Indice

Esquema Resumen

1. Introducción
2. Fuentes y tipos de error. Exactitud y precisión
3. Cifras o dígitos significativos. Redondeo. Criterio de error aproximado
4. Cálculos con números aproximados
5. Tratamiento estadístico de errores
6. Desestimación de observaciones
7. Uso de ordenadores. Errores de redondeo y propagación de errores
8. Relación de puntos a tener en cuenta al efectuar una medida o experimento

Ejercicios de autocomprobación

Respuestas a los ejercicios de autocomprobación

1. INTRODUCCION

Es difícil «sentir» la ciencia solamente estudiándola en los textos. La observación y la medida son la base sobre la que el hombre de ciencia construye su modelo o interpretación del mundo.

Trabajar en el laboratorio, estudiando sustancias o procesos es una actividad ciertamente apasionante, pero al mismo tiempo erizada de dificultades. Conseguir datos fiables e interpretarlos es un reto permanente. Hay muchas fuentes de error que pueden falsear o alterar estos datos. Es necesario gran experiencia, cuidado, sentido común y ausencia de prejuicios para hacer observaciones y buenas medidas. Trabajando en el laboratorio se puede compartir con el científico el placer y la satisfacción de hacer tales medidas y también las frustraciones cuando los experimentos no funcionan o las observaciones son difíciles de interpretar.

Con el estudio de este tema y su aplicación a los que se van a desarrollar a continuación pretendemos que el alumno alcance los siguientes objetivos:

1. Que aprenda a manejar datos, es decir, a convertir observaciones en valores estimados de una magnitud física.
2. Que sepa determinar la precisión de sus resultados.

3. Que desarrolle una capacidad crítica sobre los procesos de medida y cálculo.
4. Y, por último, que vaya adquiriendo el grado de confianza necesario en la bondad de sus resultados.

Primeramente, se enumeran en el tema las principales fuentes de error en los procesos de medida y se introducen los conceptos de exactitud y precisión. Se dan, a continuación, algunos consejos sobre la forma de presentación (notación, número de cifras, etc.) de valores de magnitudes afectadas de error y se indica cómo se transmiten los errores de estas magnitudes cuando intervienen en procesos de cálculo. La aplicación de la estadística al tratamiento de datos experimentales se ha limitado necesariamente a los aspectos más relevantes: índice de precisión, desviación estándar, varianza, distribución *t* de Student, desestimación de observaciones, etc. El uso de calculadoras y ordenadores introduce, a su vez, ciertos errores en la estimación de magnitudes que no deben despreciarse y a ello se dedica uno de los apartados. Por último, se recuerdan los puntos que hay que tener siempre en cuenta al hacer una medida o experimento.

2. FUENTES Y TIPOS DE ERROR. EXACTITUD Y PRECISION

¿Es posible conocer el valor de una magnitud? Una pregunta que parecería ridícula si no reflejase un hecho bien conocido en experimentación. Cuando se mide una magnitud aun con los mejores instrumentos y métodos, y con el mayor cuidado y habilidad que el hombre puede ejercer, se encuentra que los resultados de sucesivas mediciones difieren entre sí en mayor o menor grado, incluso en magnitudes cuyo valor no depende del tiempo en que se realice la medida. Está claro que no podemos conseguir nuestro propósito de obtener el *valor verdadero* de una magnitud mediante la medida, valor que por hipótesis suponemos que existe y que es único. Hay un conjunto de causas que modifican el valor verdadero de una magnitud y hacen que obtengamos un *valor observado* distinto cada vez que intentamos medir. La diferencia entre el valor verdadero, A, y el valor observado, a, se denomina *error absoluto*, Δ:

$$\Delta = |A - a| \qquad [1]$$

Evidentemente A es desconocido y por tanto también Δ, sin embargo, como veremos más adelante, en la práctica siempre podemos establecer una cota o valor máximo de Δ que definirá un intervalo de la magnitud en el cual, con cierta seguridad, se encuentre el valor verdadero:

$$a - \Delta < A < a + \Delta \qquad [2]$$

podemos así representar el valor verdadero, A, por un intervalo centrado en la medida a:

$$A \sim a \pm \Delta \qquad [3]$$

Una medida será tanto más *exacta* cuanto menor sea el intervalo fijado por Δ. Sin embargo, para comparar la bondad de dos medidas distintas no basta considerar el valor de Δ. Supongamos, por ejemplo, que medimos dos longitudes diferentes obteniéndose como resultado:

$$l_1 = 1{,}2 \pm 0{,}1 \text{ m}$$

$$l_2 = 150{,}3 \pm 0{,}1 \text{ m}$$

Las dos medidas, como puede apreciarse, tienen el mismo error absoluto, pero la segunda medida es claramente mejor que la primera. Conviene, por tanto, introducir el *error relativo*, ε, que se define como:

$$\varepsilon = \Delta/a \qquad [4]$$

Generalmente, ε se expresa en tanto por ciento:

$$\varepsilon(\%) = \frac{\Delta}{a} \cdot 100 \qquad [5]$$

Una medida será tanto más *precisa* cuanto menor sea su error relativo.

En el ejemplo anterior:

$$\varepsilon_1 = \frac{0{,}1}{1{,}2} \cdot 100 \sim 8\,\% \quad ; \quad \varepsilon_2 = \frac{0{,}1}{150{,}3} \cdot 100 \sim \frac{100}{1.500} \sim 0{,}06\,\%$$

luego l_2 es una medida más precisa que l_1.

La *exactitud* expresa la corrección de una medida, y la *precisión*, sin embargo, hasta qué punto es reproducible. Más adelante se insistirá en el aspecto estadístico de estos conceptos.

Una faceta muy importante del trabajo de un científico experimental consiste en la identificación de las fuentes de error, reducir sus efectos y determinar la fiabilidad de su resultado final. Vamos a dar a continuación unas breves indicaciones a este respecto.

Según las fuentes de error podemos distinguir los siguientes tipos de errores:

1. Errores de escala.
2. Errores sistemáticos o determinados.
3. Errores accidentales, indeterminados o àleatorios.

2.1. Errores de escala

La *resolución* de un instrumento de medida es la diferencia mínima entre dos valores próximos de la magnitud medida que justamente el instrumento es capaz de distinguir, proporcionando lecturas diferentes. La resolución es, por tanto, una característica del instrumento, y tiene un valor distinto de cero. Esta limitación de la resolución da lugar a la aparición de un error constante y dependiente del tipo de instrumento que se denomina error de escala.

Salvo indicaciones del constructor, este error suele estimarse en forma de error absoluto como un medio de la unidad que corresponde a las divisiones más próximas de la escala (lectura analógica) o a los cambios más pequeños del contador (lectura digital).

Por ejemplo, si un termómetro posee una escala graduada en divisiones de décima de grado, y el constructor no indica nada al respecto, se puede estimar el error de escala en 0,05 °C. Este error es constante y afecta por igual a cualquiera de las lecturas efectuadas. Si la lectura es, por ejemplo, 36,50 °C, el efecto de este error se expresa así: 36,50 $\pm$ 0,05 °C.

2.2. Errores sistemáticos o determinados

Son errores que afectan a las distintas medidas de un modo constante y previsible. Un análisis cuidadoso del proceso de medida puede detectar la presencia de este tipo de errores y por tanto evitarlos, o bien una vez determinados hacer las oportunas correcciones sobre las medidas. La detección de errores sistemáticos es uno de los principales trabajos del experimentador, así como hacerlos tan pequeños como sea posible. Sus fuentes pueden ser muy variadas:

2.2.1. Errores del método

Aparecen cuando el método no es adecuado para la determinación a realizar. Estos errores tienen su origen en las propiedades químicas o fisicoquímicas del sistema entre manos.

Estas son algunas fuentes de errores metódicos:

1. Alteraciones o fluctuaciones de la temperatura.
2. Higroscopicidad de la especie que se pesa.
3. Producción de una reacción de forma incompleta.
4. Reacciones inducidas y laterales.
5. Descomposición o volatilización de una muestra al calentar.
6. Coprecipitación.
7. Solubilidad de un precipitado en el líquido de lavado,
   ... etc.

Los errores de método son la fuente más seria de inexactitudes, porque a menudo son muy difíciles de eliminar.

2.2.2. *Errores instrumentales o de calibrado*

Son errores que dependen de la instrumentación o dispositivo experimental usado para la medida y sus condiciones de utilización. Un ejemplo muy común puede ser la existencia de errores en el calibrado de los instrumentos. Se enumeran a continuación algunos casos concretos:

1. Balanzas mal calibradas.
2. Uso de material de vidrio aforado sin calibrar o mal calibrado.
3. Recipientes, células y utensilios. Introducción de sustancias extrañas por el ataque al material de los mismos.
4. Reactivos. Presencia de impurezas.
5. Cronómetros que adelantan o atrasan.
6. Error de cero. Al leer la escala o contador de un instrumento conviene verificar que cuando debería leerse 0, efectivamente indica cero. En caso contrario debe realizarse un «ajuste de cero», ... etc.

Además, las condiciones de utilización de un instrumento deben corresponder a las usadas en su calibrado. Por ejemplo, cuando se mide la temperatura de un líquido, el termómetro debe sumergirse hasta la profundidad en él indicada. Cuando se calibró originalmente se sumergió a esa profundidad, y si se hacen lecturas en otras condiciones, la expansión del mercurio a lo largo del termómetro no será la misma.

2.2.3. *Errores personales*

Un tipo de errores personales son los operativos o de manipulación. Estos errores se reducen a magnitudes insignificantes con el entrenamiento, un trabajo cuidadoso, hábil e inteligente. Pueden citarse como típicos los siguientes errores operativos: dejar recipientes abiertos y así se introduce polvo y otros productos extraños en las disoluciones, el derrame de líquidos y sólidos, pérdidas en las transferencias de muestras, manejar directamente con los dedos recipientes que se van a pesar con la consiguiente incorporación de agua y otras sustancias a los mismos, pesada de recipientes antes de que estén completamente fríos, el error de paralaje en la lectura del nivel o menisco de un líquido, etc.

Otro tipo de errores personales diferentes de los operativos tienen su origen en la inhabilidad constitucional de un individuo para hacer exactamente ciertas observaciones. Por ejemplo, algunas personas son incapaces de juzgar exactamente los cambios de color en las valoraciones y puede ocurrir que siempre se pasen un poco en el punto final. Generalmente estos errores son de magnitud más bien constante y pueden incluirse en una «ecuación personal» del observador.

Cuando se repiten una serie de medidas el problema suele ser cuál décima de división se debe tomar al leer una escala. El observador elige, probablemente, la que haga que el resultado concuerde más estrechamente con el que le precedió. Estos errores personales se deben a prejuicios que hay que evitar.

Siempre que sea posible se deberán corregir los errores sistemáticos, en caso contrario se suman al error de escala y se les trata como una constante.

2.3. Errores accidentales, indeterminados o aleatorios

Son debidos a las fluctuaciones de las distintas variables que influyen sobre el sistema. Son imprevisibles ya que no se puede ejercer un control sobre estas fluctuaciones, e incluso normalmente no se conocen todas las variables que influyen. Por su carácter aleatorio estos errores pueden tratarse estadísticamente, como veremos más adelante.

La figura 1(a) muestra la dispersión de las lecturas debida a los errores accidentales. Si además interviene un error sistemático, esta dispersión aleatoria de lecturas sufre un desplazamiento global, de manera que ya no se distribuyen en torno al valor verdadero, sino en torno a otro valor (Fig. 1(b)). En estas condiciones, aunque se hagan muchas lecturas, el resultado final nunca coincidirá con el valor verdadero.

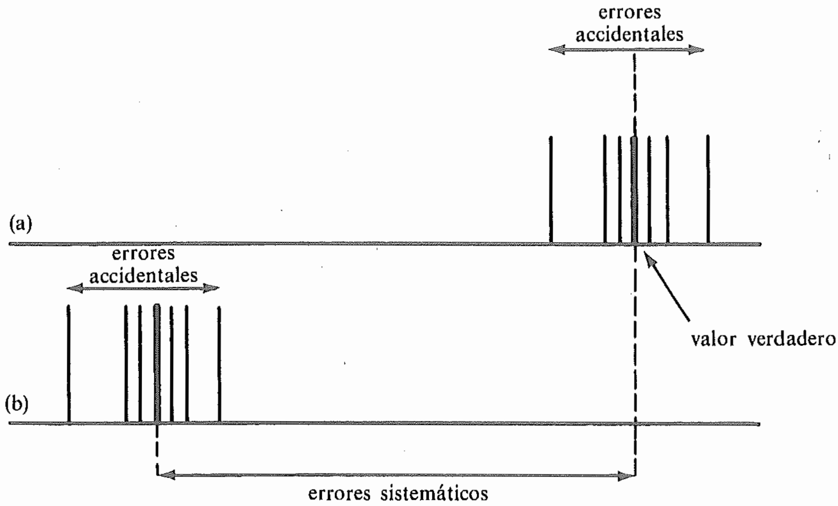

Figura 1.—Errores sistemáticos y accidentales.

Podemos ampliar ahora los conceptos ya introducidos de exactitud y precisión. Una medida será tanto más exacta cuanto menores sean los errores sistemáticos que la afectan, y será tanto más precisa cuanto menores sean sus errores accidentales o aleatorios. Si ambos tipos de error son pequeños, se dice que la medida es exacta y precisa.

En general, el error accidental es mayor que el de escala (Fig. 2); no obstante, en los casos en que hagamos un gran número de medidas y el instrumento no sea muy preciso, la medida vendrá afectada principalmente por el error de escala del aparato. Incluso cuando el instrumento proporciona medidas más reproducibles que exactas, haciendo un número suficiente de lecturas interpoladas en la escala, se puede conseguir que el error accidental sea inferior al error de escala.

El error sistemático podrá ser mayor o menor que los anteriores.

Como los tres tipos de error tienen fuentes distintas se tratan independientemente, siendo el error total la suma de los tres:

$$\Delta_{TOTAL} = \Delta_{esc} + \Delta_{acc} + \Delta_{sist} \qquad [6]$$

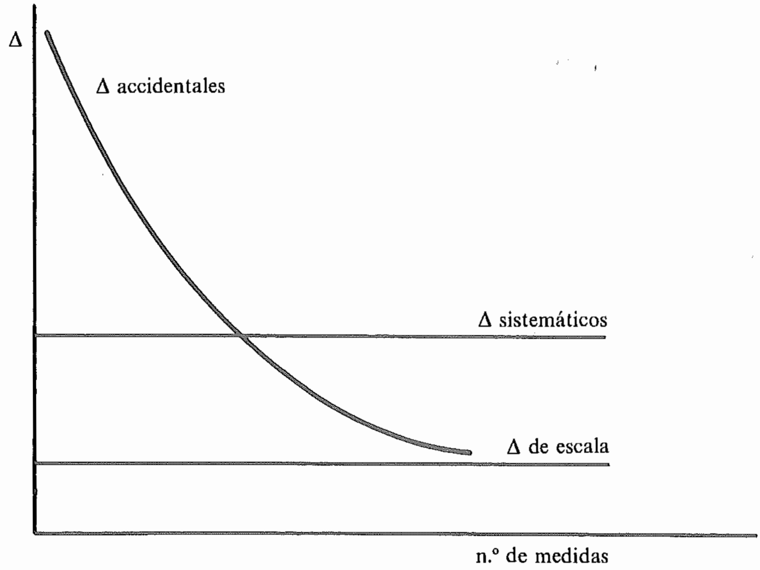

Figura 2.—Dependencia con el número de medidas de los distintos tipos de errores.

3. CIFRAS O DIGITOS SIGNIFICATIVOS. REDONDEO. CRITERIO DE ERROR APROXIMADO

Como el adjetivo sugiere, las cifras significativas de un número son aquellas que tienen algún significado práctico. En las magnitudes físicas se consideran cifras significativas de un número todos los dígitos ciertos y el primer (únicamente el primero) dígito afectado de error.

Por ejemplo, en el número 0,003070 los tres primeros ceros son dígitos no significativos ya que únicamente sirven para fijar la posición de la coma e indicar el valor posicional de los otros dígitos. Los otros dos ceros son significativos. Si el último dígito de 0,003070 no es significativo entonces el número debe escribirse de la forma 0,00307. Desde este punto de vista, los números 0,003070 y 0,00307 no son los mismos, ya que el primero tiene cuatro dígitos significativos y el segundo solamente tres.

Los ceros no son significativos a la izquierda y sí lo son a la derecha. Por ello, conviene expresar los números aproximados (afectados de error) usando una forma más simplificada, como la *notación científica.* En esta notación el número se expresa como el producto de otro número (mantisa) que contiene solamente los dígitos significativos, el primero de los cuales ocupa la cifra de las unidades, por una potencia de diez. En el ejemplo anterior:

$$3{,}070 \cdot 10^3 \rightarrow \text{cuatro cifras significativas}$$

$$3{,}07 \cdot 10^3 \rightarrow \text{tres cifras significativas}$$

En el número 150.000 no queda claro cuántos dígitos significativos hay, aun cuando puede decirse que al menos hay dos. La ambigüedad puede evitarse utilizando notación científica:

$$1{,}5 \cdot 10^5 \rightarrow \text{si tiene dos cifras significativas}$$

$$1{,}50 \cdot 10^5 \rightarrow \text{si tiene tres}$$

$$1{,}500 \cdot 10^5 \rightarrow \text{si tiene cuatro}$$

etc.

Análogamente podemos comprobar que $3{,}2\,\text{km} \not\equiv 3.200\,\text{m}$:

$$3{,}2\,\text{km} = 3{,}2 \cdot 10^3\,\text{m} \rightarrow \text{dos cifras significativas}$$

$$3.200\,\text{m} = 3{,}200\,\text{km} \rightarrow \text{cuatro cifras significativas}$$

Cuando una magnitud se calcula con un número de cifras superior al de cifras significativas, conviene suprimir las cifras no significativas; a esta operación se denomina *redondeo.* Con esta supresión se comete un *error de redondeo* que ha de ser inferior al error de la magnitud; por esto conviene *mantener la primera cifra afectada de error* y seguir las reglas siguientes:

1. Si el primero de los dígitos despreciados es menor de 5, déjense como están los dígitos restantes.
2. Si el primer dígito despreciado excede de 5, añádase uno al último dígito de los que quedan.

3. a) Si el primer dígito despreciado es exactamente 5 y hay dígitos no cero entre los despreciados, añádase una unidad al último dígito conservado.

b) Sin embargo, si el primer dígito despreciado es exactamente 5 y el resto de los dígitos despreciados son cero, el último dígito conservado se deja como está si es par y se incrementa en una unidad si es impar (regla del dígito par).

Ejemplos:

$$7{,}56128 \pm 0{,}02 \rightarrow 7{,}56 \pm 0{,}02$$

$$7{,}56128 \pm 0{,}1 \rightarrow 7{,}6 \pm 0{,}1$$

$$4{,}25002 \pm 0{,}1 \rightarrow 4{,}3 \pm 0{,}1$$

$$1850 \pm 100 \rightarrow (1{,}8 \pm 0{,}1) \cdot 10^2$$

$$413{,}73500 \pm 0{,}05 \rightarrow (4{,}1374 \pm 0{,}0005) \cdot 10^2$$

Cuando se nos da una magnitud física y ningún otro dato relativo al error, consideraremos que todas sus cifras son significativas y que son el mayor número de cifras que se pueden leer con la escala del aparato o instrumento de medida. La separación entre dos líneas consecutivas de la escala será el error de las correspondientes lecturas. Por lo tanto, se considera solamente el error de escala:

En estas condiciones el error absoluto es media unidad del orden correspondiente a la última cifra significativa.

Ejemplo: A la magnitud 12,08 V le corresponde un error absoluto de

$$\Delta = \pm 0{,}005 \text{ V}$$

Siendo este error una cota arbitraria, aunque justificada, no tiene sentido obtener con cifras exactas el correspondiente error relativo, que puede estimarse así

$$\varepsilon = \frac{0{,}005}{12{,}08} \sim \frac{5}{10.000} = 0{,}05\ \%$$

Este *criterio de error aproximado* es muy usado en el cálculo de errores como veremos a continuación.

4. CALCULOS CON NUMEROS APROXIMADOS

Frecuentemente, a partir de los valores de determinadas magnitudes medidas en el laboratorio debemos evaluar otras que son función de aquéllas. El objetivo primordial del cálculo de errores es: dados los errores de un cierto conjunto de magnitudes, determinar el error de una función dada de las mismas. Se emplean distintos criterios o aproximaciones para estimar las cotas de error de las funciones calculadas. Uno de ellos es la aproximación diferencial que describimos a continuación.

Dada una función $y = f(x_1, x_2, x_3, ..., x_n)$ donde cada una de las variables, x_i, está afectada por un error, Δx_i, si diferenciamos en la expresión anterior obtendremos la relación entre las variaciones de las variables y las variaciones de la función:

$$dy = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i \qquad [7]$$

si los errores son pequeños, podemos sustituir el diferencial por el error:

$$\Delta y = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) \Delta x_i \qquad [8]$$

Esta expresión general del error absoluto puede aplicarse a cualquier función. Vamos a ver el resultado de la misma en algunos casos muy comunes.

Suma o diferencia: $y = u \pm v$; $dy = du \pm dv$

$$\Delta y = \Delta u + \Delta v \qquad [9]$$

Como puede observarse tanto en la suma como en la diferencia los errores se suman, ya que se supone siempre el caso más desfavorable en el que los errores puedan acumularse.

El error absoluto de una suma o diferencia es la suma de los errores absolutos.

Por ejemplo, el error de la suma 13,65 + 0,0083 + 1,632 es

$$\begin{array}{rl} 13{,}65 \pm & 0{,}005 \\ 0{,}0083 \pm & 0{,}00005 \\ 1{,}632 \pm & 0{,}0005 \\ \hline 15{,}2903 & \Delta = 0{,}00555 \sim 0{,}006 \\ & 15{,}290 \pm 0{,}006 \end{array}$$

Producto: $y = u \cdot v \quad ; \quad \ln y = \ln u + \ln v \quad ; \quad \dfrac{\mathrm{d}y}{y} = \dfrac{\mathrm{d}u}{u} + \dfrac{\mathrm{d}v}{v}$

$$\frac{\Delta y}{y} = \frac{\Delta u}{u} + \frac{\Delta v}{v}$$

Esto es, *el error relativo de un producto es la suma de los errores relativos de los factores*

$$\varepsilon_y = \varepsilon_u + \varepsilon_v \qquad [10]$$

División: Operando de igual forma

$$y = \frac{u}{v} \quad ; \quad \ln y = \ln u - \ln v \quad ; \quad \frac{\mathrm{d}y}{y} = \frac{\mathrm{d}u}{u} - \frac{\mathrm{d}v}{v}$$

$$\frac{\Delta y}{y} = \frac{\Delta u}{u} + \frac{\Delta v}{v}$$

$$\varepsilon_y = \varepsilon_u + \varepsilon_v \qquad [11]$$

Un resultado igual al del producto

Potencia: $y = ax^n$ (a constante) ; $\ln y = \ln a + n \ln x$

$$\frac{\mathrm{d}y}{y} = n\frac{\mathrm{d}x}{x} \quad ; \quad \frac{\Delta y}{y} = n\frac{\Delta x}{x}$$

$$\varepsilon_y = n\varepsilon_x \qquad [12]$$

El error relativo de una potencia es igual al exponente por el error relativo de la base. El caso de la raíz queda incluido cuando el exponente es un número fraccionario.

Logaritmos: $y = \ln x$; $\mathrm{d}y = \frac{1}{x}\mathrm{d}x$

$$\Delta y = \frac{\Delta x}{x} = \varepsilon_x \qquad [13]$$

El error absoluto de un logaritmo natural o neperiano es igual al error relativo del número del que queremos hallar el logaritmo. En el caso de logaritmos decimales es fácil deducir que

$$\Delta y = 0{,}43\varepsilon_x \sim 0{,}5\varepsilon_x \qquad [14]$$

El error absoluto de un logaritmo decimal es igual a la mitad del error relativo del número del que se quiere hallar el logaritmo.

Otro criterio más restrictivo para evaluar las cotas de error de funciones calculadas a partir de números aproximados consiste en estimar el error como la raíz cuadrada de la aproximación diferencial, expresión [8], haciendo intervenir términos cuadráticos:

$$\Delta y = \left[\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 \Delta x_i^2\right]^{1/2} \qquad [15]$$

este criterio se aplica frecuentemente cuando se manejan parámetros estadísticos de error (desviaciones estándar, errores probables, etc.).

Los resultados de aplicar este criterio a funciones sencillas son:

1. $y = u + v$; $\Delta_y = (\Delta_u^2 + \Delta_v^2)^{1/2}$ [16]

2. $y = u \cdot v$; $\varepsilon_y = (\varepsilon_u^2 + \varepsilon_v^2)^{1/2}$ [17]

3. $y = u/v$; $\varepsilon_y = (\varepsilon_u^2 + \varepsilon_v^2)^{1/2}$ [18]

4. $y = ax^n$ (a constante) ; $\varepsilon_y = n\varepsilon_x$ [19]

En cualquier caso, al efectuar cálculos con números aproximados hay que aplicar el sentido común para no complicarlos innecesariamente u obtener resultados decepcionantes. En muchas situaciones experimentales, se advierten grandes diferencias en los errores de las magnitudes que se manejan; este hecho debe servirle para simplificar los cálculos despreciando aquellas contribuciones al error final que sean insignificantes. Pero más importante aún es hacer este análisis de las contribuciones relativas de los errores antes de realizar el experimento. De esta manera podrá conceder mayor atención y tiempo a aquellos aspectos del experimento que le permitan reducir los errores dominantes, o a realizar ciertas medidas con un cuidado especial.

Mucha atención cuando haya que restar dos magnitudes con valores muy próximos. En general, habría que evitar este tipo de cálculos, pero si no es posible, las medidas de estas magnitudes deben hacerse con sumo cuidado porque la precisión del resultado puede ser sorprendente. Por ejemplo, la diferencia entre dos tensiones medidas de 225 ± 2 V y 221 ± 2 V es 4 ± 4 V, el error relativo o precisión del resultado es nada menos que del

$$\frac{4}{4} \cdot 100 = 100\ \%$$

Unas observaciones finales, insistiendo en lo que se ha venido diciendo hasta aquí. Haga los cálculos solamente con las cifras significativas de los números. No arrastre cifras innecesarias aunque pueda introducirlas en su calculadora u ordenador; es una pérdida de tiempo que no repercutirá en la bondad del resultado. Los errores dominantes en el cálculo pueden también hacer innecesario el uso de un gran número de cifras significativas para las magnitudes más precisas. No olvide nunca expresar el resultado solamente con sus cifras significativas.

5. TRATAMIENTO ESTADÍSTICO DE ERRORES

No podemos describir aquí todos los métodos estadísticos para el tratamiento de datos y errores. Hay excelentes manuales dedicados a ello (refs. 1 y 2). Vamos a limitarnos a presentar los parámetros estadísticos más usuales en el cálculo de errores, así como a dar algunos consejos sobre su utilización. Para un conocimiento más profundo, el alumno debe dirigirse a los manuales de estadística o realizar cursos de esta disciplina.

Todo el tratamiento estadístico aplicado a los errores, y en consecuencia a las medidas, tiene por objeto encontrar un valor representativo de la magnitud sometida al proceso de medida que sustituya al valor verdadero, y obtener dicho valor con una precisión aceptable.

Si solamente interviniesen los errores accidentales o aleatorios (o bien se consiguiese eliminar las contribuciones de los otros tipos de error) y se hiciera un número infinito o muy elevado de medidas, al representar los valores medidos frente a la frecuencia de observación de cada uno de ellos se obtendría una curva simétrica denominada normal o función de distribución de Gauss (Fig. 3).

El valor más probable o que aparece mayor número de veces (máximo de la curva) corresponde a la *media aritmética*, $\bar{x}$, de las n medidas, x_i:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \qquad [20]$$

En la teoría de errores, la media aritmética es el valor representativo de la variable medida (reemplaza al valor verdadero). En la práctica, el número de medidas no puede ser infinito, ni incluso muy elevado, ni tampoco los errores son perfectamente aleatorios. Por tanto, $\bar{x}$ es sólo una aproximación al valor verdadero, tanto mejor cuanto mayor sea el número de medidas realizado. ¿Se le puede asociar un error?

La anchura de la curva es una indicación de lo reproducible o de lo precisas que son las medidas. Esta precisión puede expresarse de varias formas.

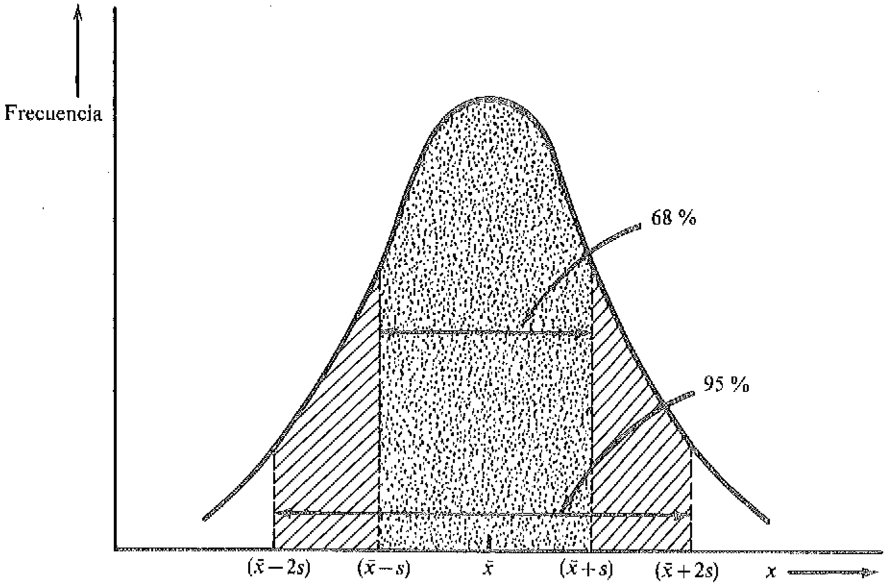

Figura 3.—Distribución correspondiente a un gran número de medidas.

Desviación media: Media aritmética de las desviaciones de todas las medidas

$$\delta = \frac{\sum_{i=1}^{n} |x_i - \bar{x}|}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} d_i}{n} \qquad [21]$$

Varianza:

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^{n} d_i^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 / n}{n-1} \qquad [22]$$