independientes.

Un subconjunto no vacío y linealmente independiente B de E es una base de E si, y sólo si, cada elemento de E se representa como combinación lineal de vectores de B. Se suele decir también que B es una base de Hamel o base algebraica de E.

Teorema 1.1.1

Si A *es un subconjunto no vacío y linealmente independiente de* E, *existe una base de Hamel* B *de* E *que contiene* A.

Demostración:

Sea $\mathscr{M}$ la familia de todos los subconjuntos linealmente independientes de E que contienen A. Puesto que A pertenece a $\mathscr{M}$, dicha familia no es vacía. Si M_1 y M_2 están en $\mathscr{M}$ ponemos:

$$M_1 \leqslant M_2 \quad \text{si, y sólo si,} \quad M_1 \subset M_2.$$

Es inmediato que $\mathcal{M}$, con la relación $\leqslant$, es un conjunto ordenado. Por otra parte, si $\mathcal{N}$ es una subfamilia no vacía y totalmente ordenada de $(\mathcal{M}, \leqslant)$, se tiene que

$$\cup\{M : M \in \mathcal{N}\}$$

es un elemento de $\mathcal{M}$ posterior a todos los elementos de $\mathcal{N}$, por lo que $(\mathcal{M}, \leqslant)$ es un conjunto ordenado inductivo.

Aplicamos el lema de Zorn y obtenemos un elemento maximal B en $(\mathcal{M}, \leqslant)$.

Veamos ahora que B es una base de Hamel de E. Si no fuera así, existiría un vector x en E que no se podría poner como combinación lineal de un número finito de vectores de B. Sea $B_1 = B \cup \{x\}$. Tomamos un subconjunto en B_1 de q vectores:

$$y_1, y_2, ..., y_q,$$

y q números en $K : \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_q$, de manera que

$$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \cdots + \alpha_q y_q = 0.$$

Si x es distinto de y_j, $j = 1, 2, ..., q$, entonces, puesto que B es linealmente independiente, se tiene que

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_q = 0.$$

Si x coincide con y_1 y $\alpha_1 = 0$, resulta que

$$\alpha_2 y_2 + \cdots + \alpha_q y_q = 0,$$

por lo que

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_q = 0.$$

Finalmente, si x coincide con y_1 y $\alpha_1 \neq 0$, podemos poner:

$$y_1 = x = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} y_2 - \frac{\alpha_3}{\alpha_1} y_3 - \cdots - \frac{\alpha_q}{\alpha_1} y_q,$$

lo cual está en contra de la hipótesis de que x no es combinación lineal de elementos de B. Se deduce de aquí que B_1 es linealmente independiente. Por otra parte, B_1 contiene A y es estrictamente más grande que B, lo cual está en contra de la maximalidad de B, de aquí que B sea una base de Hamel de E.

Corolario 1.1.1

Si E *es distinto de* $\{0\}$, *existe una base de Hamel en* E.

Demostración:

Tomamos un vector x en E distinto del origen. Puesto que el conjunto $A = \{x\}$ es linealmente independiente, podemos hallar, aplicando el teorema anterior, una base de Hamel B de E que contiene A.

Nota 2

Si $E = \{0\}$, E no tiene base de Hamel si nos ajustamos a la definición dada anteriormente. Vamos a convenir en este caso que la base de Hamel es el conjunto vacío.

Teorema 2.1.1

Si A *y* B *son dos bases de Hamel de* E, *ambas bases tienen el mismo número cardinal.*

Demostración:

Si $E = \{0\}$, entonces $A = B = \varnothing$ y, por tanto, si card M representa el número cardinal de un conjunto cualquiera M, se tiene que

$$\text{card } A = \text{card } B = 0.$$

Supongamos ahora que $E \neq \{0\}$. Si el número cardinal de A es finito, igual a n y menor que el número cardinal de B, podemos tomar en B $n + 1$ vectores linealmente independientes:

$$y_1, y_2, ..., y_n, y_{n+1}.$$

Puesto que y_1 es distinto de cero, es combinación lineal, con coeficientes distintos de cero, de los vectores de un subconjunto finito $F(y_1)$ no vacío de A. Si tomamos un vector z_1 en $F(y_1)$, es inmediato que el conjunto:

$$A_1 = \{y_1\} \cup (A \sim \{z_1\})$$

es una base de E. Procediendo por recurrencias, supongamos que para un número entero r, $1 \leqslant r < n$, tenemos un subconjunto $\{z_1, z_2, ..., z_r\}$ en A de manera que

$$A_r = \{y_1, y_2, ..., y_r\} \cup (A \sim \{z_1, z_2, ..., z_r\})$$

es una base de E. Puesto que y_{r+1} es distinto de cero, es combinación lineal, con coeficientes distintos de cero, de los vectores de un subconjunto finito no vacío $F(y_r)$ de A_r. Los vectores:

$$y_1, y_2, ..., y_r, y_{r+1}$$

son linealmente independientes y, por tanto, existe en $F(y_r)$ un elemento z_{r+1} que pertenece a $A \sim \{z_1, z_2, ..., z_r\}$. Obtenemos así el subconjunto de E:

$$A_{r+1} = \{y_1, y_2, ..., y_r, y_{r+1}\} \cup \{A \sim \{z_1, z_2, ..., z_r, z_{r+1}\})$$

que es, obviamente, una base de E.

Como consecuencia, se tiene que

$$A_n = \{y_1, y_2, ..., y_n\} \cup (B \sim \{z_1, z_2, ..., z_n\}) = (y_1, y_2, ..., y_n\}$$

es una base de E y, consiguientemente, y_{n+1} es una combinación lineal de los vectores $y_1, y_2, \dots, y_n$, lo cual está en contra de la independencia de $y_1, y_2, \dots, y_n, y_{n+1}$. Luego:

$$\text{card } A = \text{card } B.$$

Supongamos, finalmente, que las dos bases A y B son infinitas. Para cada elemento x de A, sea F(x) un subconjunto no vacío de B tal que x es combinación lineal de sus elementos, con coeficientes distintos de cero.

Sea

$$M = \cup\{F(x) : x \in A\}.$$

Es inmediato que M está contenido en B. Por otra parte, si z es un elemento cualquiera de B, resulta, teniendo en cuenta que A es una base de Hamel de E, que existen q vectores, linealmente independientes, en A:

$$x_1, x_2, \dots, x_q,$$

y q elementos no nulos en $K : \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_q$, de manera que

$$z = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_q x_q,$$

de donde se deduce que z es combinación lineal de los elementos de

$$\cup\{F(x_r) : r = 1, 2, \dots, q\},$$

por lo que z pertenece a dicho conjunto, de aquí que

$$M = B.$$

Entonces, si ω es el número cardinal de los números naturales, se tiene:

$$\text{card } B = \text{card } M \leqslant \sum\{\text{card } F(x) : x \in A\} \leqslant \omega \,\text{card } A = \text{card } A.$$

Si cambiamos A por B, y hacemos un razonamiento análogo al anterior, se tiene que

$$\text{card } B \leqslant \text{card } A.$$

Luego:

$$\text{card } A = \text{card } B.$$

c.q.d.

Definición 1.1.1

Se llama dimensión de E, *dim* E, *al número cardinal de una base de* E.

Nota 3

Obsérvese que la consistencia de la definición anterior queda asegurada por el último teorema.

2.1. SUBESPACIO DE UN ESPACIO VECTORIAL

Un subespacio F del espacio vectorial E es un subconjunto no vacío de E tal que, si x, $y \in F$ y $\alpha \in F$:

$$x + y \in F, \quad \alpha x \in F.$$

Si $\{F_i : i \in I\}$ es una familia de subespacios de E, se prueba fácilmente que

$$\cap \{F_i : i \in I\}$$

es también un subespacio de E.

Si M es un subconjunto no vacío de E, sea $\{G_j : j \in J\}$ la familia de todos los subespacios de E que contienen M. Dicha familia no es vacía, puesto que E pertenece a ella. Se tiene que

$$G = \cap \{G_j : j \in J\}$$

es el subespacio más pequeño que contiene M. A G se le llama el subespacio engendrado por M y también, la envoltura lineal de M. Se comprueba inmediatamente que G está formado por todas las combinaciones lineales de los vectores de los subconjuntos finitos de M.

Dados dos subconjuntos cualesquiera A y B de E y un elemento λ de K, se definen:

$$\begin{aligned} A + B &= \{x + y : x \in A, \ y \in B\} \\ z + A &= \{z + x : x \in A\} \\ \lambda A &= \{\lambda x : x \in A\} \\ -A &= \{-x : x \in A\} \end{aligned}$$

Al conjunto A + B se le llama la suma de A y B, a z + A, el trasladado de A con módulo z, a λA, el homotético de A con razón λ y a $-A$, el simétrico de A.

Si fijamos z en E, a la aplicación de E en E definida por:

$$x \to z + x$$

se le denomina traslación de módulo z. Es obvio que cualquier traslación en E es una aplicación biyectiva de E sobre E.

Si fijamos λ en K, a la aplicación de E en E tal que

$$x \to \lambda x$$

se le llama una homotecia de razón λ. Es obvio que si λ es distinto de cero, dicha homotecia es una aplicación biyectiva de E sobre E.

Con la terminología anterior, es evidente que un subconjunto no vacío F de E es un subespacio si, y sólo si, para cada α y β de K, se tiene:

$$\alpha F + \beta F \subset F.$$

Si F y G son subespacios de E, también es inmediato que $F + G$ es un subespacio de E.

Dos espacios F y G de E son suplementarios si cada vector de E se expresa, de una forma única, como la suma de un vector de F y un vector de G. También se dice que F es sumplementario de G o que G es suplementario de F. Se escribe:

$$E = F \oplus G$$

Proposición 1.2.1

Dos subespacios F *y* G *de* E *son suplementarios si, y sólo si,*

$$F + G = E \quad \text{y} \quad F \cap G = \{0\}.$$

Demostración:

Supongamos que F y G son suplementarios. Si x es un elemento cualquiera de E, se tiene que

$$x = x_1 + x_2, \quad x_1 \in F, x_2 \in G,$$

por lo que

$$F + G = E.$$

Supongamos que $F \cap G \neq \{0\}$. Tomamos un elemento z en $F \cap G$, distinto de cero. Entonces:

$$0 = z + (-z), \quad z \in F, \ -z \in G,$$
$$0 = 0 + 0, \quad 0 \in F, 0 \in G,$$

lo que está en contradicción con la hipótesis. Luego:

$$F \cap G = \{0\}$$

Recíprocamente, supongamos que

$$F + G = E, \ F \cap G = \{0\}.$$

Sea x un elemento cualquiera de E. De la condición $F + G = E$ se deduce que

$$x = x_1 + x_2, \quad x_1 \in F, x_2 \in G.$$

Por otra parte, si

$$x = x_3 + x_4, \quad x_3 \in F, x_4 \in G,$$

se tiene que

$$x_1 + x_2 = x_3 + x_4$$

y, por tanto,

$$x_1 - x_3 = x_4 - x_2, \quad x_1 - x_3 \in F, x_1 - x_3 = x_4 - x_2 \in G,$$

de aquí que

$$x_1 - x_3 \in F \cap G$$

y, por consiguiente,

$$x_1 = x_3, x_2 = x_4,$$

por lo que

$$E = F + G.$$

Teorema 1.2.1

Si F *es un subespacio de* E, *existe un subespacio* G *en* E *suplementario de* F.

Demostración:

Si $F = \{0\}$, el único suplementario de F es E. Si $F = E$, el único suplementario de F es $\{0\}$.

Supongamos ahora que $F = \{0\}$, $F \neq E$. Sea A una base de Hamel de F. Entonces A es un subconjunto no vacío y linealmente independiente de E y, por consiguiente, existe una base de Hamel B de E que contiene A. Puesto que la envoltura lineal de A es F, y la envoltura lineal de B es E se tiene que

$$B \sim A \neq \emptyset.$$

Sea G la envoltura lineal de $B \sim A$. Es inmediato que $F + G = E$ y que $F \cap G = \{0\}$. Luego G es un subespacio suplementario de F.

c.q.d.

3.1. APLICACIONES LINEALES

Sea E y F dos espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo K. Una aplicación f de E en F es lineal si, para cada x e y en E y α en K, se verifica:

$$f(x + y) = f(x) + f(y)$$
$$f(\alpha x) = \alpha f(x).$$

Es fácil de comprobar que el recorrido f(E) de f es un subespacio de F y que el núcleo $f^{-1}(0)$ de f es un subespacio de E. Es inmediato que f es inyectiva si, y sólo si, $f^{-1}(0) = \{0\}$.

Si la aplicación f es biyectiva se tiene que f^{-1} es una aplicación lineal de F sobre E. Se dice entonces que f es un isomorfismo del espacio E sobre el espacio F y que E y F son isomorfos.

Si E, F y G son tres espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo, f es una aplicación lineal de E en F y g es una aplicación lineal de F en G, la composición $g \circ f$ es una aplicación lineal de E en G. En particular, si f es un isomorfismo de E sobre F y g es un isomorfismo de F sobre G, se tiene que $g \circ f$ es un isomorfismo de E sobre G.

Teorema 1.3.1

Sean E *y* F *dos espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo* K. *El espacio* E *es isomorfo a* F *si, y sólo si,* E *y* F *tienen la misma dimensión.*

Demostración:

Supongamos que E y F son isomorfos. Sea f un isomorfismo de E sobre F. Si $E = \{0\}$, entonces $f(E) = \{0\}$, por lo que

$$\dim E = \dim F = 0.$$

Si $E \neq 0$, tomamos en E una base de Hamel B. Si $z_1, z_2, ..., z_n$ son n vectores distintos de f(B) y $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ son n números de K tales que

$$\alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2 + \cdots + \alpha_n z_n = 0,$$

sea x_q un vector en B que verifica:

$$f(x_q) = z_q, \quad q = 1, 2, ..., n.$$

Puesto que f es inyectiva y

$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n) = \alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2 + \cdots + \alpha_n z_n = 0$$

se tiene que

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n = 0$$

y, observando que los vectores $x_1, x_2, ..., x_n$ son distintos, resulta:

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0,$$

lo que nos indica que los vectores $z_1, z_2, ..., z_n$ son linealmente independientes, es decir, f(B) es un subconjunto linealmente independiente de F.

Dado un elemento cualquiera z de F, hallamos en E un vector x tal que $f(x) = z$. Podemos escribir:

$$x = \beta_1 u_1 + \beta_2 u_2 + \cdots + \beta_p u_p, \quad u_1, u_2, ..., u_p \in B, \beta_1, \beta_2, ..., \beta_p \in K,$$

y, por tanto,

$$z = f(x) = \beta_1 f(u_1) + \beta_2 f(u_2) + \cdots + \beta_p f(u_p), \quad f(u_1), f(u_2), ..., f(u_p) \in f(B),$$

por lo que f(B) es una base de Hamel de F. Se obtiene, como consecuencia de ser f inyectiva, que

$$\dim E = \operatorname{card} B = \operatorname{card} f(B) = \dim F.$$

Supongamos ahora que $\dim E = \dim F$. Si

$$\dim E = \dim F = 0,$$

la aplicación f de E en F tal que $f(0) = 0$ es un isomorfismo, luego E y F son isomorfos. Si la dimensión de E es distinta de cero, tomamos una base de Hamel B en E, una base de Hamel D en F y una aplicación biyectiva h de B sobre D.

Dado un elemento cualquiera x de E, distinto de cero, lo expresamos como combinación lineal de los vectores de un subconjunto finito de B con coeficientes distintos de cero, es decir:

$$x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n, \tag{1}$$

en donde $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son vectores distintos de B y $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ son elementos no nulos de K. Ponemos:

$$\begin{aligned} f(x) &= \alpha_1 h(x_1) + \alpha_2 h(x_2) + \cdots + \alpha_n h(x_n) \\ f(0) &= 0. \end{aligned}$$

De la unicidad de la expresión (1) se deduce que f está bien definida sobre E. Por otra parte, es fácil de probar que f es lineal y biyectiva de E sobre F, de aquí que E y F sean isomorfos.

c.q.d.

Dados los espacios vectoriales E y F sobre el mismo cuerpo K, respresentamos por $\mathscr{L}(E, F)$ el conjunto de todas las aplicaciones lineales de E en F. Si f_1 y f_2 pertenecen a $\mathscr{L}(E, F)$ y α es un elemento de K, se define $f_1 + f_2$ y αf_1 poniendo:

$$\left.\begin{aligned} (f_1 + f_2)(x) &= f_1(x) + f_2(x) \\ (\alpha f_1)(x) &= \alpha f_1(x) \end{aligned}\right\} \quad x \in E$$

Entonces $\mathscr{L}(E, F)$ es un espacio vectorial sobre el cuerpo K con las leyes de composición:

$$\left.\begin{aligned} (f, g) &\to f + g \\ (\lambda, f) &\to \lambda f \end{aligned}\right\} \quad f, g \in \mathscr{L}(E, F), \quad \lambda \in K.$$

EJERCICIOS DE AUTOCOMPROBACION CON SOLUCIONES

1. Demuéstrese que si A es un conjunto infinito, existe una familia $\{A_i : i \in I\}$ de subconjuntos de A que cumplen las siguientes condiciones:

   a) A_i es un conjunto infinito numerable para cada $i \in I$.

   b) Si $i, j \in I$, $i \neq j$, entonces $A_i \cap A_j = \emptyset$.

   c) $\cup \{A_i : i \in I\} = A$.

Solución:

Sea $\mathscr{F}$ la colección de todas las familias de subconjuntos de A, tales que si $\mathscr{F}_1 \in \mathscr{F}$, entonces:

$$\mathscr{F}_1 = \{B_j : j \in J\}$$

de manera que J no es vacío, B_j es un conjunto infinito numerable contenido en A, para cada $j \in J$, y si $j_1, j_2 \in J$, $j_1 \neq j_2$, se tiene que

$$B_{j_1} \cap B_{j_2} = \emptyset.$$

Establecemos en $\mathscr{F}$ una relación $\leqslant$ definida, si $\mathscr{F}_1, \mathscr{F}_2 \in \mathscr{F}$, poniendo:

$$\mathscr{F}_1 \leqslant \mathscr{F}_2 \quad \Leftrightarrow \quad \mathscr{F}_1 \subset \mathscr{F}_2$$

Fácilmente se comprueba que $(\mathscr{F}, \leqslant)$ es un conjunto ordenado inductivo. Aplicamos el lema de Zorn y obtenemos un elemento maximal $\{B_i : i \in I\}$ en $(\mathscr{F}, \leqslant)$.

Sea $B = A \sim \cup \{B_i : i \in I\}$. Si B fuera infinito podríamos extraer de él un subconjunto L infinito numerable. Entonces, la familia:

$$\{B_i : i \in I\} \cup \{L\}$$

pertenecería a $\mathscr{F}$ y sería estrictamente posterior a

$$\{B_i : i \in I\},$$

lo cual está en contra de la maximalidad de esta última familia. Por tanto B es finito.

Tomamos ahora un elemento $i_0 \in I$ y ponemos:

$$A_i = B_i, \quad i \in I \sim \{i_0\}, \; A_{i_0} = B_{i_0} \cup B.$$

Entonces, la familia:

$$\{A_i : i \in I\}$$

responde al enunciado del ejercicio.

2. Si ω es el número cardinal de los números naturales, demuéstrese que $\omega\omega = \omega$.

Solución:

Si N es el conjunto de los números naturales, ponemos $N \times N$ en un cuadro de la siguiente forma:

$$\begin{tikzcd}
(0,0) \arrow[r] \arrow[d] & (0,1) \arrow[r] & (0,2) \arrow[dl] & (0,3) \cdots \\
(1,0) \arrow[ur] & (1,1) \arrow[dl] & (1,2) \arrow[ur] & (1,3) \cdots \\
(2,0) \arrow[d] & (2,1) \arrow[ur] & (2,2) & (2,3) \cdots \\
(3,0) \arrow[ur] & (3,1) & (3,2) & (3,3) \cdots
\end{tikzcd}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

y lo ordenado en una sucesión como indican las flechas, es decir, el primer elemento es (0, 0), si (a, b) y (c, d) son dos elementos de $N \times N$ tales que

$$a + b < c + d,$$

entonces:

$$(a, b) < (c, d),$$

si n es un entero positivo por

$$(0, n) < (1, n-1) < (2, n-2) < \cdots < (p, n-p) < \cdots < (n, 0),$$

si n es un entero positivo impar:

$$(n, 0) < (n - 1, 1) < (n - 2, 2) < \cdots < (n - p, p) < \cdots < (0, n).$$

Esto prueba que $N \times N$ es infinito numerable y, por tanto, $\omega\omega = \omega$.

3. Demuéstrese que si α es un número cardinal infinito, entonces $\omega\alpha = \alpha$.

Solución:

Sea A un conjunto cuyo número cardinal sea α. Aplicamos el ejercicio primero y obtenemos una familia:

$$\{A_i : i \in I\},$$

de subconjuntos de A, con las siguientes propiedades:

a) A_i es infinito numerable, para cada $i \in I$.

b) $\cup \{A_i : i \in I\} = A$.

c) Si $i_1, i_2 \in I$, $i_1 \neq i_2$, entonces $A_{i_1} \cap A_{i_2} = \varnothing$.

Se tiene, si N es el conjunto de los números naturales, que

$$N \times A = \cup \{N \times A_i : i \in I\}$$

y, por tanto,

$$\omega\alpha = \operatorname{card} N \times A = \sum \{\operatorname{card} N \times A_i : i \in I\} = \sum \{\operatorname{card} A_i : i \in I\} = \alpha.$$

4. Sea E el espacio vectorial, sobre el cuerpo de los números reales, de las funciones reales continuas en el intervalo real [0, 1]. Calcúlese la dimensión de E.

Solución:

Si α y β son dos números reales distintos, las funciones f y g definidas en [0, 1] tales que

$$f(x) = \alpha, \quad g(x) = \beta, \quad x \in [0, 1],$$

pertenecen a E y son diferentes, de aquí que

$$\operatorname{card} E \geqslant \operatorname{card} R = 2^{\omega}.$$

Por otra parte, cada función real continua definida en [0, 1] está determinada por sus valores en los puntos racionales H de [0, 1], de donde se deduce que el número de elementos de E es menor o igual que el número de funciones reales definidas en H. Entonces:

$$\operatorname{card} E \leqslant \operatorname{card} R^{H} = (2^{\omega})^{\omega} = 2^{\omega\omega} = 2^{\omega}$$

y, por consiguiente,

$$\operatorname{card} E = 2^{\omega}.$$

Consideremos el subconjunto de E:

$$M = \{f_\alpha : \alpha \in R\},$$

de manera que

$$f_\alpha(x) = e^{\alpha x}, \quad x \in [0, 1].$$

Si $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ son números reales distintos dos a dos, vamos a determinar $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n$ en R, tales que

$$\beta_1 f_{\alpha_1} + \beta_2 f_{\alpha_2} + \cdots + \beta_n f_{\alpha_n} = 0.$$

Entonces:

$$\beta_1 e^{\alpha_1 x} + \beta_2 e^{\alpha_2 x} + \cdots + \beta_n e^{\alpha_n x} = 0, \quad \forall\, x \in [0, 1].$$

Si derivamos la expresión anterior n − 1 veces y damos después a x el valor cero, resulta:

$$\begin{aligned} \beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_n &= 0 \\ \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \cdots + \alpha_n\beta_n &= 0 \\ \alpha_1^2\beta_1 + \alpha_2^2\beta_2 + \cdots + \alpha_n^2\beta_n &= 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ \alpha_1^{n-1}\beta_1 + \alpha_2^{n-1}\beta_2 + \cdots + \alpha_n^{n-1}\beta_n &= 0 \end{aligned}$$

En el sistema anterior, el determinante de los coeficientes es de Vandermonde:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \cdots & \alpha_n^2 \\ & & & \\ \alpha_1^{n-1} & \alpha_2^{n-1} & \cdots & \alpha_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

y, puesto que $\alpha_i \neq \alpha_j$, $i \neq j$, $i, j = 1, 2, ..., n$, dicho determinante es distinto de cero, de aquí que

$$\beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_n = 0,$$

lo que nos indica que M es un subconjunto linealmente independiente de E.

Podemos hallar una base de Hamel B en E que contenga M. Entonces:

$$2^{\omega} = \operatorname{card} E \geqslant \dim E = \operatorname{card} B \geqslant \operatorname{card} M = \operatorname{card} R = 2^{\omega}$$

y, por consiguiente,

$$\dim E = 2^{\omega}.$$

5. Sea E el espacio vectorial, sobre el cuerpo de los números reales, de las funciones continuas definidas en el intervalo real $[-1, 1]$. Sea F el subconjunto de todas las funciones pares de E. Sea G el subconjunto de todas las funciones impares de E. Demuéstrese que

   a) F es un subespacio de E.

   b) G es un subespacio de E.

   c) $E = F + G$.

Solución:

Sean f y g elementos de E y α un número real. Si f y g son funciones pares, se tiene:

$$\left.\begin{aligned} f(x) &= f(-x) \\ g(x) &= g(-x) \end{aligned}\right\} \quad \forall\, x \in [-1, 1]$$

Entonces, $\forall\, x \in [-1, 1]$,

$$\begin{gathered} (f + g)(x) = f(x) + g(x) = f(-x) + g(-x) = (f + g)(-x) \\ (\alpha f)(x) = \alpha f(x) = \alpha f(x) = \alpha f(-x) = (\alpha f)(-x) \end{gathered}$$

y, por tanto, $f + g$ y αf son funciones pares, de aquí que F sea un subespacio de E.

Si f y g son funciones impares, se tiene:

$$\left.\begin{aligned} f(x) &= -f(-x) \\ g(x) &= -g(-x) \end{aligned}\right\} \quad \forall\, x \in [-1, 1]$$

por lo que, para dichos valores de x,

$$\begin{gathered} (f + g)(x) = f(x) + g(x) = -f(-x) - g(-x) = -(f + g)(-x) \\ (\alpha f)(x) = \alpha(-f(-x)) = -\alpha f(-x) = -(\alpha f)(-x), \end{gathered}$$

lo que nos expresa que $f + g$ y αf son funciones impares, de donde se deduce que G es un subespacio de E.

Si f es un elemento cualquiera de E, resulta que

$$f(x) = \frac{1}{2}(f(x) + f(-x)) + \frac{1}{2}(f(x) - f(-x)), \quad \forall\, x \in [-1, 1],$$

por lo que f es la suma de una función par y de una impar, de aquí que

$$E = F + G.$$

Si f es una función par e impar, se tiene que

$$\left.\begin{aligned} f(x) &= f(-x) \\ f(x) &= -f(-x) \end{aligned}\right\} \quad \forall\, x \in [-1, 1]$$

Si sumamos las dos igualdades anteriores, obtenemos:

$$2f(x) = 0, \quad \forall\, x \in [-1, 1],$$

y, por tanto, $f = 0$. Es decir:

$$F \cap G = \{0\}.$$

Se puede concluir de lo anterior que

$$E = F + G.$$

6. En la demostración del Teorema 2.1.1 pruébese que A_1 es linealmente independiente.

Solución:

Sean $u_1, u_2, ..., u_q$ vectores de A_1 diferentes entre sí y sean $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_q$ q elementos de K distintos de cero, tales que

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_q u_q = 0. \tag{1}$$

Si y_1 es distinto de u_j, $j = 1, 2, ..., q$, entonces:

$$\{u_1, u_2, ..., u_q\} \subset A$$

y puesto que A es una base, la relación (1) no es posible. Luego podemos suponer que y_1 coincide con u_1. Entonces:

$$y_1 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_2} u_2 - \cdots - \frac{\alpha_q}{\alpha_q} u_q$$

Por otra parte, si

$$F(y_1) = \{z_1, v_2, v_3, ..., v_p\}$$

existen $p + 1$ elementos de K no nulos: $\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_{p+1}$, de manera que

$$y_1 = \gamma_1 z_1 + \gamma_2 v_2 + \gamma_3 v_3 + \cdots + \gamma_{p+1} v_p,$$

por lo que

$$z_1 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1 \gamma_1} u_2 - \cdots - \frac{\alpha_q}{\alpha_1 \gamma_1} u_q - \frac{\gamma_2}{\gamma_1} v_2 - \cdots - \frac{\gamma_{p+1}}{\gamma_1} v_p,$$

de aquí que z_1 sea combinación lineal de elementos de $A \sim \{z_1\}$, lo que está en contradicción con el hecho de ser A una base de E. Luego:

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0.$$

7. Sea E el espacio vectorial sobre el cuerpo de los números reales, de las funciones reales derivables definidas en [0, 1]. Sea F el espacio vectorial, sobre el cuerpo de los números reales, de las funciones reales definidas en [0, 1]. Si T es la aplicación de E en F que asigna a cada función su derivada, demuéstrese que T es una aplicación lineal. Hállese el núcleo de dicha aplicación.

Solución:

Si $f, g \in E$ y $\alpha \in K$, se tiene:

$$(f + g)' = f' + g'$$
$$(\alpha f)' = \alpha f',$$

por lo que T es una aplicación lineal.

$T^{-1}(0)$ está formado por todas las funciones derivables definidas en [0, 1], cuyas derivadas son nulas, es decir, por las funciones constantes.

TEMA II

2. Espacios vectoriales (II)

1.2. Cociente de un espacio vectorial. Producto y suma directa de espacios vectoriales.
2.2. Formas lineales.
3.2. Conjuntos en un espacio vectorial.

1.2. COCIENTE DE UN ESPACIO VECTORIAL. PRODUCTO Y SUMA DIRECTA DE ESPACIOS VECTORIALES

Sea F un subespacio de un espacio vectorial E. Establecemos en E una relación $\mathscr{R}$ poniendo, para cada x, y $\in$ E:

$$x\mathscr{R}y \quad \Leftrightarrow \quad x - y \in F.$$

Se comprueba fácilmente que $\mathscr{R}$ es una relación de equivalencia. Al cociente de E por $\mathscr{R}$ se le representa por E/F. Cada elemento de E/F tiene la forma x + F, en donde x es un vector de E. Es inmediato, si x, y $\in$ E, que x + F coincide con y + F si, y sólo si, x − y $\in$ F.

Se define la suma en E/F:

$$(x + F) + (y + F) = x + y + F,$$

y el producto por $\alpha \in K$:

$$\alpha(x + F) = \alpha x + F.$$

No ofrece ninguna dificultad ver que las anteriores leyes de composición están bien definidas y que le dan a E/F una estructura de espacio vectorial sobre el cuerpo K. A E/F se le supone dotado de dicha estructura y se le llama el cociente de E por F.

La aplicación f que asigna a cada elemento x de E el vector x + F de E/F es lineal y suprayectiva. Recibe el nombre de aplicación cociente o bien de aplicación canónica de E sobre E/F.

Teorema 1.1.2

Si G *es un subespacio de* E *suplementario de* F, *entonces* G *es isomorfo a* E/F.

Demostración:

Sea f la aplicación canónica de E sobre E/F. Dado un elemento cualquiera x + F en E/F se tiene que

$$f(x) = x + F.$$

Ponemos:

$$x = x_1 + x_2, \quad x_1 \in F, x_2 \in G.$$

Si g es la restricción de f a G, resulta que

$$f(x) = f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2) = F + f(x_2) = g(x_2),$$

de aquí que g sea una aplicación suprayectiva. Por otra parte, si z es un elemento cualquiera de G, distinto del origen, z no pertenece a F y, por consiguiente,

$$g(z) = f(z) = z + F \neq F = f(0)$$

por lo que g es inyectiva. Finalmente, g es lineal por ser la restricción de una aplicación lineal a G.

Podemos asegurar, pues, que g es un isomorfismo de G sobre E/F.

c.q.d.

Teorema 2.1.2

Sean G_1 *y* G_2 *dos espacios del espacio* E. *Si* G_1 *y* G_2 *son suplementarios de* F, *entonces:*

$$\mathit{dim}\, G_1 = \mathit{dim}\, G_2.$$

Demostración:

Es consecuencia inmediata del teorema anterior:

$$\dim G_1 = \dim E/F = \dim G_2.$$

c.q.d.

Definición 1.1.2

En el espacio vectorial E, *se llama codimensión del subespacio* F *a la dimensión de cualquier subespacio de* E *suplementario de* F *o, lo que es lo mismo, a la dimensión del espacio vectorial* E/F.

Sea $\{E_i : i \in I\}$ una familia no vacía de espacios vectoriales definidos sobre el mismo cuerpo K. A la colección de todas las familias de la forma $\{x_i : i \in I\}$, con $x_i \in E_i$, $i \in I$, se le llama el producto de los espacios $E_i, i \in I$, y se le representa por

$$\Pi \{E_i : i \in I\}. \tag{1}$$

Si $\{x_i : i \in I\}$, $\{y_i : i \in I\} \in \Pi \{E_i : i \in I\}$, y $\alpha \in K$, se define:

$$\{x_i : i \in I\} + \{y_i : i \in I\} = \{x_i + y_i : i \in I\}$$
$$\alpha\{x_i : i \in I\} = \{\alpha x_i : i \in I\}$$

Se tiene entonces que (1), con dichas leyes de composición, es un espacio vectorial sobre el cuerpo K. A los espacios E_i, $i \in I$, se les llama los espacios coordenados de (1).

Si fijamos j en I, a la aplicación P_j de $\Pi \{E_i : i \in I\}$ en E_j tal que

$$P_j(\{x_i : \in i \in I\}) = x_j$$

se le llama la proyección de $\Pi \{E_i : i \in I\}$ sobre el espacio coordenado P_j. Esta aplicación es, evidentemente, lineal y suprayectiva.

Al subespacio

$$\oplus \ \{E_i : i \in I\}$$

de $\Pi \{E_i : i \in I\}$ que consiste de todas aquellas familias $\{x_i : i \in I\}$, $x_i \in E_i$, $i \in I$, tales que $x_i = 0$, salvo para un número finito de subíndices i, se le llama la suma directa de los espacios E_i, $i \in I$.

2.2. FORMAS LINEALES

Sea E un espacio vectorial sobre el cuerpo K. Al cuerpo K lo consideramos también como un espacio vectorial sobre K. A cada aplicación lineal de E en K se le llama forma lineal o funcional lineal sobre E. Al espacio vectorial $\mathscr{L}(E, K)$ se le representa también por E^* y se le denomina dual de E, o bien, dual algebraico de E.

Sea F un subespacio de E de codimensión uno. A todo subconjunto de E de la forma: $x + F$, $x \in E$, se le llama un hiperplano que pasa por x. En particular, F es un hiperplano que pasa por el origen.

Teorema 1.2.2

Si en el espacio vectorial E, H *es un hiperplano que pasa por el origen, existe una forma lineal* f *sobre* E, *no idénticamente nula, de manera que el núcleo de* f *coincide con* H.

Demostración:

Sea L un subespacio de dimensión uno de E, suplementario de H. Tomamos en L un vector z distinto de cero. Si x es un elemento cualquiera de E, podemos poner:

$$x = \lambda z + u, \quad \lambda \in K, u \in H.$$

Sea f la aplicación de E en K tal que

$$f(x) = f(\lambda z + u) = \lambda.$$

Se tiene que $f(x) = 0$ si, y sólo si, $\lambda = 0$, lo que equivale a afirmar que x pertenece a H, de aquí que el núcleo de f coincida con H.

Si $x, y \in E$, $\alpha \in K$, se tiene que

$$x = \lambda_1 z + u_1, \quad y = \lambda_2 z + u_2, \quad \lambda_1, \lambda_2 \in K, u_1, u_2 \in H,$$

y, por consiguiente,

$$x + y = (\lambda_1 + \lambda_2)z + u_1 + u_2, \quad \lambda_1 + \lambda_1 \in K, u_1 + u_2 \in H,$$
$$\alpha x = \alpha\lambda_1 z + \alpha u_1, \quad \alpha\lambda_1 \in K, \alpha u_1 \in H,$$

de aquí que

$$f(x + y) = \lambda_1 + \lambda_2 = f(x) + f(y)$$
$$f(\alpha x) = \alpha\lambda_1 = \alpha f(x),$$

lo que nos indica que f es una forma lineal sobre E. Finalmente, f no es idénticamente nula, puesto que su núcleo es H, que es distinto de E.

Teorema 2.2.2

En el espacio vectorial E, *si* f *es una forma lineal no idénticamente nula, su núcleo es un hiperplano que pasa por el origen.*

Demostración:

Puesto que f es una aplicación lineal de E en K, su núcleo H es un subespacio de E. Al no ser f idénticamente nula, H es distinto de E. Tomamos un elemento z en E que no esté en H. Sea L la envoltura lineal de $\{z\}$. El subespacio L es de dimensión uno y

$$L \cap H = \{0\}.$$

Veamos ahora que L es suplementario de H. En efecto, dado un elemento cualquiera x de E, sea

$$u = x - \frac{f(x)}{f(z)} z$$

Entonces

$$f(u) = f(x) - \frac{f(x)}{f(z)} f(z) = 0,$$

por lo que

$$x = \frac{f(x)}{f(z)} z + u, \frac{f(x)}{f(z)} \in K, u \in H.$$

c.q.d.

Nota:

Obsérvese que en la demostración anterior se prueba que si H es el núcleo de una aplicación lineal no idénticamente nula y z es un vector cualquiera de E, que no esté en H, entonces:

$$E = H \oplus L,$$

siendo L la envoltura lineal de $\{z\}$.

Teorema 3.2.2

En el espacio vectorial E *sean* H_1 *y* H_2 *dos hiperplanos que pasan por el origen. Si* H_1 *contiene* H_2, *entonces* H_1 *coincide con* H_2.

Demostración:

Supongamos que H_1 es distinto de H_2. Tomamos un elemento z en H_1 que no esté en H_2. Sea L la envoltura lineal de $\{z\}$. Hallamos una forma lineal f sobre E cuyo núcleo sea H_2. De acuerdo con la nota anterior resulta que:

$$E = H_2 \oplus L \subset H_1,$$

es decir: $E = H_1$, lo cual está en contra de la condición de ser H_1 un hiperplano de E.

c.q.d.

Teorema 4.2.2

Si P *es un hiperplano en un espacio vectorial* E, *existe una forma lineal* f, *no idénticamente nula, y un elemento* α *de* K, *de manera que*

$$P = \{x \in E : f(x) = \alpha\}.$$

Demostración:

Sea H un hiperplano de E que pasa por el origen y sea x_0 un vector de E, de manera que

$$P = x_0 + H.$$

Hallamos una forma lineal f sobre E, no idénticamente nula, cuyo núcleo sea H. Ponemos:

$$\alpha = f(x_0).$$

Entonces, si $x \in P$, podemos escribir:

$$x = x_0 + u, \quad u \in H,$$

por lo que

$$f(x) = f(x_0) + f(u) = \alpha,$$

de aquí que

$$P \subset \{x \in E : f(x) = \alpha\}.$$

Recíprocamente, si x es un elemento de E que verifica:

$$f(x) = \alpha,$$

se tiene que

$$f(x - x_0) = f(x) - f(x_0) = \alpha - \alpha = 0,$$

y, por consiguiente,

$$x - x_0 \in H,$$

es decir:

$$x \in x_0 + H = P,$$

luego:

$$\{x \in E : f(x) = \alpha\} \subset P.$$

c.q.d.

Proposición 1.2.2

Sean f_0 *y* f_1 *dos formas lineales sobre el espacio vectorial* E. *Si el núcleo de* f_0 *es combinación lineal de* f_1.

Demostración:

Si $f_0^{-1}(0) = E$, la aplicación f_0 es idénticamente nula y, por consiguiente,

$$f_0 = 0 \cdot f_1.$$

Si $f_0^{-1}(0)$ es un hiperplano de E, se tiene, de acuerdo con lo demostrado anteriormente, que

$$f_0^{-1}(0) = f_1^{-1}(0).$$

Sea z un elemento de E que no esté en $f_0^{-1}(0)$. Entonces, si x es un vector cualquiera de E, se puede poner:

$$x = \lambda z + u, \quad \lambda \in K, u \in f_0^{-1}(0) = f_1^{-1}(0),$$

y, por tanto,

$$f_0(x) - \frac{f_0(z)}{f_1(z)} f_1(x) = \lambda f_0(z) - \frac{f_0(z)}{f_1(z)} \lambda f_1(z) = 0,$$

de aquí que

$$f_0 = \frac{f_0(z)}{f_1(z)} f_1.$$

Teorema 5.2.2

Sean $f_0, f_1, f_2, \ldots, f_n$, $n + 1$ *formas lineales sobre* E. *La forma lineal* f_0 *es combinación lineal de* $f_1, f_2, \ldots, f_n$ *si, y sólo si,*

$$f_0^{-1}(0) \supset \bigcap_{j=1}^{n} f_j^{-1}(0).$$

Demostración:

Si f_0 es combinación lineal de $f_1, f_2, \ldots, f_n$, existen n elementos en K : $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, de manera que

$$f_0(x) = \alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x) + \cdots + \alpha_n f_n(x), \quad \forall\, x \in E,$$

de donde se deduce, si

$$x \in \bigcap_{j=1}^{n} f_j^{-1}(0),$$

que $f_0(x)$ es cero, de aquí que

$$f_0^{-1}(0) \supset \bigcap_{j=1}^{n} f_j^{-1}(0).$$

Recíprocamente, supongamos que

$$f_0^{-1}(0) \supset \bigcap_{j=1}^{n} f_j^{-1}(0). \tag{2}$$

Procederemos ahora por inducción completa. Supongamos que la propiedad es cierta para un entero r, es decir, que si $h_0, h_1, \ldots, h_r$ son formas lineales cualesquiera sobre un espacio vectorial cualquiera H, tales que

$$h_0^{-1}(0) \supset \bigcap_{j=1}^{n} h_j^{-1}(0)$$

se tiene que h_0 es combinación lineal de $h_1, h_2, \ldots, h_r$. La proposición anterior pone de manifiesto que dicha hipótesis es cierta para $r = 1$.

Tomemos un espacio vectorial L y las formas lineales sobre él: $k_0, k_1, \ldots, k_r, k_{r+1}$, tales que

$$k_{r+1}^{-1}(0) \supset \bigcap_{j=1}^{r+1} k_j^{-1}(0).$$

Sea F el núcleo de k_{r+1}. Llamemos g_j a la restricción de k_j a F, $j = 0, 1, \ldots, r, r+1$. Entonces:

$$g_0^{-1}(0) \supset \bigcap_{j=1}^{r+1} g_j^{-1}(0) = \bigcap_{j=1}^{r} g_j^{-1}(0),$$

de aquí que g_0 sea combinación lineal de $g_1, g_2, \ldots, g_r$. Existen, por tanto, r elementos de K : $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_r$, de manera que

$$g_0(x) = \beta_1 g_1(x) + \beta_2 g_2(x) + \cdots + \beta_r g_r(x), \quad \forall x \in F,$$

y, por consiguiente, el núcleo de

$$k_0 - \beta_1 k_1 - \beta_2 k_2 - \cdots - \beta_r k_r \tag{3}$$

contiene $F = k_{r+1}^{-1}(0)$, de donde se deduce, teniendo en cuenta la proposición anterior, que la forma lineal (3) es combinación lineal de k_{r+1}, es decir:

$$k_0 - \beta_1 k_1 - \beta_2 k_2 - \cdots - \beta_r k_r = \beta_{r+1} k_{r+1}, \quad \beta_{r+1} \in K,$$

de aquí que

$$k_0 = \beta_1 k_1 + \beta_2 k_2 + \cdots + \beta_r k_r + \beta_{r+1} k_{r+1},$$

y la propiedad enunciada vale para un entero positivo cualquiera. De acuerdo con (2), podemos asegurar, por tanto, que f_0 es combinación lineal de $f_1, f_2, \ldots, f_n$.

c.q.d.

Corolario:

Sean $f_0, f_1, f_2, \ldots, f_n$, $n+1$, *formas lineales sobre el espacio vectorial* E. *Si* f_0 *no es combinación lineal de* $f_1, f_2, \ldots, f_n$, *existe un elemento* z *en* E *tal que*

$$f_0(z) = 1, \ f_j(z) = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Demostración:

Se tiene, de acuerdo con el teorema anterior, que

$$f_0^{-1}(0) \not\supset \bigcap_{j=1}^{n} f_j^{-1}(0)$$

y, por tanto, existe un vector x_0 en E que verifica:

$$f_0(x) \neq 0, \ f_j(x_0) = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Si z es igual a $\frac{1}{f(x_0)} x_0$, resulta que

$$f_0(z) = 1, \; f_j(z) = 0, \quad j = 1, 2, ..., n.$$

c.q.d.

3.2. CONJUNTOS EN UN ESPACIO VECTORIAL

Sea E un espacio vectorial sobre el cuerpo K. Un subconjunto A de E se dice que es convexo si dados dos elementos cualesquiera x e y en A y un número real λ del intervalo cerrado [0, 1], se tiene que

$$\lambda x + (1 - \lambda)y \in A.$$

Proposición 1.3.2

Si A *es un subconjunto convexo de* E, $x_1, x_2, ..., x_n \in A$ *y* λ_p, $1 \leqslant p \leqslant n$, *son números reales no negativos tales que*

$$\sum_{p=1}^{n} \lambda_p = 1,$$

se tiene que

$$\sum_{p=1}^{n} \lambda_p x_p \in A.$$

Demostración:

Dado el entero positivo r, supongamos que la propiedad es cierta para n = r. Para r = 1 es obvio que esto es verdad.

Si $x_1, x_2, ..., x_{r+1}$ están en A y $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_{r+1}$ son números reales no negativos tales que

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_{r+1} = 1,$$

es inmediato que, para algún valor de j, $1 \leqslant j \leqslant r + 1$, λ_j es distinto de cero. Supongamos, para precisar las ideas, que $\lambda_1 \neq 0$. Si

$$\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_r$$

se tiene que

$$0 < \lambda \leqslant 1, \; 1 - \lambda = \lambda_{r+1}, \quad \sum_{j=1}^{r} \frac{\lambda_j}{\lambda} = 1,$$

de aquí que

$$x = \frac{\lambda_1}{\lambda} x_1 + \frac{\lambda_2}{\lambda} x_2 + \cdots + \frac{\lambda_r}{\lambda} x_r \in A.$$

Entonces:

$$\lambda x + (1 - \lambda) x_{r+1} = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_r x_r + \lambda_{r+1} x_{r+1} \in A.$$

c.q.d.

Proposición 2.3.2

Si A *y* B *son subconjuntos convexos de* E, *se tiene que* A + B *es convexo.*

Demostración:

Tomamos los vectores x e y en A + B. Podemos escribir:

$$\begin{aligned} x &= x_1 + x_2, \quad x_1 \in A, x_2 \in B, \\ y &= y_1 + y_2, \quad y_1 \in A, y_2 \in B. \end{aligned}$$

Si $\lambda \in [0, 1]$ se tiene:

$$\lambda x_1 + (1 - \lambda) y_1 \in A, \ \lambda x_2 + (1 - \lambda) y_2 \in B$$

y, por tanto,

$$\begin{aligned} \lambda x + (1 - \lambda) y &= \lambda (x_1 + x_2) + (1 - \lambda)(y_1 + y_2) = \\ &= [\lambda x_1 + (1 - \lambda) y_1] + [\lambda x_2 + (1 - \lambda) y_2] \in A + B. \end{aligned}$$

c.q.d.

Proposición 3.3.2

Sean A *un subconjunto convexo de* E *y* α *un elemento de* K. *Entonces* αA *es convexo.*

Demostración:

Si A es el conjunto vacío, entonces αA también es el conjunto vacío, que es convexo. Supongamos ahora que $A \neq \varnothing$. Si $\alpha = 0$ se tiene que

$$\alpha A = \{0\},$$

que es un conjunto convexo. Si, por el contrario, α es distinto de cero, tomamos x e y en αA y λ en el intervalo [0, 1]. Entonces:

$$\frac{x}{\alpha}, \frac{y}{\alpha} \in A$$

y, por tanto,

$$\lambda \frac{x}{\alpha} + (1 - \lambda) \frac{y}{\alpha} \in A,$$

de donde se deduce que

$$\lambda x + (1 - \lambda) y \in \alpha A.$$

c.q.d.

Proposición 4.3.2

Sea A *un subconjunto convexo de* E. *Si* α *y* β *son números reales no negativos, se tiene que*

$$\alpha A + \beta A = (\alpha + \beta) A.$$

Demostración:

Si $A = \emptyset$, resulta que

$$\alpha A + \beta A = \emptyset, (\alpha + \beta) A = \emptyset,$$

por lo que

$$\alpha A + \beta A = (\alpha + \beta) A.$$

Si $A \neq \emptyset$ y $\alpha + \beta = 0$, se tiene que

$$\{0\} = \alpha A + \beta A, \{0\} = (\alpha + \beta) A$$

y, por tanto,

$$\alpha A + \beta A = (\alpha + \beta) A.$$

Finalmente, si $A \neq \emptyset$ y $\alpha + \beta > 0$, sea x un vector de $\alpha A + \beta A$. Existen y_1 e y_2 en A tales que

$$x = \alpha y_1 + \beta y_2.$$

Entonces:

$$x = (\alpha + \beta) \left[\frac{\alpha}{\alpha + \beta} y_1 + \frac{\beta}{\alpha + \beta} y_2 \right] \in (\alpha + \beta) A,$$

por lo que

$$\alpha A + \beta A \subset (\alpha + \beta) A.$$

Si $z \in (\alpha + \beta)A$, resulta que

$$\frac{z}{\alpha + \beta} \in A,$$

y, por consiguiente,

$$\alpha \frac{z}{\alpha + \beta} + \beta \frac{z}{\alpha + \beta} = z \in \alpha A + \beta A,$$

de aquí que

$$\alpha A + \beta A \supset (\alpha + \beta)A.$$

c.q.d.

Proposición 5.3.2

Si A *es un subconjunto convexo de* E *y* $x \in E$, *entonces* $x + A$ *es convexo.*

Demostración:

Sean u y v dos elementos cualesquiera de $x + A$ y λ un número real del intervalo [0, 1]. Entonces:

$$u - x \in A, \quad v - x \in A$$

y, por consiguiente,

$$\lambda(u - x) + (1 - \lambda)(v - x) = \lambda u + (1 - \lambda)v - x \in A,$$

es decir:

$$\lambda u + (1 - \lambda)v \in x + A.$$

c.q.d.

Proposición 6.3.2

Si $\{A_i : i \in I\}$ *es una familia de subconjuntos convexos de* E, *se tiene que*

$$\cap \{A_i : i \in I\}$$

es un conjunto convexo.

Demostración:

Sean u y v dos elementos cualesquiera de

$$\cap \{A_i : i \in I\}$$

y λ un elemento de [0, 1]. Entonces:

$$\lambda u + (1 - \lambda)v \in A_i, \quad \forall\, i \in I,$$

y, por tanto,

$$\lambda u + (1 - \lambda)v \in \cap \{A_i : i \in I\}.$$

c.q.d.

Si A es un subconjunto cualquiera de E, sea $\{A_i : i \in I\}$ la familia de todos los subconjuntos de E que contienen A. Entonces:

$$\langle A \rangle = \cap \{A_i : i \in I\}$$

es el conjunto convexo más pequeño que contiene A. Al conjunto $\langle A \rangle$ se le llama la envoltura convexa de A.

Proposición 7.3.2

Sea $\{A_j : j \in J\}$ *una familia de subconjuntos convexos de* E. *La envoltura convexa de* $\cup \{A_j : j \in J\}$ *coincide con el conjunto* B *de todos los vectores de la forma:*

$$\sum \{\alpha_j x_j : j \in J\},$$

$x_j \in A_j$, $\alpha_j \geqslant 0$, $\forall j \in J$, $\sum \{\alpha_j : j \in J\} = 1$, *y todos los* α_j *son nulos salvo para un subconjunto finito de índices.*

Demostración:

Dado un elemento cualquiera i de J y un vector z de A_i, el vector de B:

$$\sum \{\alpha_j x_j : j \in J\}$$

tal que $\alpha_i = 1$, $x_i = z$, coincide con z, por lo que

$$B \supset A_i$$

y, por consiguiente,

$$B \supset \cup \{A_i : i \in I\}.$$

Por otra parte, si u es un elemento cualquiera de B, podemos hallar n números reales no negativos:

$$\alpha_{j_1}, \alpha_{j_2}, \ldots, \alpha_{j_n}, \quad j_1, j_2, \ldots, j_n \in J,$$

de manera que

$$\alpha_{j_1} + \alpha_{j_2} + \cdots + \alpha_{j_n} = 1,$$

y n vectores:

$$x_{j_1} \in A_{j_n}, x_{j_2} \in A_{j_2}, \ldots, x_{j_n} \in A_{j_n},$$

tales que

$$u = \alpha_{j_1}x_{j_1} + \alpha_{j_2}x_{j_2} + \cdots + \alpha_{j_n}x_{j_n}$$

y, por tanto, de acuerdo con la Proposición 1.3.2, u pertenece a la envoltura convexa de:

$$\cup \{A_j : j \in J\},$$

de aquí que

$$B \subset \langle \cup \{A_j : j \in J\} \rangle.$$

Si u y v son dos elementos cualesquiera de B tales que

$$u = \sum \{\alpha_j x_j : j \in J\}$$
$$v \sum \{\beta_j x_j : j \in J\}$$

y λ es un número del intervalo [0, 1], se tiene que

$$\lambda u + (1 - \lambda)v = \sum \{\lambda\alpha_j x_j + (1 - \lambda)\beta_j y_j : j \in J\}.$$

Ponemos:

$$\lambda\alpha_j + (1 - \lambda)\beta_j = \mu_j.$$

Se tiene que

$$\mu_j \geqslant 0, \ \forall j \in J, \ \sum \{\mu_j ; j \in J\} = \lambda \sum \{\alpha_j : j \in J\} + (1 - \lambda) \sum \{\beta_j : j \in J\} = 1$$

y μ_j es igual a cero salvo para un subconjunto finito de índices.

Sea

$$I = \{j \in J : \mu_j \neq 0\}.$$

Entonces:

$$\lambda u + (1 - \lambda)v = \sum \left\{\mu_j\left(\frac{\lambda\alpha_j}{\mu_j} x_j + \frac{(1 - \lambda)\beta_j}{\mu_j} y_j\right) : j \in I\right\}$$

De

$$x_j \in A_j, \ y_j \in A_j,$$

y de ser A_j convexo, se deduce que

$$\frac{\lambda\alpha_j}{\mu_j} x_j + \frac{(1 - \lambda)\beta_j}{\mu_j} y_j \in A_j$$

y, por consiguiente,

$$\lambda u + (1 - \lambda)v \in B.$$

Por tanto, B es convexo, contiene $\cup\{A_j : j \in J\}$ y está contenido en $\langle \cup \{A_j : j \in J\}\rangle$, de aquí que

$$B = \langle \cup \{A_j : j \in J\}\rangle.$$

c.q.d

Corolario:

Sea A *el subconjunto de* E:

$$\{x_i : i \in I\}.$$

La envoltura convexa de A *coincide con el conjunto de todos los vectores de la forma:*

$$\sum \{\alpha_i x_i : i \in I\},$$

$\alpha_i \geqslant 0, \forall\, i \in I, \sum \{\alpha_i : i \in I\} = 1$, *y* $\alpha_i = 0$, *salvo para un subconjunto finito de índices.*

Demostración:

Basta poner:

$$A_i = \{x_i\}, \quad i \in I,$$

observar que cada A_i es convexo y aplicar la proposición anterior.

c.q.d.

Se dice que el subconjunto A del espacio vectorial E es equilibrado cuando

$$\lambda A \subset A, \quad \forall\, \lambda \in K, |\lambda| \leqslant 1.$$

Proposición 8.3.2

Si $\{A_i : i \in I\}$ *es una familia de subconjuntos equilibrados de* E, *se tiene que*

$$\cap \{A_i : i \in I\}$$

es equilibrado.

Demostración:

Si $\lambda \in K$, $|\lambda| \leqslant 1$, se tiene que

$$\lambda \cap \{A_i : i \in I\} \subset \lambda A_i \subset A_i, \quad \forall\, i \in I,$$

y, por tanto,

$$\lambda \cap \{A_i : i \in I\} \subset \cap \{A_i : i \in I\}.$$

c.q.d.

Proposición 9.3.2

Sea A *un subconjunto equilibrado de* E. *Si* $\lambda \in K$, *entonces:*

$$\lambda A = |\lambda| A.$$

Demostración:

Es obvio que basta hacer la prueba para el caso en que $\lambda \neq 0$, lo que vamos a suponer. Ponemos λ para el conjugado de λ.

Si $x \in \lambda A$, entonces:

$$\frac{x}{\lambda} \in A$$

y, puestos que $\left|\frac{|\lambda|}{\lambda}\right| = 1$, se tiene que

$$\frac{|\lambda|}{\lambda} \cdot \frac{x}{\lambda} = \frac{x}{|\lambda|} \in \frac{|\lambda|}{\lambda} A \subset A$$

y, por tanto,

$$x \in |\lambda| A.$$

Si $z \in |\lambda| A$, entonces:

$$\frac{z}{|\lambda|} \in A$$

y, puesto que $\left|\frac{|\lambda|}{\lambda}\right| = 1$, resulta que

$$\frac{|\lambda|}{\lambda} \frac{z}{|\lambda|} \in \frac{|\lambda|}{\lambda} A \subset A$$

y, por consiguiente,

$$z \in \lambda A.$$

c.q.d.

Sea A un subconjunto cualquiera en el espacio E. Sea $\{A_i : i \in I\}$ la familia de todos los subconjuntos equilibrados de E que contienen A. Entonces:

$$[A] = \cap \{A_i : i \in I\}$$

es el conjunto equilibrado más pequeño que contiene A. Al conjunto [A] se le llama la envoltura equilibrada de A.

Proposición 10.3.2

Si A *es un subconjunto de* E, *se tiene que*

$$B = \{\lambda x : x \in A, \lambda \in K, |\lambda| \leqslant 1\}$$

coincide con [A].

Demostración:

Es inmediato que

$$A \subset B \subset [A].$$

Por otra parte, sea v un vector cualquiera de B y μ un elemento de K, $|\mu| \leqslant 1$. Existe un α en K, $|\alpha| \leqslant 1$, y un z en A, de manera que

$$v = \alpha z$$

y, por consiguiente,

$$\mu v = \mu\alpha z, \quad |\mu\alpha| = |\mu| \cdot |\alpha| \leqslant 1,$$

de donde se deduce que $\mu v \in B$ y, por tanto, B es equilibrado, de aquí que B coincida con [A].

c.q.d.

Proposición 11.3.2

Si A *es un subconjunto de* E *y* γ *es un número real positivo, el conjunto:*

$$M = \cup\{\lambda A : \lambda \in K, |\lambda| \leqslant \gamma\}$$

es equilibrado.

Demostración:

Se tiene:

$$[\gamma A] = \cup\{\mu\gamma A : \mu \in K, |\mu| \leqslant 1\} = \cup\{\lambda A : \lambda \in K, |\lambda| \leqslant \gamma\} = M.$$

c.q.d.

Si un subconjunto de E es convexo y equilibrado, se dice que es absolutamente convexo.

Proposición 12.3.2

Sea A *un subconjunto de* E. *Si* A *es equilibrado su envoltura convexa es equilibrada.*

Demostración:

Si z es un elemento de $\langle A \rangle$, existen n números reales positivos: $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$, tales que

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n = 1,$$

y n vectores en A: $x_1, x_2, ..., x_n$, de manera que

$$z = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n.$$

Si $\lambda \in K$, $|\lambda| \leqslant 1$, se tiene:

$$\lambda z = \alpha_1(\lambda x_1) + \alpha_2(\lambda x_2) + \cdots + \alpha_n(\lambda x_n),$$

de donde se deduce, teniendo en cuenta que

$$\lambda x_j \in A, \quad j = 1, 2, ..., n,$$

que $\lambda z \in \langle A \rangle$, de aquí que este conjunto sea equilibrado.

c.q.d.

Sea A un subconjunto cualquiera de E. Sea $\{A_i : i \in I\}$ la familia de todos los subconjuntos absolutamente convexos de E que contienen A. Entonces:

$$A_* = \cap \{A_i : i \in I\}$$

es el conjunto absolutamente convexo más pequeño que contiene A. Al conjunto A_* se le llama la envoltura absolutamente convexa de A.

Proposición 13.3.2

Si A *es un subconjunto de* E, *se tiene:*

$$A_* = \langle [A] \rangle.$$

Demostración:

Es una consecuencia inmediata de la proposición anterior.

c.q.d.

Se dice que un subconjunto A de E es absorbente, si para cada $x \in E$ existe un número positivo $\varepsilon(x)$, de manera que $\lambda x \in A$, si $\lambda \in A$, $|\lambda| \leqslant \varepsilon(x)$.

Proposición 14.3.2

Sea A *un subconjunto equilibrado de* E. *Si para cada* $x \in E$ *existe un número positivo* $\alpha(x)$ *tal que*

$$\alpha(x)x \in A,$$

entonces A *es absorbente.*

Demostración:

Si $\lambda \in K$, $|\lambda| \leqslant \alpha(x)$, se tiene que

$$\frac{|\lambda|}{\alpha(x)} \leqslant 1$$

y, por tanto,

$$\lambda x = \frac{\lambda}{\alpha(x)} \alpha(x) x \in \frac{\lambda}{\alpha(x)} A \subset A,$$

de aquí que A sea absorbente.

c.q.d.

La siguiente proposición es inmediata.

Proposición 15.3.2

Si $A_1, A_2, \ldots, A_2$ *son subconjuntos absorbentes de* E, *entonces*

$$A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$$

es absorbente.

EJERCICIOS DE AUTOCOMPROBACION CON SOLUCIONES

1. Sea F un subespacio de un espacio vectorial E. Si

$$\dim F < \infty \quad y \quad \dim E = \infty,$$

demuéstrese que

$$\dim E = \dim E/F.$$

Solución:

Sea G un subespacio de E suplementario de F. Entonces:

$$\dim E = \dim G + \dim F = \dim G = \dim E/F.$$

2. Sea I un conjunto no vacío. Para cada $i \in I$ sea

$$E_i = R.$$

Calcúlese la dimensión de

$$\oplus \{E_i : i \in I\}.$$

Solución:

Para cada $j \in I$, sea e_j el elemento $\{x_i : i \in I\}$ de $\oplus \{E_i : i \in I\}$ tal que

$$e_i = 0, \quad i \in I \sim \{j\}$$
$$e_j = 1$$

Es inmediato que $\{e_i : i \in I\}$ es una base de $\oplus \{E_i : i \in I\}$, por lo que

$$\dim + \{E_i : i \in I\} = \text{card}\, I$$

3. Sea I un conjunto infinito numerable. Para cada $i \in I$, ponemos:

$$E_i = R.$$

Hallar la dimensión del espacio vectorial:

$$\Pi \{E_i : i \in I\}.$$

Solución:

El número de elementos de $\Pi \{E_i : i \in I\}$ coincide con el de aplicaciones de I en R, es decir:

$$\text{card}\, \Pi \{E_i : i \in I\} = \text{card}\, R^I = (2^\omega)^{\text{card}\, I} = 2^{\omega\omega} = 2^\omega.$$

Si Q es el conjunto de todos los números racionales, sea φ una aplicación biyectiva de I en Q. Para cada número real α, ponemos:

$$x[\alpha] = \{e^{\alpha\varphi(i)} : i \in I\}.$$

Veamos que $\{x[\alpha] : \alpha \in R\}$ es un conjunto linealmente de $\Pi \{E_i : i \in I\}$. En efecto, sean $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ números reales diferentes. Si $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n$ son números reales tales que

$$\beta_1 x[\alpha_1] + \beta_2 x[\alpha_2] + \cdots + \beta_n x\alpha_n] = 0,$$

se tiene que

$$\beta_1 e^{\alpha_1\varphi(i)} + \beta_2 e^{\alpha_2\varphi(i)} + \cdots + \beta_n e^{\alpha_n\varphi(i)} = 0, \quad \forall\, i \in I.$$

Puesto que $\varphi(I) = Q$ y las funciones:

$$x \to e^{\alpha x}, \ \alpha \in R, \ x \in R,$$

son continuas, resulta que

$$\beta_1 e^{\alpha_1 x} + \beta_2 e^{\alpha_2 x} + \cdots + \beta_n e^{\alpha_n x} = 0, \quad \forall\, x \in R,$$

y teniendo en cuenta un ejercicio anterior, obtenemos:

$$\beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_n = 0,$$

por lo que $\{x[\alpha] : \alpha \in R\}$ es linealmente independiente. Hallamos una base de HamelBen $\Pi \{E_i : i \in I\}$ que contenga dicho conjunto.

Entonces:

$$2^{\omega} = \text{card}\,\Pi\,\{E_i : i \in I\} \geqslant \text{card}\,B = \dim \Pi\,\{E_i : i \in I\} \geqslant \text{card}\,\{x[\alpha] : \alpha \in R\} = \text{card}\,R = 2^{\omega}$$

de donde se deduce que

$$\dim \Pi\,\{E_i : i \in I\} = 2^{\omega}.$$

4. Sea E el espacio vectorial, sobre el cuerpo de los números reales, de las funciones reales continuas definidas en [0, 1]. Sea F el subconjunto de E formado por todas aquellas funciones que se anulan en 0. Demuéstrese que F es un hiperplano de E. Hállese una forma lineal sobre E cuyo núcleo sea F.

Solución:

Sean f y g dos elementos de E y sea α un número real. Si

$$f(0) = g(0) = 0,$$

entonces,

$$(f + g)(0) = f(0) + g(0) = 0$$
$$(\alpha f)(0) = \alpha f(0) = 0,$$

por lo que F es un subespacio de E. Sea G el subespacio de E formado por todas las funciones constantes. Si h es el vector de E tal que

$$h(x) = 1, \quad \forall\, x \in [0, 1],$$

y k es un elemento cualquiera de E, se tiene:

$$k(x) = \big(k(x) - k(0)\big) + k(0), \quad \forall\, x \in [0, 1]$$

y, por tanto, si representamos por r la función:

$$x \to k(x) - k(0), \quad \forall\, x \in [0, 1]$$

resulta que

$$k = r + k(0)h, \quad r \in E,\ k(0)h \in G,$$

de aquí que

$$E = F + G.$$

Por otra parte, es inmediato que

$$F \cap G = \{0\}$$

y, por consiguiente,

$$E = F + G.$$

Puesto que la dimensión de G es uno, se tiene que F es un hiperplano de E.

Sea T la aplicación de E en R definida por:

$$T(f) = f(0), \quad \forall f \in E.$$

Es inmediato que T es lineal y que el núcleo de T coincide con F.

5. En el plano euclídeo R^2, póngase un ejemplo de un subconjunto A que verifique:

$$\langle [A] \rangle \neq [\langle A \rangle].$$

Solución:

Sea A el segmento cerrado de extremos P y Q, [Fig. 1], es decir:

$$A = \{(x, y) : x + y = 1, \ x \geqslant 0, y \geqslant 0\}.$$

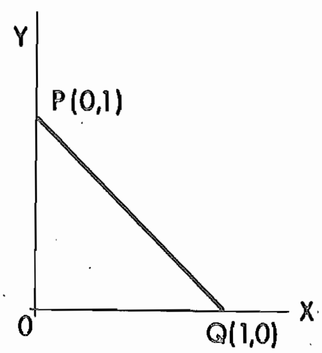

Fig. 1

Se tiene que [A] es la parte rayada en Fig. 2, es decir:

$$[A] = \{(x, y) : |x + y| \leqslant 1, \ xy \geqslant 0\}.$$

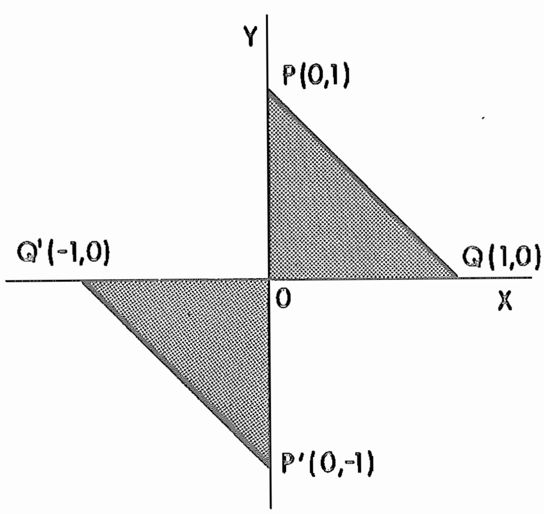

Fig. 2

Por otra parte, $\langle A \rangle$ coincide con A. Finalmente, $\langle [A] \rangle$ es la parte rayada en Fig. 3, es decir:

$$\langle [A] \rangle = \{(x, y) : |x| + |y| \leqslant 1\}.$$

Por tanto,

$$\langle [A] \rangle \neq [A] = [\langle A \rangle].$$

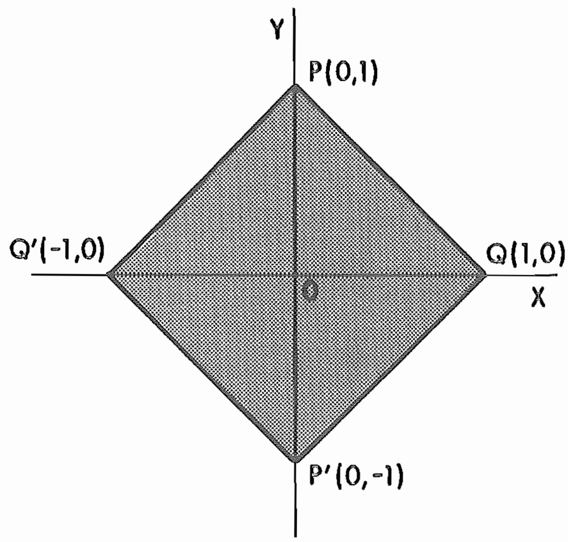

Fig. 3

6. Sea E un espacio vectorial real. Sea A un subconjunto convexo y simétrico de E. Demuéstrese que A es absolutamente convexo.

Solución:

Si λ es un número real tal que $|\lambda| \leqslant 1$, hemos de ver que λA está contenido en A.

Si $A = \emptyset$, es obvio que $\lambda A \subset A$. Supongamos, pues, que A sea distinto del conjunto vacío. Tomamos un vector x en A. Entonces $-x \in A$ y, puesto que A es convexo, resulta:

$$\frac{1}{2} x + \frac{1}{2}(-x) = 0 \in A,$$

por lo que, si $\lambda = 0$,

$$\lambda A = \{0\} \subset A.$$

Si $\lambda \neq 0$ y $z \in \lambda A$, entonces:

$$\frac{z}{\lambda} \in A, \quad -\frac{z}{\lambda} \in A$$

y, teniendo en cuenta que A es convexo y que

$$\frac{1+\lambda}{2} \geqslant 0, \frac{1-\lambda}{2} \geqslant 0, \frac{1+\lambda}{2} + \frac{1-\lambda}{2} = 1,$$

se tiene que

$$\frac{1+\lambda}{2}\frac{z}{\lambda} + \frac{1-\lambda}{2}\left(-\frac{z}{\lambda}\right) = z \in A,$$

luego:

$$\lambda A \subset A.$$

7. Sea $A = \{x_i : i \in I\}$ un subconjunto del espacio vectorial E. Demuéstrese que la envoltura absolutamente convexa de A coincide con el conjunto M de todos los vectores de la forma:

$$\sum \{\alpha_i x_i : i \in I\},$$

$\alpha_i \in K$, $\forall\, i \in I$, $\Sigma\{|\alpha_i| : i \in I\} \leqslant 1$, y $\alpha_i = 0$, salvo para un subconjunto finito de índices.

Solución:

La envoltura absolutamente convexa de A coincide con $\langle[A]\rangle$. Si

$$A_i = \{\lambda x_i : \lambda \in K, |\lambda| \leqslant 1\}$$

se tiene que A_i es convexo y equilibrado y está contenido en $\langle[A]\rangle$, para cada $i \in I$. Por otra parte, $\cup\{A_i : i \in I\}$ es equilibrado y, por tanto, su envoltura convexa coincide con $\langle[A]\rangle$. Dicha envoltura convexa es igual al conjunto formado por los vectores de la forma:

$$\sum \{\beta_i y_i : i \in I\}$$

$\beta_1 \geqslant 0$, $\forall\, i \in I$, $\sum\{\beta_i : i \in I\} = 1$, $y_i \in A_i$, $\forall\, i \in I$, y $\beta_i = 0$, salvo para un subconjunto finito de índices. Puesto que

$$y_i = \lambda_i x_i, \quad |\lambda_i| \leqslant 1,$$

se tiene que

$$\sum\{\beta_i y_i : i \in I\} = \sum\{\beta_i \lambda_i x_i : i \in I\},$$

$\sum\{|\beta_i \lambda_i| : i \in I\} \leqslant \sum\{\beta_i : i \in I\} = 1$, de aquí que $\langle[A]\rangle \subset M$.

Tomamos ahora un vector en M:

$$x = \sum\{\alpha_i x_i : i \in I\}.$$

Si $x = 0$, es obvio que $x \in \langle[A]\rangle$. Si x es distinto de cero, sean $i_1, i_2, \ldots, i_n$ el conjunto de todos los subíndices para los cuales:

$$\alpha_{i_1} \neq 0, \alpha_{i_2} \neq 0, \ldots, \alpha_{i_n} \neq 0.$$

Ponemos:

$$\mu = |\alpha_{i_1}| + |\alpha_{i_2}| + \cdots + |\alpha_{i_n}|.$$

Entonces:

$$\mu \frac{\alpha_{i_j}}{|\alpha_{i_j}|} x_{i_j} \in A_{i_j}, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

y, puesto que

$$\frac{|\alpha_{i_1}|}{\mu} + \frac{|\alpha_{i_2}|}{\mu} + \cdots + \frac{|\alpha_{i_n}|}{\mu} = 1,$$

se tiene que

$$x = \sum_{j=1}^{p} \alpha_{i_j} x_{i_j} = \sum_{j=1}^{p} \frac{|\alpha_{i_j}|}{\mu} \left(\frac{\mu}{|\alpha_{i_j}|} \alpha_{i_j} x_{i_j} \right) \in \langle[A]\rangle,$$

luego, $M = \langle[A]\rangle$.

ANALISIS MATEMATICO V

UNIDAD DIDACTICA 4

Preparada por:

Manuel Valdivia Ureña

TEMA XIX

19. Clases de conjuntos (I)

1.19. ANILLOS DE CONJUNTOS

En este tema y en el siguiente vamos a definir y a estudiar ciertas familias de conjuntos que tienen gran utilidad en la teoría de la medida. Suponemos que sobre un conjunto X elegimos dichas familias de subconjuntos. A continuación vamos a dar el concepto de anillo.

Definición:

Un anillo $\mathscr{R}$ *sobre* X *es una clase no vacía de subconjuntos de* X *que cumple la siguiente condición: si* E *y* F *son elementos cualesquiera de* $\mathscr{R}$, *entonces* $E \cup F$ *y* $E \sim F$ *pertenece también a* $\mathscr{R}$.

Proposición 1.1.19

El conjunto vacío pertenece al anillo $\mathscr{R}$.

Demostración:

Puesto que $\mathscr{R}$ es una clase no vacía, existe un elemento E en $\mathscr{R}$. Entonces:

$$E \sim E = \emptyset,$$

de aquí que $\emptyset$ pertenezca a $\mathscr{R}$.

c.q.d.

Proposición 2.1.19

La unión de un número finito de elementos de $\mathscr{R}$ pertenece también a $\mathscr{R}$.

Demostración:

Si E_1, E_2, ..., E_n están en $\mathscr{R}$, entonces:

$$E_1 \cup E_2 \in \mathscr{R},$$
$$E_1 \cup E_2 \cup E_3 = (E_1 \cup E_2) \cup E_3 \in \mathscr{R},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_{n-1} \cup E_n = (E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_{n-1}) \cup E_n \in \mathscr{R}.$$

c.q.d.

Proposición 3.1.19

La intersección de un número finito de elementos de $\mathscr{R}$ pertenece también a $\mathscr{R}$.

Demostración:

Basta hacer la prueba para dos elementos y proceder después por recurrencia. Supongamos, pues, que E y F pertenecen a $\mathscr{R}$. Entonces:

$$E \sim F \in \mathscr{R},$$

y también:

$$E \sim (E \sim F) \in \mathscr{R}.$$

Por otra parte,

$$E \sim (E \sim F) = E \sim (E \cap \complement F) = E \cap \complement(E \cap \complement F) =$$
$$= E \cap [\complement E \cup F] = (E \cap \complement E) \cup (E \cap F) = E \cap F,$$

de aquí que $E \cap E$ pertenezca a $\mathscr{R}$.

c.q.d.

Recordamos al lector que la diferencia simétrica de dos subconjuntos E y F de X es el conjunto:

$$E \Delta F = (E \sim F) \cup (F \sim E).$$

Proposición 4.1.19

La diferencia simétrica de dos elementos de $\mathscr{R}$ pertenece también a $\mathscr{R}$.

Demostración:

Si E y F están en $\mathscr{R}$, se tiene que

$$E \sim F \quad y \quad F \sim E$$

pertenecen a $\mathscr{R}$ y, por consiguiente,

$$E \Delta F = (E \sim F) \cup (F \sim E) \in \mathscr{R}.$$

c.q.d.

Proposición 5.1.19

Sea $\mathscr{R}_i$, $i \in I$, *una familia de anillos sobre* X. *Entonces:*

$$\cap \{\mathscr{R}_i : i \in I\}$$

es un anillo sobre X.

Demostración:

Puesto que el conjunto vacío pertenece a $\mathscr{R}_i$ para cada $i \in I$, resulta que

$$\cap \{\mathscr{R}_i : i \in I\}$$

es una clase no vacía. Por otra parte, si E y F están en

$$\cap \{\mathscr{R}_i : i \in I\}$$

entonces, para cada $i \in I$,

$$E \cup F \quad y \quad E \sim F$$

están en $\mathscr{R}_i$, de aquí que

$$E \cup F, E \sim F \in \cap\{\mathscr{R}_i : i \in I\}.$$

c.q.d.

Proposición 6.1.19

Sea $\mathscr{M}$ *una clase no vacía de subconjuntos de* X. *Entonces existe en* X *un anillo mínimo que contiene a* $\mathscr{M}$.

Demostración:

Sea $\{\mathscr{R}_i : i \in I\}$ la familia de todos los anillos sobre X que contienen a $\mathscr{M}$. Dicha familia no es vacía, puesto que la clase de todas las partes de X pertenece, obviamente, a ella. Entonces, de acuerdo con la proposición anterior,

$$\cap \{\mathscr{R}_i : i \in I\}$$

es un anillo que contiene a $\mathscr{M}$. Es obvio que dicho anillo es el mínimo, con la relación de inclusión, que contiene a $\mathscr{M}$.

c.q.d.

Nota 1

Si $\mathscr{R}$ es un anillo sobre X, se suele decir también que $\mathscr{R}$ es un anillo de Boole sobre X.

Nota 2

En la proposición anterior, al anillo mínimo que contiene a $\mathscr{M}$ se le llama el anillo engendrado por $\mathscr{M}$ y se le representa por $\mathscr{R}(\mathscr{M})$.

Si Y es un subconjunto de X y $\mathscr{F}$ es una clase de subconjuntos de X, ponemos:

$$\mathscr{F} \cap Y = \{F \cap Y : F \in \mathscr{F}\}.$$

Proposición 7.1.19

Si Y *es un subconjunto de* X *y* $\mathscr{R}$ *es un anillo sobre* X, *se tiene que*

$$\mathscr{R} \cap Y$$

es un anillo sobre Y.

Demostración:

Puesto que $\mathscr{R}$ es una clase no vacía, se tiene que la familia de conjuntos $\mathscr{R} \cap Y$ también es no vacía. Si E y F están en $\mathscr{R} \cap Y$, hallamos A y B en $\mathscr{R}$ de manera que

$$E = A \cap Y, F = B \cap Y.$$

Entonces:

$$E \cup F = (A \cap Y) \cup (B \cap Y) = (A \cup B) \cap Y,$$

y puesto que $A \cup B$ pertenece a $\mathscr{R}$, se tiene que

$$E \cup F \in \mathscr{R} \cap Y.$$

Por otra parte,

$$E \sim F = A \cap Y \sim B \cap Y = (A \sim B) \cap Y,$$

de donde se deduce, teniendo en cuenta que $A \sim B$ pertenece a $\mathscr{R}$, que

$$E \sim F \in \mathscr{R} \cap Y.$$

Podemos concluir, pues, que $\mathscr{R} \cap Y$ es un anillo sobre Y.

c.q.d.

Nota 3

Obsérvese que en la proposición anterior, $\mathscr{R} \cap Y$ es también un anillo sobre X.

Proposición 8.1.19

Si Y *es un subconjunto de* X *y* $\mathscr{M}$ *es una clase no vacía de* X, *se tiene que*

$$\mathscr{R}(\mathscr{M}) \cap Y = \mathscr{R}(\mathscr{M} \cap Y).$$

Demostración:

De acuerdo con la proposición anterior,

$$\mathscr{R}(\mathscr{M}) \cap Y$$

es un anillo sobre Y, y también sobre X, que contiene:

$$\mathscr{M} \cap Y,$$

por lo que

$$\mathscr{R}(\mathscr{M}) \cap Y \supset \mathscr{R}(\mathscr{M} \cap Y). \tag{1}$$

Sea $\mathscr{P}$ la clase de todos los subconjuntos de X de la forma $A \cup (B \sim Y)$, de manera que

$$A \in \mathscr{R}(\mathscr{M} \cap Y) \quad y \quad B \in \mathscr{R}(\mathscr{M}).$$

Si P y Q están en $\mathscr{P}$, se tiene que

$$P = A_1 \cup (B_1 \sim Y), Q = A_2 \cup (B_2 \sim Y)$$
$$A_1, A_2 \in \mathscr{R}(\mathscr{M} \cap Y) \quad ; \quad B_1, B_2 \in \mathscr{R}(\mathscr{M}).$$

Por tanto,

$$P \cup Q = \big(A_1 \cup (B_1 \sim Y)\big) \cup \big(A_2 \cup (B_2 \sim Y)\big) = (A_1 \cup A_2) \cup (B_1 \cup B_2 \sim Y),$$
$$A_1 \cup A_2 \in \mathscr{R}(\mathscr{M} \cap Y) \quad ; \quad B_1 \cup B_2 \in \mathscr{R}(\mathscr{M}),$$

por lo que

$$P \cup Q \in \mathscr{P}.$$

Por otra parte, puesto que

$$A_2 \cap (B_1 \sim Y) = \varnothing \quad ; \quad A_1 \cap (B_2 \sim Y) = \varnothing,$$

se deduce, fácilmente, que

$$P \sim Q = \big(A_1 \cup (B_1 \sim Y)\big) \sim \big(A_2 \cup (B_2 \sim Y)\big) = (A_1 \sim A_2) \cup \big((B_1 \sim B_2) \sim Y\big) \in \mathscr{P},$$

de aquí que $\mathscr{P}$ sea un anillo.

Si D pertenece a $\mathscr{M}$, se tiene que

$$D = (D \cap Y) \cup (D \sim Y),$$

y, puesto que

$$D \cap Y \in \mathscr{M} \cap Y \subset \mathscr{R}(\mathscr{M} \cap Y)$$
$$D \in \mathscr{M} \subset \mathscr{R}(\mathscr{M}),$$

resulta que

$$D \in \mathscr{P},$$

de aquí que

$$\mathscr{M} \subset \mathscr{P}$$

y, por consiguiente,

$$\mathscr{R}(\mathscr{M}) \subset \mathscr{P}. \tag{2}$$

Por otra parte, si

$$A \in \mathscr{R}(\mathscr{M} \cap Y) \quad y \quad B \in \mathscr{R}(\mathscr{M}),$$

se tiene que

$$(A \cup (B \sim Y)) \cap Y = A \cap Y = A \in \mathscr{R}(\mathscr{M} \cap Y),$$

por lo que

$$\mathscr{P} \cap Y \subset \mathscr{R}(\mathscr{M} \cap Y) \tag{3}$$

Se deduce de (2) y (3) que

$$\mathscr{R}(\mathscr{M}) \cap Y \subset \mathscr{R} \cap Y \subset \mathscr{R}(\mathscr{M} \cap Y)$$

y, teniendo en cuenta (1):

$$\mathscr{R}(\mathscr{M}) \cap Y = \mathscr{R}(\mathscr{M} \cap Y).$$

c.q.d.

Proposición 1.9.19

Sea $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ *una sucesión de elementos del anillo* $\mathscr{R}$. *Entonces existe una sucesión* $(B_n)_{n=1}^{\infty}$ *de elementos de* $\mathscr{R}$, *disjuntos dos a dos, de manera que*

$$B_n \subset A_n, \quad n = 1, 2, \ldots$$

y

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Demostración:

Ponemos:

$$\begin{aligned} B_1 &= A_1 \\ B_2 &= A_2 \sim A_1 \\ B_3 &= A_3 \sim (A_1 \cup A_2) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ B_{n+1} &= A_{n+1} \sim (A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

Entonces, es obvio que B_n está en $\mathscr{R}$ y que

$$B_n \subset A_n, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Por otra parte, si z es un elemento de $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, sea A_p el primer término de la sucesión $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ al cual pertenece z. Si $p = 1$, se tiene que $z \in B_1$, y si $p > 1$, entonces:

$$z \in A_p \quad y \quad z \notin A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_{p-1},$$

de aquí que

$$z \in A_p \sim (A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_{p-1}) = B_p.$$

Luego:

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n.$$

c.q.d.

Corolario:

Sean $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *elementos del anillo* $\mathscr{R}$. *Entonces existen en* $\mathscr{R}$ *los elementos* $B_1, B_2, \ldots, B_n$ *tales que son disjuntos dos a dos,* $B_j \subset A_j$, $j = 1, 2, \ldots, n$, y

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j.$$

Demostración:

Ponemos:

$$\varnothing = A_{n+1} = A_{n+2} = \cdots$$

y aplicamos la proposición anterior a la sucesión $(A_p)_{p=1}^{\infty}$. Hallamos la sucesión $(B_p)_{p=1}^{\infty}$ de elementos de $\mathscr{R}$, disjuntos dos a dos, tales que

$$B_p \subset A_p, \quad p = 1, 2, \ldots \tag{4}$$

y

$$\bigcup_{p=1}^{\infty} B_p = \bigcup_{p=1}^{\infty} A_p.$$

Entonces se deduce de (4) que

$$\varnothing = B_{n+1} = B_{n+2} = \cdots$$

por lo que

$$\bigcup_{p=1}^{n} B_p = \bigcup_{p=1}^{n} A_n.$$

c.q.d.

2.19. UN ANILLO DE INTERVALOS

Denotamos por $]a, b]$ el intervalo acotado de la recta R, con $a \leqslant b$, de extremos a y b, abierto en a y cerrado en b. Representamos por $\mathscr{I}$ la clase de todas las uniones finitas de todos los intervalos de la forma $]a, b]$.

Proposición 1.2.19

Si A *y* B *están en* $\mathscr{I}$, *entonces* $A \cap B$ *pertenece a* $\mathscr{I}$.

Demostración:

Se tiene que

$$A = \cup \{a_i, b_i] : i = 1, 2, ..., p\}$$
$$B = \cup \{]c_j, d_j] : j = 1, 2, ..., q\}$$

Entonces:

$$A \cap B = \cup \{]a_i, b_i] \cap]c_j, d_j] : i = 1, 2, ..., p;\ j = 1, 2, ..., q\},$$

por lo que es suficiente comprobar que

$$]a_i, b_i] \cap]c_j, d_j] \tag{1}$$

es de la forma $]a, b]$.

Si (1) es el conjunto vacío, se tiene que dicho conjunto se puede escribir en la forma $]b, b]$, siendo b un número real cualquiera.

Si (1) es distinto del conjunto vacío, existe un número real α tal que

$$a_i < \alpha \leqslant b_i,\ c_j < \alpha \leqslant d_j$$

y, por tanto,

$$\max\{a_i, c_j\} = a < \alpha \leqslant \min\{b_i, d_j\} = b.$$

Es inmediato comprobar que el conjunto (1) coincide con $]a, b]$.

c.q.d.

Proposición 2.2.19

Si $]a, b] \supset]c, d]$, *entonces* $]a, b] \sim]c, d]$ *pertenece a* $\mathscr{J}$.

Demostración:

La prueba es inmediata, puesto que

$$]a, b] \sim]c, d]$$

coincide con

$$]a, c] \cup]d, b]$$

c.q.d.

Proposición 3.2.19

Si B *es un elemento de* $\mathscr{J}$ *y* $]a, b] \supset B$, *entonces* $]a, b] \sim B$ *pertenece a* $\mathscr{J}$.

Demostración:

Sea

$$B = \cup\{]a_j, b_j] : j = 1, 2, ..., q\}.$$

Entonces:

$$]a, b] \sim B = \cap\{]a, b] \sim]a_j, b_j] : j = 1, 2, ..., q\}$$

y, puesto que $]a, b] \sim]a_j, b_j]$ pertenece a $\mathscr{J}$, de acuerdo con la proposición anterior, se tiene, aplicando la Proposición 1.2.19, que

$$]a, b] \sim B \in \mathscr{J},$$

c.q.d.

Teorema 1.2.19

La clase $\mathscr{J}$ *es un anillo.*

Demostración:

Es obvio que $\mathscr{J}$ es una clase no vacía. Por otra parte, si

$$A = \cup\{]a_i, b_i] : i = 1, 2, ..., p\}$$
$$B = \cup\{]a_i, b_i] : i = p + 1, p + 2, ..., q\},$$

resulta que

$$A \cup B = \cup \{]a_i, b_i] : i = 1, 2, ..., q\} \in \mathscr{J}.$$

Tomamos ahora un intervalo]a, b] contenido a $A \cup B$. Se tiene:

$$A \sim B = A \cap \quad B = A \cap (]a, b] \sim B).$$

De acuerdo con la proposición anterior

$$]a, b] \sim B \in \mathscr{J},$$

de donde se deduce, aplicando la Proposición 1.2.19, que

$$A \sim B \in \mathscr{J}.$$

Podemos concluir, pues, que $\mathscr{J}$ es un anillo.

c.q.d.

Nota

Si en la recta R, consideramos la familia $\mathscr{B}$ de todas las uniones finitas de intervalos acotados de la forma [a, b[, $a \leqslant b$, puede comprobarse, de una manera análoga a como lo hemos hecho para $\mathscr{J}$, que $\mathscr{B}$ es un anillo de Boole sobre R.

3.19. ALGEBRAS DE CONJUNTOS

Definición

Un algebra $\mathscr{A}$ sobre un conjunto X es una clase de subconjunto de X que cumple las siguientes condiciones:

a) $X \in \mathscr{A}$.

b) *Si* A *y* B *están en* $\mathscr{A}$, *entonces* $A \cup B \in \mathscr{A}$.

c) *Si* A *pertenece a* $\mathscr{A}$, *se tiene que* $\complement A$ *también está en* $\mathscr{A}$.

Proposición 1,3,19

Si $\mathscr{A}$ es un álgebra sobre X, *entonces $\mathscr{A}$ es un anillo.*

Demostración:

Basta ver que si A y B están en $\mathscr{A}$, se tiene que

$$A \sim B \in \mathscr{A}.$$

Podemos escribir:

$$A \sim B = A \cap \complement B = \quad (\complement A \cup B).$$

Por la condición c), $\complement A$ está en $\mathscr{A}$. Por la condición b), $\complement A \cup B$ pertenece a $\mathscr{A}$. Finalmente, aplicamos de nuevo c), y obtenemos:

$$\complement(\complement A \cup B) = A \sim B \in \mathscr{A}.$$

c.q.d.

Teorema 1.3.19

Un anillo $\mathscr{R}$ sobre el conjunto X es un álgebra si, y sólo si, $X \in \mathscr{R}$.

Demostración:

Si $\mathscr{R}$ es un álgebra, entonces $X \in \mathscr{R}$. Recíprocamente, supongamos que X pertenece a $\mathscr{R}$. Entonces, si $A \in \mathscr{R}$, se tiene que

$$X \sim A = \complement A \in \mathscr{R}.$$

Se cumplen, pues, las condiciones a), b) y c) de la Definición.

c.q.d.

Proposición 2.3.19

Sea $\mathscr{A}_i$, $i \in I$, una familia de álgebras sobre X. *Entonces*

$$\cap \{A_i : i \in I\}$$

es un álgebra sobre X.

Demostración:

Sabemos, de acuerdo con la Proposición 5.1.19, que

$$\cap \{A_i : i \in I\}$$

es un anillo. Por otra parte, X está en dicha familia y, por tanto, queda demostrada la proposición.

c.q.d.

Proposición 3.3.19

Sea $\mathscr{M}$ una clase no vacía de subconjuntos de X. *Entonces existe en* X *un álgebra mínima que contiene $\mathscr{M}$.*

Demostración:

Es análoga a la prueba de la Proposición 6.1.19, cambiando la palabra anillo por la de álgebra.

c.q.d.

Nota 1

Si $\mathcal{A}$ es un álgebra sobre X, se suele decir también que $\mathcal{A}$ es un álgebra de Boole sobre X.

Nota 2

En la proposición anterior, al álgebra mínima que contiene a $\mathcal{M}$ se le llama el álgebra engendrada por $\mathcal{M}$.

Proposición 4.3.19

Si Y *es un subconjunto de* X *y* $\mathcal{A}$ *es un álgebra sobre* X, *se tiene que*

$$\mathcal{A} \cap Y$$

es un álgebra sobre Y.

Demostración:

Es análoga a la de la Proposición 7.1.19.

c.q.d.

EJERCICIOS DE AUTOCOMPROBACION CON SOLUCIONES

1. Si E y F son dos conjuntos, demuéstrese que

$$E \cup F \subset (E \,\Delta\, F) \,\Delta\, (E \cap F).$$

Solución:

Si x es un elemento de $E \cup F$, tres casos pueden suceder:

a) $x \in E, x \in F$.

b) $x \in E, x \notin F$.

c) $x \notin E, x \in F$.

En el primer caso, se tiene que

$$x \notin E \sim F \quad ; \quad x \notin F \sim E$$

y, por tanto,

$$x \notin (E \sim F) \cup (F \sim E) = E \,\Delta\, F.$$

Por otra parte,

$$x \in E \cap F,$$

por lo que

$$x \in E \cap F \sim (E \,\Delta\, F) \subset (E \cap F \sim E \,\Delta\, F) \cup (E \,\Delta\, F \sim E \cap F) = (E \,\Delta\, F) \,\Delta\, (E \cap F).$$

Luego

$$E \cup F \subset (E \Delta F) \Delta (E \cap F).$$

En el segundo caso $x \in E \sim F$ y, por tanto,

$$x \in (E \sim F) \cup (F \sim E) = E \Delta F.$$

Por otra parte, $x \notin E \cap F$, de aquí que

$$x \in [E \Delta F \sim (E \cap F)] \cup [E \cap E \sim E \Delta F] = (E \Delta F) \Delta (E \cap F).$$

Luego

$$E \cup F \subset (E \Delta F) \Delta (E \cap F).$$

El tercer caso es análogo al segundo, cambiando E y F entre sí. Por tanto,

$$E \cup F = F \cup E \subset (F \Delta E) \Delta (F \cap E) = (E \Delta F) \Delta (E \cap F).$$

Podemos asegurar, pues, que en todos los casos:

$$E \cup F \subset (E \Delta F) \Delta (E \cap F).$$

2. Si E y F son dos conjuntos, demuéstrese que

$$E \cup F \supset (E \Delta F) \Delta (E \cap F).$$

Solución:

$$(E \Delta F) \Delta (E \cap F) = (E \Delta F \sim E \cap F) \cup (E \cap F \sim E \Delta F) \subset$$
$$\subset (E \Delta F) \cup (E \cup F) \subset (E \cup F) \cup (E \cup F) = E \cup F.$$

3. Si E y F son dos conjuntos, demuéstrese que

$$E \sim F \subset E \Delta (E \cap F).$$

Solución:

$$E \sim F = E \sim E \cap F \subset (E \sim E \cap F) \cup (E \cap F \sim E) = E \Delta (E \cap F).$$

4. Si E y F son dos conjuntos, demuéstrese que

$$E \sim F \supset E \Delta (E \cap F).$$

Solución:

Se tiene que

$$E \Delta (E \cap F) = (E \sim E \cap F) \cup (E \cap F \sim E) = (E \sim E \cap F) \cup \varnothing =$$
$$= E \sim E \cap F = E \sim F.$$

5. Sea $\mathscr{P}$ una clase no vacía de subconjuntos del conjunto X tal que si E y F están en $\mathscr{P}$, entonces

$$E \cap F \quad \text{y} \quad E \Delta F$$

pertenecen a $\mathscr{P}$. Demuéstrese que $\mathscr{P}$ es un anillo.

Solución:

Si E y F están en $\mathscr{P}$, se tiene que

$$(E \Delta F) \Delta (E \cap F) \quad \text{y} \quad E \Delta (E \cap F)$$

pertenece a $\mathscr{P}$; pero dichos conjuntos son iguales, de acuerdo con los ejercicios anteriores, a

$$E \cup F \quad \text{y} \quad E \sim F,$$

respectivamente, de aquí que $\mathscr{P}$ sea un anillo.

6. Si E y F son dos conjuntos, demuéstrese que

$$E \cap F = E \cup F \sim E \Delta F.$$

Solución:

Se tiene que

$$E \cup F = (E \Delta F) \cup (E \cap F)$$

y, puesto que

$$E \Delta F \quad \text{y} \quad E \cap F$$

son disjuntos, resulta:

$$E \cap F = E \cup F \sim E \Delta F.$$

7. Si E y F son dos conjuntos, demuéstrese que

$$E \cap F = (E \cup F) \Delta (E \Delta F).$$

Solución:

De acuerdo con el ejercicio anterior, se tiene que

$$E \cap F = E \cup F \sim E \Delta F = (E \cup F \sim E \Delta F) \cup (E \Delta F \sim E \cup F) =$$
$$= (E \cup F) \Delta (E \Delta F).$$

8. Sea $\mathscr{P}$ una clase no vacía de subconjuntos del conjunto X, de manera que si E y F están en $\mathscr{P}$, entonces

$$E \cup F \quad \text{y} \quad E \Delta F$$

pertenece a $\mathscr{P}$. Demuéstrese que $\mathscr{P}$ es un anillo.

Solución:

Se tiene que

$$E \cap F = (E \cup F) \Delta (E \Delta F) \in \mathscr{P}$$

y, por tanto, basta aplicar ahora el ejercicio cinco.

9. Poner un ejemplo de un anillo que no sea un álgebra.

Solución:

Sea X un conjunto infinito no numerable. Se puede tomar, por ejemplo, X coincidiendo con el conjunto de los números reales. Sea $\mathscr{P}$ la familia de todos los subconjuntos numerables de X. Es obvio que si

$$E, F \in \mathscr{P},$$

entonces $E \cup F$ y $E \sim F$ son numerables y, por consiguiente, pertenecen a $\mathscr{P}$, de aquí que esta familia de conjuntos sea un anillo. Por otra parte, X no es numerable y, por tanto, no está en $\mathscr{P}$. Consecuentemente $\mathscr{P}$ no es un álgebra.

Obsérvese que $\mathscr{P}$ no sólo es un anillo, sino también un σ-anillo.

10. Poner un ejemplo de un anillo que no sea un álgebra ni un σ-anillo.

Solución:

Sea X un conjunto infinito. Tomamos para $\mathscr{P}$ la familia formada por todos los subconjuntos finitos. Entonces $\mathscr{P}$ es un anillo, no es un álgebra ni un σ-anillo.

11. Sobre un conjunto X, sea $\mathscr{M}$ una clase no vacía de subconjuntos. Denotamos por $\mathscr{R}(\mathscr{M})$ el anillo engendrado por $\mathscr{M}$. Demuéstrese que cada elemento de $\mathscr{R}(\mathscr{M})$ se puede recubrir por un número finito de elementos de $\mathscr{M}$.

Solución:

Sea $\mathscr{P}$ la subfamilia de $\mathscr{R}(\mathscr{U})$ que tiene la propiedad de que cada subconjunto que pertenece a $\mathscr{P}$ se puede recubrir por un número finito de elementos de $\mathscr{U}$. Es obvio que $\mathscr{U}$ está contenido en $\mathscr{P}$. Por otra parte, si E y F están en $\mathscr{P}$, se tiene que

$$E \cup F \quad y \quad E \sim F$$

están en $\mathscr{P}$, de aquí que $\mathscr{P}$ sea un anillo que contiene $\mathscr{U}$. Puesto que $\mathscr{P}$ está contenido en $\mathscr{R}(\mathscr{U})$ resulta que $\mathscr{R}(\mathscr{U})$ coincide con $\mathscr{P}$.

12. Sea Y un subconjunto X. Sea $\mathscr{R}$ un anillo sobre X. Desmuéstrese que

$$\mathscr{R} \cap Y$$

es un anillo sobre X.

Solución:

Es sabido que

$$\mathscr{R} \cap Y$$

es un anillo sobre Y. Si E y F están en $\mathscr{R} \cap Y$, entre $E \cup F$ y $E \sim F$ pertenecen a $\mathscr{R} \cap Y$, de aquí que $\mathscr{R} \cap Y$ sea un anillo sobre X.

13. Si Y es un subconjunto del conjunto X, ponemos χ_Y para la función característica de Y, es decir:

$$\chi_Y(x) = \begin{cases} 1, & \text{si} \quad x \in Y \\ 0, & \text{si} \quad x \in X \sim Y. \end{cases}$$

Demuéstrese que si E y F son subconjuntos de X, se tiene que:

$$\chi_{E \cap F} = \chi_E \chi_F.$$

Solución:

Si $x \in E \cap F$, resulta que

$$\chi_{E \cap F}(x) = 1 \quad ; \quad \chi_E(x) = 1 \quad ; \quad \chi_F(1),$$

y, por consiguiente,

$$\chi_{E \cap F}(x) = \chi_E(x) \cdot \chi_F(x).$$

Si $x \notin E \cap F$, pueden presentarse dos casos:

a) $x \notin E$. Entonces:

$$\chi_{E \cap F}(x) = 0 \quad ; \quad \chi_E(x) = 0,$$

y, por tanto,

$$\chi_{E \cap F}(x) = \chi_E(x)\chi_F(x)$$

b) $x \notin F$. Entonces:

$$\chi_{E \cap F}(x) = 0 \quad ; \quad \chi_F(x) = 0,$$

de aquí que

$$\chi_{E \cap F}(x) = \chi_E(x)\chi_F(x).$$

podemos concluir, pues, que

$$\chi_{E \cap F} = \chi_E\chi_F.$$

14. Sean E y F dos subconjuntos de un conjunto X. Demuéstrese que

$$\chi_{E \cup F} = \chi_E + \chi_F - \chi_E\chi_F.$$

Solución:

La función característica del conjunto

$$\complement(E \cup F)$$

es igual a

$$1 - \chi_{E \cup F}.$$

Puesto que

$$\complement(E \cup F) = \complement E \cap \complement F,$$

aplicamos el ejercicio anterior y obtenemos:

$$1 - \chi_{E \cup F} = \chi_{\complement E}\chi_{\complement F} = (1 - \chi_E)(1 - \chi_F),$$

de donde se deduce que

$$\chi_{E \cup F} = \chi_E + \chi_F - \chi_E\chi_F.$$

15. Sean E, F y G tres subconjuntos de un conjunto X. Demuéstrese que

$$\chi_{E \cup F \cup G} = \chi_E + \chi_F + \chi_G - \chi_E\chi_F - \chi_E\chi_G - \chi_F\chi_G + \chi_E\chi_F\chi_G.$$

Solución:

Aplicamos dos veces el ejercicio anterior y obtenemos:

$$\chi_{E\cup F\cup G} = \chi_{E\cup F} + \chi_G - \chi_{E\cup F}\chi_G = \chi_E + \chi_F - \chi_E\chi_F + \chi_G -$$
$$- (\chi_E + \chi_F - \chi_E\chi_F)\chi_G = \chi_E + \chi_F + \chi_G - \chi_E\chi_F - \chi_E\chi_G - \chi_{FG} +$$
$$+ \chi_E\chi_F\chi_G.$$

16. Sean A_1, A_2, B_1 y B_2 subconjuntos de un conjunto X tales que

$$A_1 \cap B_2 = A_2 \cap B_1 = \varnothing.$$

Demuéstrese que

$$(A_1 \cup B_1) \sim (A_2 \cup B_2) = (A_1 \sim A_2) \cup (B_1 \sim B_2).$$

Solución:

Puesto que

$$A_1 \cap B_2 = A_2 \cap B_1 = \varnothing,$$

se tiene que

$$B_1 \cap \complement A_2 = B_1 \quad ; \quad (A_1 \sim A_2) \cap \complement B_2 = A_1 \sim A_2.$$

Entonces:

$$(A_1 \cup B_1) \sim (A_2 \cup B_2) = (A_1 \cup B_1) \cap \complement(A_2 \cup B_2) =$$
$$= (A_1 \cup B_1) \cap \complement A_2 \cap \complement B_2 = [(A_1 \cup B_1) \cap \complement A_2] \cap \complement B_2 =$$
$$= [(A_1 \cap \complement A_2) \cup (B_1 \cap \complement A_2)] \cap \complement B_2 = [(A_1 \cap \complement A_2) \cup B_1] \cap \complement B_2 =$$
$$= [(A_1 \cap \complement A_2) \cap \complement B_2] \cup [B_1 \cap \complement B_2] =$$
$$= [(A_1 \sim A_2) \cap \complement B_2] \cup [B_1 \sim B_2] = (A_1 \sim A_2) \cup (B_1 \sim B_2).$$

Para los ejercicios que siguen en este tema, consideramos, en el espacio euclídeo n-dimensional, $n > 1$, los intervalos acotados n-dimensionales de la forma:

$$]a_1, b_1] \times]a_2, b_2] \times \cdots \times]a_n, b_n] \tag{1}$$

Llamamos $\mathcal{J}$ a la familia de todas las uniones finitas de los intervalos de la forma (1).

17. Si A y B pertenecen a $\mathcal{J}$, demuéstrese que $A \cap B$ también está en $\mathcal{J}$.

Solución:

Se tiene que

$$A = \cup \{]a_1^{(i)}, b_1^{(i)}] \times]a_2^{(i)}, b_2^{(i)}] \times \cdots \times]a_n^{(i)}, b_n^{(i)}] : i = 1, 2, ..., p\}$$
$$B = \cup \{]c_1^{(j)}, d_1^{(j)}] \times]c_2^{(j)}, d_2^{(j)}] \times \cdots \times]c_n^{(j)}, d_n^{(j)}] : j = 1, 2, ..., q\}$$

por lo que basta comprobar que

$$]a_1^{(i)}, b_1^{(i)}] \times]a_2^{(i)}, b_2^{(i)}] \times \cdots \times]a_n^{(i)}, b_n^{(i)}] \bigcap]c_1^{(j)}, d_1^{(j)}] \times]c_2^{(j)}, d_2^{(j)}] \times \cdots \times]c_n^{(j)}, d_n^{(j)}] \qquad (2)$$

es un intervalo de la forma (1). Si (2) es el conjunto vacío se puede representar por

$$]b, b] \times]b, b] \times \cdots \times]b, b],$$

siendo b un número real cualquiera. Si (2) es distinto del conjunto vacío, sea $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ un punto de dicho conjunto. Se verifica:

$$\max \{a_p^{(i)}, b_p^{(j)}\} = a_p < \alpha_p \leqslant \min \{b_p^{(i)}, d_p^{(j)}\} = b_p.$$

Es inmediato comprobar ahora que (2) coincide con

$$]a_1, b_1] \times]a_2, b_2] \times \cdots \times]a_n, b_n].$$

18. Si

$$A =]a_1, b_1] \times]a_2, b_2] \times \cdots \times]a_n, b_n]$$
$$B =]c_1, d_1] \times]c_2, d_2] \times \cdots \times]c_n, d_n]$$

y $A \supset B$, demuéstrese que $A \sim B$ pertenece a $\mathscr{J}$.

Solución:

Si I_j es uno de los intervalos

$$]a_j, c_j],]c_j, d_j],]d_j, b_j]$$

se tiene que A es la unión de 3^n intervalos:

$$A_1, A_2, ..., A_{3^n}, \qquad (3)$$

disjuntos dos a dos, de la forma:

$$I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_n.$$

El intervalo B es uno de los que aparece en (3), que podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que coincide con A_1.

Entonces:

$$A \sim B = \cup \{A_m : m = 2, 3, ..., 3^n\} \in \mathscr{J}.$$

19. Si B es un elemento de $\mathscr{J}$,

$$A =]a_1, b_1] \times]a_2, b_2] \times \cdots \times]a_n, b_n]$$

y $A \supset B$, se tiene que $A \sim B$ pertenece a $\mathscr{J}$.

Solución:

Sea

$$B = \cup \{]c_1^{(j)}, d_1^{(j)}] \times]c_2^{(j)}, d_2^{(j)}] \times \cdots \times]c_n^{(j)}, d_n^{(j)}] : j = 1, 2, ..., q\}.$$

Se tiene que

$$A \sim B = \cap \{A \sim]c_1^{(j)}, d_1^{(j)}] \times]c_2^{(j)}, d_2^{(j)}] \times \cdots \times]c_n^{(j)}, d_n^{(j)}] : j = 1, 2, ..., q\}$$

y, puesto que

$$A \sim]c_1^{(j)}, d_1^{(j)}] \times]c_2^{(j)}, d_2^{(j)}] \times \cdots \times]c_n^{(j)}, d_n^{(j)}]$$

pertenece a $\mathscr{J}$, de acuerdo con el ejercicio anterior, se tiene, aplicando el ejercicio 17, que

$$A \sim B \in \mathscr{J}.$$

20. Demuéstrese que $\mathscr{J}$ es un anillo sobre R^n.

Solución:

La clase $\mathscr{J}$ no es vacía. Por otra parte, si

$$A = \cup \{]a_1^{(i)}, b_1^{(i)}] \times]a_2^{(i)}, b_2^{(i)}] \times \cdots \times]a_n^{(i)}, b_n^{(i)}] : i = 1, 2, ..., p\}$$
$$B = \cup \{]a_1^{(i)}, b_1^{(i)}] \times]a_2^{(i)}, b_2^{(i)}] \times \cdots \times]a_n^{(i)}, b_n^{(i)}] : i = p + 1, p + 2, ..., q\},$$

resulta que

$$A \cup B = \cup \{]a_1^{(i)}, b_1^{(i)}] \times]a_2^{(i)}, b_2^{(i)}] \times \cdots \times]a_n^{(i)}, b_n^{(i)} + : i = 1, 2, ..., p, p + 1, ..., q\} \in \mathscr{J}$$

Tomamos ahora un intervalo

$$]a_1, b_1] \times]a_2, b_2] \times \cdots \times]a_n, b_n]$$

conteniendo $A \cup B$.

Se tiene:

$$A \sim B = A \cap \complement B = A \cap (]a_1, b_1] \times]a_2, b_2] ` \cdots \times]a_n, b_n] \sim B).$$

De acuerdo con el ejercicio anterior:

$$]a_1, b_1] \times]a_2, b_2] \times \cdots \times]a_n, b_n] \sim B \in \mathscr{J},$$

de donde se deduce, aplicando el ejercicio 17, que

$$A \sim B \in \mathscr{J}.$$

Por tanto, podemos concluir afirmando que $\mathscr{J}$ es un anillo sobre R^n.

TEMA XX

20. Clases de conjuntos (II)

1.20. Definición y propiedades de los σ-anillos.
2.20. Definición y propiedades de las σ-álgebras.
3.20. Clases monótonas.

1.20. DEFINICION Y PROPIEDADES DE LOS σ-ANILLOS

Empezamos este tema dando la definición de σ-anillo sobre un conjunto X.

Definición 1

Se dice que una clase no vacía $\mathscr{S}$ de subconjuntos de X *es un σ-anillo si cumple las siguientes condiciones:*

a) *Si* E *y* F *están en $\mathscr{S}$, entonces* $E \sim F$ *pertenece a $\mathscr{S}$.*

b) *Si* $E_n \in \mathscr{S}$, $n = 1, 2, \ldots$, *se tiene que* $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ *está en $\mathscr{S}$*

Proposición 1.1.20

Si $\mathscr{S}$ es un σ-anillo sobre X, *entonces $\mathscr{S}$ es un anillo.*

Demostración:

Puesto que la clase $\mathscr{S}$ es no vacía, existe un $E \in \mathscr{S}$. Entonces,

$$E \sim E = \varnothing \in \mathscr{S}.$$

Dados los elementos E y F en $\mathscr{S}$, ponemos:

$$E_1 = E, E_2 = F, \varnothing = E_3 = E_4 = \cdots = E_n = \cdots$$

Se tiene, de acuerdo con la condición b), que

$$E \cup F = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathscr{S}.$$

c.q.d.

Proposición 2.1.20

Si E_n *pertenece al* σ*-anillo* $\mathscr{S}$, $n = 1, 2, \ldots$, *se tiene que*

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathscr{S}.$$

Demostración:

Podemos asegurar que

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$$

pertenece a $\mathscr{S}$.

Puesto que

$$E \sim E_n \in \mathscr{S}, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

resulta que

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} (E \sim E_n) = E \sim \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathscr{S},$$

y, por tanto,

$$E \sim \left(E \sim \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n \right) = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathscr{S}.$$

c.q.d.

Proposición 3.1.20

Sea $\{\mathscr{S}_i : i \in I\}$ *una familia de* σ*-anillos sobre el conjunto* X. *Entonces*

$$\cap \{\mathscr{S}_i : i \in I\}$$

es un σ*-anillo.*

Demostración:

Puesto que $\mathscr{S}_i$, $i \in I$, es un anillo, resulta que

$$\cap \{\mathscr{S}_i : i \in I\}$$

es un anillo. Por otra parte, si

$$E_n \in \cap \{\mathscr{S}_i : i \in I\}, \quad n = 1, 2, ...,$$

se tiene que

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathscr{S}_i, \quad i = 1, 2, ...,$$

y, por consiguiente,

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \cap \{\mathscr{S}_i : i \in I\}.$$

c.q.d.

Proposición 4.1.20

Sea $\mathscr{M}$ una familia no vacía de subconjuntos de X. Existe entonces un σ-anillo $\mathscr{S}(\mathscr{M})$ que contiene a $\mathscr{M}$ y que es mínimo con la relación de inclusión.

Demostración:

Sea

$$\{\mathscr{S}_i : i \in I\}$$

la colección de todos los σ-anillos sobre X que contienen $\mathscr{M}$. Dicha colección no es vacía, puesto que la familia de todas las partes de X pertenece a ella.

Entonces

$$\mathscr{S}(\mathscr{M}) = \cap \{\mathscr{S}_i : i \in I\}$$

es un σ-anillo, de acuerdo con la proposición anterior y, además, es mínimo.

c.q.d.

Proposición 5.1.20

Si Y es un subconjunto de X y $\mathscr{S}$ es un σ-anillo sobre X, se tiene que

$$\mathscr{S} \cap Y$$

es un σ-anillo sobre Y, y también sobre X.

Demostración:

De acuerdo con la Proposición 7.1.19, $\mathscr{S} \cap Y$ es un anillo sobre Y, y también sobre X.

Sea A_n un elemento de $\mathscr{S} \cap Y$, $n = 1, 2, \ldots$ Hallamos un E_n en $\mathscr{S}$ tal que $E_n \in \mathscr{S}$, $n = 1, 2, \ldots$, y

$$A_n = E_n \cap Y.$$

Entonces:

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} (E_n \cap Y) = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \right) \cap Y,$$

y puesto que

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$$

pertenece a $\mathscr{S}$, se tiene que

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{S} \cap Y.$$

c.q.d.

Proposición 6.1.20

Si Y *es un subconjunto de* X *y* $\mathscr{M}$ *es una clase no vacía de* X, *se tiene que*

$$\mathscr{S}(\mathscr{M}) \cap Y = \mathscr{S}(\mathscr{M} \cap Y).$$

Demostración:

De acuerdo con la proposición anterior,

$$\mathscr{S}(\mathscr{M}) \cap Y$$

es un σ-anillo sobre Y, y también sobre X, que contiene

$$\mathscr{M} \cap Y,$$

de aquí que

$$\mathscr{S}(\mathscr{M}) \cap Y \supset \mathscr{S}(\mathscr{M} \cap Y).$$

Sea $\mathscr{P}$ la clase de todos los subconjuntos de X de la forma

$$A \cup (B \sim Y),$$

de manera que

$$A \in \mathscr{S}(\mathscr{M} \cap Y) \quad \text{y} \quad B \in \mathscr{S}(\mathscr{M}).$$

Si $P_n \in \mathscr{P}$, se tiene que

$$P_n = A_n \cup (B_n \sim Y)$$
$$A_n \in \mathscr{S}(\mathscr{M} \cap Y), \quad B_n \in \mathscr{S}(\mathscr{M}), \quad n = 1, 2, \ldots$$

Por tanto,

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} P_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \cup (B_n \sim Y)) = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \sim Y\right),$$
$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{S}(\mathscr{M} \cap Y), \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathscr{S}(\mathscr{M}),$$

por lo que

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} P_n \in \mathscr{P}.$$

Por otra parte, si P, $Q \in \mathscr{P}$, entonces

$$P = C_1 \cup (D_1 \sim Y), \; Q = C_2 \cup (D_2 \sim Y),$$
$$C_1, C_2 \in \mathscr{S}(\mathscr{M} \cap Y), \; D_1, D_2 \in \mathscr{S}(\mathscr{M}),$$

y, puesto que

$$C_2 \cap (D_2 \sim Y) = C_1 \cap (D_2 \sim Y),$$

se deduce (véase el ejercicio 16 del tema anterior), que

$$P \sim Q = (C_1 \sim C_2) \cup ((B_1 \sim B_2) \sim Y) \in \mathscr{P},$$

por lo que $\mathscr{P}$ es un anillo.

Se concluye ahora de una forma análoga a como lo hicimos en la demostración de la Proposición 6.1.20.

c.q.d.

Definición 2

Se dice que una clase no vacía $\mathscr{H}$ de subconjunto de X es un σ-anillo hereditario si cumple las siguientes condiciones:

1. *$\mathscr{H}$ es un σ-anillo.*
2. *Si $A \in \mathscr{H}$ y $B \subset A$, entonces $B \in \mathscr{H}$.*

Las tres proposiciones siguientes se prueban de una forma análoga a las proposiciones 3.1.20, 4.1.20 y 5.1.20, respectivamente.

Proposición 7.1.20

Sea $\{\mathscr{H}_i : i \in I\}$ *una familia de* σ*-anillos hereditarios sobre el conjunto* X. *Entonces*

$$\cap \{\mathscr{H}_i : i \in I\}$$

es un σ*-anillo hereditario.*

Proposición 8.1.20

Sea $\mathscr{M}$ *una familia no vacía de subconjuntos de* X. *Existe entonces un* σ*-anillo hereditario* $\mathscr{H}(\mathscr{M})$ *que contiene a* $\mathscr{M}$ *y que es el mínimo con la relación de inclusión.*

Proposición 9.1.20

Si Y *es un subconjunto de* X *y* $\mathscr{H}$ *es un* σ*-anillo hereditario sobre* X, *se tiene que*

$$\mathscr{H} \cap Y$$

es un σ*-anillo hereditario sobre* Y, *y también sobre* X.

Nota

En la Proposición 4.1.20, se dice que $\mathscr{S}(\mathscr{M})$ es el σ-anillo engendrado por $\mathscr{M}$. En la Proposición 8.1.20, $\mathscr{H}(\mathscr{M})$ es el σ-anillo hereditario engendrado por $\mathscr{M}$.

Proposición 10.1.20

Sea $\mathscr{M}$ *una familia no vacía de subconjuntos de* X. *Si* $A \subset \mathscr{H}(\mathscr{M})$ *existe una sucesión* $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ *de elementos de* $\mathscr{M}$ *tal que*

$$A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n.$$

Demostración:

Sea $\mathscr{P}$ la subfamilia de $\mathscr{H}(\mathscr{M})$ tal que cada elemento de $\mathscr{P}$ puede recubrirse por una cantidad numerable de elementos de $\mathscr{M}$. Obviamente, $\mathscr{M} \subset \mathscr{P}$ y $\mathscr{P}$ es un σ-anillo hereditario, de aquí que $\mathscr{P}$ coincida con $\mathscr{H}(\mathscr{M})$, de donde se concluye la proposición.

c.q.d.

2.20. DEFINICION Y PROPIEDADES DE LAS σ-ALGEBRAS

Definición 1

Una σ*-álgebra* $\mathscr{A}$ *sobre un conjunto* X *es una clase de subconjuntos de* X *que cumple las siguientes condiciones:*

a) $X \in \mathscr{A}$.

b) *Si* $A_n \in \mathscr{A}$, $n = 1, 2, \ldots$, *entonces* $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{A}$.

c) *Si* A *pertenece a* $\mathscr{A}$, *se tiene que* $\complement A$ *también está en* $\mathscr{A}$.

Proposición 1.2.20

Si $\mathscr{A}$ *es una* σ*-álgebra sobre* X, *entonces* $\mathscr{A}$ *es un* σ*-anillo.*

Demostración:

Basta ver que si A y B están en $\mathscr{A}$, se tiene que

$$A \sim B \in \mathscr{A}.$$

Podemos poner:

$$A \sim B = A \cap \complement B = \complement(\complement A \cup B),$$

de donde se deduce que

$$A \sim B \in \mathscr{A}.$$

c.q.d.

Las proposiciones siguientes son inmediatas.

Proposición 2.2.20

Un σ*-anillo* $\mathscr{S}$ *sobre el conjunto* X *es una* σ*-álgebra si, y sólo si,* $X \in \mathscr{S}$.

Proposición 3.2.20

Sea $\mathscr{A}_i$, $i \in I$, *una familia de* σ*-álgebras sobre* X. *Entonces*

$$\cap \{A_i : i \in I\}$$

es una σ*-álgebra sobre* X.

Proposición 4.2.20

Si $\mathscr{M}$ *es una clase no vacía de subconjuntos de* X, *existe en* X *una* σ*-álgebra mínima que contiene* $\mathscr{M}$.

Nota

En la proposición anterior a la σ-álgebra mínima $\mathscr{A}(\mathscr{M})$ que contiene $\mathscr{M}$ se le llama la σ-álgebra engendrada por $\mathscr{M}$.

Definición 2

Si X es un espacio topológico, a la σ-álgebra $\mathscr{B}$ engendrada por los abiertos de X, se le llama σ-álgebra de Borel de X. Cada elemento de B se dice que es un subconjunto de Borel de X.

3.20. CLASES MONOTONAS

En el conjunto X, una sucesión (A_n) de subconjuntos se dice que es monótona creciente o expansiva si

$$A_n \subset A_{n+1}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Si

$$A_n \supset A_{n+1}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

se dice que la sucesión (A_n) es monótona decreciente o contractiva.

En uno u otro caso, se dice que la sucesión es monótona.

Definición

Una clase no vacía $\mathscr{M}$ de subconjuntos de X se dice que es monótona si se cumplen las dos condiciones siguientes:

1. *Si $A_n \in \mathscr{M}$, $n = 1, 2, \ldots$, y la sucesión (A_n) es monótona creciente, entonces $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{M}$.*

2. *Si $A_n \in \mathscr{M}$, $n = 1, 2, \ldots$, y la sucesión (A_n) es monótona decreciente, se tiene que $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$, pertenece a $\mathscr{M}$.*

La proposición siguiente es inmediata.

Proposición 1.3.20

Si $\mathscr{S}$ es un σ-anillo sobre X, entonces $\mathscr{S}$ es una clase monótona.

Proposición 2.3.20

Sea $\mathscr{M}$ una clase monótona en X. Si $\mathscr{M}$ es un anillo, entonces dicha familia de conjuntos es un σ-anillo.

Demostración:

Sea A_n un elemento de $\mathscr{M}$, $n = 1, 2, \ldots$ Hemos de ver que $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ está en $\mathscr{M}$. Ponemos:

$$\begin{aligned} B_1 &= A_1 \\ B_2 &= A_1 \cup A_2 \\ &\cdots\cdots\cdots \\ B_n &= A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n \\ &\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

Puesto que $\mathscr{M}$ es un anillo, resulta que B_n pertenece a $\mathscr{M}$, $n = 1, 2, \ldots$ La sucesión (B_n) es expansiva y, teniendo en cuenta que $\mathscr{M}$ es una clase monótona, resulta que

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{M}.$$

c.q.d.

Sea $\mathscr{P}$ una clase no vacía de subconjuntos de X. Se demuestra fácilmente que si la intersección de una colección de clases monótonas es no vacía, dicha intersección es una clase monótona. Por otra parte, la familia de todas las partes de X es una clase monótona. Entonces, la colección de clases monótonas que contienen $\mathscr{P}$ es no vacía, y la intersección de dichas clases es una clase monótona mínima que contiene $\mathscr{P}$. La representamos por $\mathscr{M}(\mathscr{P})$ y decimos que es la clase monótona engendrada por $\mathscr{P}$.

Supongamos ahora que tenemos una clase monótona $\mathscr{M}$ sobre X. Dado un subconjunto cualquiera F de X, demostramos por $\mathscr{U}(F)$ la clase de todos los subconjuntos E de X tales que

$$E \sim F, \quad F \sim E \quad \text{y} \quad E \cup F$$

están en $\mathscr{M}$. Obviamente, puesto que la definición anterior tiene carácter simétrico, resulta que si

$$E \in \mathscr{U}(F) \quad \text{entonces} \quad F \in \mathscr{U}(E).$$

Proposición 3.3.20

Si la clase $\mathscr{U}(F)$ *es no vacía, entonces es una clase monótona.*

Demostración:

Sea (A_n) una sucesión creciente de elementos de $\mathscr{U}(F)$. Entonces

$$F \sim A_n, \; A_n \sim F \quad \text{y} \quad F \cup A_n, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

pertenece a $\mathscr{M}$.

La sucesión $(F \sim A_n)$ es contractiva, la $(A_n \sim F)$, expansiva, y la $(F \cup A_n)$ es también expansiva. Por tanto,

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} (F \sim A_n) = F \sim \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{M},$$

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \sim F) = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \sim F \in \mathscr{M},$$

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \cup F) = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \cup F \in \mathscr{M},$$

de aquí que

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{M}.$$

Tomemos ahora una sucesión contractiva (B_n) en $\mathscr{U}(F)$. Se tiene que

$$F \sim B_n,\ B_n \sim F \quad \text{y} \quad F \cup B_n, \quad n = 1, 2, ...,$$

están en $\mathscr{M}$.

La sucesión $(F \sim B_n)$ es expansiva, la $(B_n \sim F)$, contractiva, y la $(F \cup B_n)$ es también contractiva. Por consiguiente,

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} (F \sim B_n) = F \sim \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathscr{M},$$

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} (B_n \sim F) = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n \sim F \in \mathscr{M},$$

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} (F \cup B_n) = F \cup \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n\right) \in \mathscr{M},$$

de aquí que

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathscr{M}.$$

Luego $\mathscr{U}$ıF) es una clase monótona.

c.q.d.

Teorema 1.3.20

Si $\mathscr{R}$ es un anillo sobre X, *se tiene que $\mathscr{M}(\mathscr{R})$ es un σ-anillo que coincide con $\mathscr{S}(\mathscr{R})$.*

Demostración:

Ponemos $\mathscr{M}$ en vez de $\mathscr{M}(\mathscr{R})$. Si F es un elemento cualquiera de $\mathscr{R}$, entonces $\mathscr{U}(F)$ no es vacía, ya que si $E \in \mathscr{R}$, se tiene que

$$E \sim F,\ F \sim E \quad \text{y} \quad E \cup F$$

están en $\mathscr{R}$, que a su vez está contenido en $\mathscr{M}$, por lo que

$$E \in \mathscr{U}(F).$$

Entonces, de acuerdo con la proposición anterior, $\mathscr{U}(F)$ es una clase monótona. $\mathscr{U}(F)$ contiene $\mathscr{R}$ y, puesto que $\mathscr{M}$ es la clase monótona mínima que contiene $\mathscr{R}$, resulta que

$$\mathscr{M} \subset \mathscr{U}(F).$$

Tomemos ahora un elemento cualquiera P de $\mathscr{M}$. Se tiene:

$$P \in \mathscr{U}(F),$$

luego

$$F \in \mathscr{U}(P). \tag{1}$$

Se tiene que (1) se verifica para cualquier F de $\mathscr{R}$, por lo que

$$\mathscr{R} \subset \mathscr{U}(P)$$

y, teniendo en cuenta que $\mathscr{U}(P)$ es una clase monótona,

$$\mathscr{M} \subset \mathscr{U}(P) \tag{2}$$

para cada P perteneciente a $\mathscr{M}$.

Veamos ahora que $\mathscr{M}$ es un σ-anillo. En efecto, $\mathscr{M}$ no es vacía; si A y B son dos elementos cualesquiera de $\mathscr{M}$, se obtiene de (2) que

$$A \in \mathscr{U}(B)$$

y, por consiguiente,

$$A \sim B \quad y \quad A \cup B$$

están en $\mathscr{M}$, de aquí que $\mathscr{M}$ sea un anillo y, puesto que $\mathscr{M}$ es una clase monótona, $\mathscr{M}$ es un σ-anillo.

Finalmente, $\mathscr{S}(\mathscr{R})$ es una clase monótona que contiene $\mathscr{R}$, por lo que

$$\mathscr{M} \subset \mathscr{S}(\mathscr{R}),$$

y $\mathscr{S}(\mathscr{U})$ es el σ-anillo mínimo que contiene $\mathscr{R}$, de aquí que

$$\mathscr{S}(\mathscr{R}) \subset \mathscr{M},$$

es decir,

$$\mathscr{S}(\mathscr{R}) = \mathscr{M}(\mathscr{R}).$$

c.q.d.

EJERCICIOS DE AUTOCOMPROBACION CON SOLUCIONES

1. Sea (A_n) una sucesión de subconjuntos de un conjunto X. Se define el límite inferior de A_n, cuando n tiende a infinito, como el conjunto formado por todos aquellos elementos de X que pertenecen a todos los A_n, $n = 1, 2, \ldots$, salvo a lo sumo a un número finito de ellos. Se representa por

$$\lim_{n\to\infty} \inf A_n \quad \text{o bien} \quad \liminf_n A_n.$$

Demuéstrese que

$$\liminf_n A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{p=n}^{\infty} A_p.$$

Solución:

Sea z un elemento de X que pertenece a todos los A_n, $n = 1, 2, \ldots$, salvo a lo sumo a un número finito de ellos. Existe un entero positivo n_0 tal que

$$z \in A_n, \; n \geqslant n_0,$$

por lo que

$$z \in \bigcap_{p=n_0}^{\infty} A_p$$

y, por consiguiente,

$$\liminf_n A_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{p=n}^{\infty} A_p.$$

Recíprocamente, si

$$z \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{p=n}^{\infty} A_p,$$

existe un entero positivo q tal que

$$z \in \bigcap_{p=q}^{\infty} A_p,$$

es decir:

$$z \in A_n, \quad n = q, q+1, \dots$$

2. Sea (A_n) una sucesión de subconjuntos de un conjunto X. Se define el límite superior de A_n, cuando n tiende a infinito, como el conjunto formado por todos aquellos elementos de X que pertenecen a una infinidad de A_n, $n = 1, 2, \dots$ Se representa por

$$\limsup_{n \to \infty} A_n \quad \text{o bien} \quad \limsup_{n} A_n.$$

Demuéstrese que

$$\limsup_{n} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{p=n}^{\infty} A_p.$$

Solución:

Sea z un elemento de X que pertenece a una infinidad de A_n, $n = 1, 2, \dots$ Entonces:

$$z \in \bigcup_{p=n}^{\infty} A_p, \quad n = 1, 2, \dots,$$

y, por consiguiente,

$$z \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{p=n}^{\infty} A_p,$$

es decir,

$$\limsup_{n} \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{p=n}^{\infty} A_p.$$

Recíprocamente, si

$$z \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{p=n}^{\infty} A_p,$$

se tiene que

$$z \in \bigcup_{p=n}^{\infty} A_p, \quad n = 1, 2, \ldots$$

y por tanto, dado un entorno positivo n_0, se tiene que

$$z \in \bigcup_{p=n_0}^{\infty} A_p,$$

por lo que existe un $q \geqslant n_0$ tal que

$$z \in A_q,$$

de aquí que z pertenezca a infinitos A_n, $n = 1, 2, \ldots$

3. Si $\mathscr{S}$ es un σ-anillo sobre X, y $A_n \in \mathscr{S}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, demuéstrese que

$$\liminf_n A_n \quad \text{y} \quad \limsup_n A_n$$

pertenece a $\mathscr{S}$.

Solución:

Es una consecuencia inmediata de las representaciones del límite superior y del límite inferior de A_n dadas en los dos ejercicios anteriores.

4. En un conjunto X, se dice que la sucesión (A_n) de subconjuntos tiene límite, cuando n tiende a infinito, si

$$\liminf_n A_n = \limsup_n A_n,$$

y se representa por

$$\lim_{n \to \infty} A_n \quad \text{o bien} \quad \lim_n A_n.$$

Demuéstrese que si la sucesión (A_n) es monótona creciente tiene límite.

Solución:

Si la sucesión (A_n) es monótona creciente, se tiene que

$$\bigcap_{p=n}^{\infty} A_p = A_n$$

y, por tanto,

$$\liminf_n A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{p=n}^{\infty} = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Por otra parte,

$$\bigcup_{p=n}^{\infty} A_p = \bigcup_{p=1}^{\infty} A_p,$$

por lo que

$$\limsup_n A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{p=n}^{\infty} A_p = \bigcup_{p=n}^{\infty} A_p$$

Luego existe el límite de (A_n), cuando n tiende a infinito, y coincide con

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n.$$

5. Sea (A_n) una sucesión de subconjuntos en un conjunto X. Demuéstrese que si (A_n) es monótona decreciente tiene límite.

Solución:

Se tiene que

$$\bigcup_{p=n}^{\infty} A_p = A_n$$

y, por tanto,

$$\limsup_n A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{p=n}^{\infty} A_p = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Por otra parte,

$$\bigcap_{p=n}^{\infty} A_p = \bigcap_{p=1}^{\infty} A_p,$$

por lo que

$$\liminf_n A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{p=n}^{\infty} A_p = \bigcap_{p=1}^{\infty} A_p.$$

Luego existe el límite de la sucesión (A_n), cuando n tiende a infinito, y coincide con

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n.$$

6. Sea X un espacio topológico. Si $\mathscr{S}$ es la clase de todos los subconjuntos de primera categoría de X, demuéstrese que $\mathscr{S}$ es un σ-anillo. ¿Es $\mathscr{S}$ una σ-álgebra?

Solución:

Puesto que el conjunto vacío es diseminado, se tiene que la clase $\mathscr{S}$ no es vacía. Si E y F están en $\mathscr{S}$, entonces:

$$E \sim F \subset E \in \mathscr{S}.$$

Por otra parte, si $A_n \in \mathscr{S}$, n = 1, 2, ..., se tiene que $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ es un subconjunto de primera categoría y, por tanto, pertenece a $\mathscr{S}$.

Si X es un espacio topológico de segunda categoría, entonces $X \notin \mathscr{S}$, por lo que $\mathscr{S}$ no tiene por qué ser una σ-álgebra en general.

7. Demuéstrese que si un conjunto X no es vacío, existe una sucesión (A_n) de subconjuntos de X que no tiene límite, cuando n tiende a infinito.

Solución:

Sea x un punto de X. Ponemos:

$$A_{2n} = \{x\}, \quad n = 1, 2, \ldots$$
$$A_{2n-1} = \{\varnothing\}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Entonces:

$$\liminf_n A_n = \varnothing, \ \limsup_n A_n = \{x\},$$

y, por tanto,

$$\liminf_n A_n \neq \limsup_n A_n.$$

8. Sea X un conjunto que posee más de dos elementos. Sea $\mathscr{M}$ la clase de todos los subconjuntos de X, cada uno de los cuales no tiene más de dos elementos. ¿Es $\mathscr{M}$ una clase monótona? ¿Es $\mathscr{M}$ un anillo?

Solución:

Obviamente, $\mathscr{M}$ es una clase no vacía. Si (A_n) es una sucesión creciente de elementos de $\mathscr{M}$, entonces:

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

no tiene más de dos elementos y, por consiguiente, pertenece a $\mathscr{M}$. Por otra parte, si (B_n) es una sucesión contractiva de elementos de $\mathscr{M}$, se tiene que

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$$

no tiene más de dos elementos, de aquí que pertenezca de $\mathscr{M}$. Por tanto, $\mathscr{M}$ es una clase monótona.

Tomemos ahora tres elementos distintos de X: u, v, w. Sea

$$A = \{u, v\}, \ B = \{u, w\}.$$

Entonces

$$A \cup B = \{u, v, w\}$$

tiene tres elementos y, por consiguiente, no pertenece a $\mathscr{M}$. Podemos asegurar, pues, que $\mathscr{M}$ no es un anillo.

9. Sea $\mathscr{A}$ un álgebra sobre un conjunto X. Demuéstrese que $\mathscr{M}(\mathscr{A})$ coincide con la σ-álgebra engendrada por $\mathscr{A}$.

Solución:

Sabemos que $\mathscr{M}(\mathscr{A})$ coincide, puesto que $\mathscr{A}$ es un anillo, con $\mathscr{S}(\mathscr{A})$. Por otra parte,

$$X \in \mathscr{S}(\mathscr{A}),$$

por lo que $\mathscr{S}(\mathscr{A})$ es, obviamente, la σ-álgebra engendrada por $\mathscr{A}$.