ÍNDICE

CAPÍTULO 1

LA TRANSFORMADA DE LAPLACE

PRERREQUISITOS

Funciones reales de una variable real. Límites y continuidad. Propiedades de las funciones continuas.

Definición de integral. Interpretación geométrica. Integración de funciones continuas y con un número finito de discontinuidades. Convergencia de una integral.

Integrales impropias.

Operadores lineales.

La función Gamma de Euler ($\Gamma(x)$).

En este capítulo se introducirá un método de cálculo especialmente útil para resolver ecuaciones diferenciales y problemas de valor inicial, como es la **Transformada de Laplace.**

Es éste un método con numerosas aplicaciones en las matemáticas de la Ingeniería, que tiene también conexiones con facetas importantes de la matemática pura. En cuanto a las aplicaciones en ingeniería son de especial importancia aquellas en las que se tratan sistemas físicos representados por modelos matemáticos con funciones discontinuas. Un motor que se para o arranca, un sistema que sufre una condición irregular en un espacio corto de tiempo, etc.

En el presente capítulo se ofrecerá una panorámica general de este procedimiento matemático con sus propiedades esenciales, la forma de aplicarlo a la resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias y su importancia en ciertas funciones especiales que suelen encontrarse en diversas situaciones físicas.

1. DEFINICIÓN. CONDICIONES DE EXISTENCIA

Definición 1.1. Se llama **Transformada de Laplace** de una función $f(x)$ definida para $0 \leqslant x < \infty$, y se denota por $L[f(x)]$, la función $F(s)$ dada por la expresión:

$$L[f(x)] = \int_0^{\infty} e^{-sx} f(x)\, dx = F(s)$$

Esta expresión es una integral impropia, integral que será convergente cuando exista el límite:

$$\lim_{p \to \infty} \int_0^p e^{-sx} f(x)\, dx$$

siendo precisamente ese límite el valor de la integral.

Ejemplo:

La transformada de Laplace de la función e^x es:

$$L[e^x] = \lim_{p \to \infty} \int_0^p e^{-sx} e^x\, dx$$

que resolviendo por partes, se obtiene:

$$L[e^x] = \lim_{p \to \infty} \left[\frac{e^{-(s-1)p}}{-(s-1)} - \frac{1}{-(s-1)} \right] = \frac{1}{s-1}$$

La dificultad del cálculo de la transformada de Laplace de una función radica únicamente en la que pueda tener la resolución de la integral que la define, como se ha visto en el ejemplo anterior. Sin embargo, una cuestión previa a analizar es la de la existencia o no de dicha transformada, o de otra manera, cuando es o no convergente la integral que la define. Con objeto de analizar las condiciones que ha de cumplir una función para que exista su transformada se definirán ciertos conceptos.

i) *Continuidad a trozos.* Una función es continua a trozos en un intervalo $I \subset R$ si es continua en él, o tiene a lo sumo un número finito de puntos de discontinuidad de salto, es decir, que en todo punto de discontinuidad existen tanto el límite por la derecha como por la izquierda.

Ejemplo:

La función $f(x)$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -5 \leqslant x < 0 \\ 2, & 0 \leqslant x < 2 \\ 1, & 2 \leqslant x \leqslant 5 \end{cases}$$

es continua a trozos en el intervalo $[-5, 5]$, ya que tiene dos discontinuidades de salto en los puntos $x = 0$, $x = 2$. En ellos existen los límites de la función por derecha e izquierda.

Su gráfica es la de la Figura 1.1.

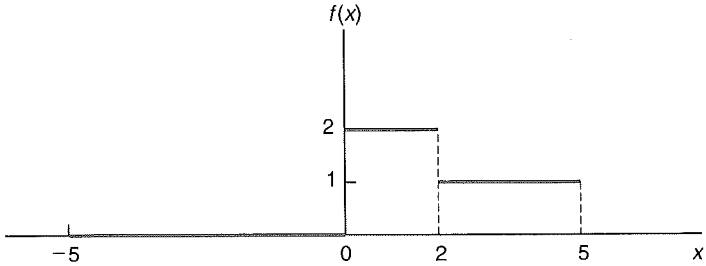

Figura 1.1.

Si una función es continua a trozos en un intervalo cerrado, entonces e integrable en él.

ii) *Orden exponencial.* Una función $f(x)$ es de orden exponencial si existen dos números reales c y M ($M > 0$) tales que a partir de un cierto valor x_0 de x es $|f(x)| \leqslant Me^{cx}$, para todo $x > x_0$.

Ejemplos: La función $f(x) = x$ es de orden exponencial, ya que con los valores $M = 1$, $c = 1$ es $|x| < 1e^{1x}$, para todo x superior a $x_0 = 0$. Se dice exponencial con $c = 1$.

Cualquier función acotada $f(x)$ es de orden exponencial, ya que al ser acotada existe un $M > 0$ tal que $|f(x)| < M$, y con ese valor de M, y $c = 0$ es $|f(x)| < Me^{0x} = M$.

La función $f(x) = e^{x^2}$ no es de orden exponencial. Para cualesquiera valores de c y M ($M < 0$) que se elijan, al ser:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{e^{x^2}}{Me^{cx}} = \lim_{x \to \infty} e^{x(x-c)} = \infty$$

indica que sea cual sea el valor de M y c elegido nunca es posible mantener $|e^{x^2}| < Me^{cx}$.

Este último ejemplo puede llevarnos a definir de otra forma, equivalente a la primera, el concepto de orden exponencial. «Una función $f(x)$ es de orden exponencial si existe un número real c tal que el producto $e^{-cx}|f(x)|$ esté acotado.» Es decir, si:

$$e^{-cx}|f(x)| < M$$

a partir de un cierto valor de x.

Hay que entender que el concepto de orden exponencial de una función indica la seguridad de que dicha función no crece más deprisa que lo hace una de la forma Me^{cx} ($M > 0$). Puede suceder que la función tienda a infinito pero, sin embargo, será de orden exponencial si lo hace más despacio que una exponencial de la forma anterior. Es el caso de $f(x) = x$ visto en el ejemplo anterior.

Se han definido los dos conceptos anteriores, continuidad a trozos y orden exponencial de una función, persiguiendo la convergencia de la integral de definición de su transformada de Laplace. Para una función $f(x)$ la continuidad a trozos asegura su integración, y el orden exponencial indica que su producto por e^{-sx} es acotado. Esas van a ser las dos condiciones a exigir a una función para que exista su transformada de Laplace.

Teorema 1.2. Si la función $f(x)$ es continua a trozos y de orden exponencial para c, existe su transformada de Laplace $L[f(x)]$ para valores de $s > c$.

Demostración: La transformada $L[f(x)]$ existirá si es convergente para todo $s > c$ la integral:

$$\int_0^\infty e^{-sx} f(x)\, dx$$

Dividamos la integral anterior en las dos siguientes:

$$\int_0^\infty e^{-sx} f(x)\, dx = \int_0^p e^{-sx} f(x)\, dx + \int_p^\infty e^{-sx} f(x)\, dx = I_1 + I_2$$

donde p es un número $p > x_0$ (x_0 es el valor de x a partir del cual se cumple la desigualdad de definición de orden exponencial de $f(x)$).

La primera integral I_1 es convergente ya que los límites son finitos y la función subintegrando es continua a trozos, pues lo es $f(x)$ y e^{-sx} es continua.

La comprobación de la convergencia de la segunda integral I_2 puede hacerse mediante el criterio de comparación.

Al ser $f(x)$ de orden exponencial para c, $|f(x)| < Me^{cx}$, $M > 0$.

Al ser $e^{-sx} > 0$, se tiene:

$$|e^{-sx}f(x)| = e^{-sx}|f(x)| < e^{-sx}Me^{cx} = Me^{-(s-c)x}$$

Por lo tanto, para $s > c$ se verifica:

$$I_2 = \int_p^{\infty} e^{-sx}f(x)\,dx \leqslant \int_p^{\infty} |e^{-sx}f(x)|\,dx \leqslant$$

$$\leqslant \int_p^{\infty} Me^{-(s-c)x}\,dx = \frac{Me^{-(s-c)p}}{s-c}$$

y al no ser infinito la última expresión queda demostrada la convergencia de I_2.

De la convergencia de ambas integrales I_1 e I_2, resulta la de la integral suma, y con ello la existencia de la transformada de Laplace de la función $f(x)$.

Ejemplo: Compruébese la existencia y hállese la transformada de Laplace de la función:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & 0 < x < 5 \\ 2, & 5 < x < 7 \\ 0, & x > 7 \end{cases}$$

La función $f(x)$ cumple las condiciones del teorema 1.2, para la existencia de transformada. La función es continua a trozos, ya que tiene dos discontinuidades de salto en $x = 5$, $x = 7$, siendo además de orden exponencial pues cualquier constante k lo es, ya que para $M = |k| + 1$, $c = 0$ es $|k| < (k + 1)e^{0x}$ para cualquier x.

Para hallar su transformada, descomponemos la integral de definición en los trozos en los que lo hace la función:

$$L[f(x)] = \int_0^{\infty} e^{-sx}f(x)\,dx = \int_0^{5} e^{-sx}\cdot 0\,dx + \int_5^{7} e^{-sx}\cdot 2\,dt + \int_5^{\infty} e^{-sx}\cdot 0\,dx =$$

$$= 2\left|\frac{e^{-sx}}{-s}\right|_5^7 = \frac{2}{s}\,(e^{-5s} - e^{-7s})$$

Las condiciones del teorema son condiciones suficientes de existencia, pudiendo suceder que una función tenga transformada de Laplace sin verificar alguna de esas condiciones.

2. TRANSFORMADAS DE ALGUNAS FUNCIONES ELEMENTALES

Hallaremos las transformadas de algunas funciones elementales aplicando exclusivamente la definición. Todas ellas verifican las condiciones suficientes de existencia, como fácilmente puede comprobarse.

Transformada de la función exponencial ke^{ax}

$$L[ke^{ax}] = \int_0^\infty ke^{-sx}e^{ax}\,dx = k\int_0^\infty e^{-(s-a)x}\,dx = \frac{k}{s-a}$$

Las integrales utilizadas convergen para $s > a$, que es el intervalo de existencia de la transformada.

Si $a = 0$ se obtiene la transformada de una constante:

$$L[k] = \frac{k}{s}$$

Y si $k = 1$,

$$L[1] = \frac{1}{s}$$

Estas dos últimas existen para $s > 0$.

Transformada de la función potencial x^n

$$L[x^n] = \int_0^\infty e^{-sx}x^n\,dx$$

Para resolverla haremos el cambio $z = sx$, de donde $dz = s\,dx$, quedando:

$$L[x^n] = \int_0^\infty e^{-z}z^n s^{-n}s^{-1}\,dz = \frac{1}{s^{n+1}}\int_0^\infty e^{-z}z^n\,dz$$

Recordando ahora la expresión de la función Γ de Euler:

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty e^{-x}x^{n-1}\,dx \quad \text{o bien} \quad \Gamma(n+1) = \int_0^\infty e^{-x}x^n\,dx$$

y su valor:

$$\Gamma(n+1) = n!$$

resulta:

$$L[x^n] = \frac{1}{s^{n+1}}\,\Gamma(n+1) = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

Todas las integrales existen para $s > 0$.

Transformada de las funciones seno y coseno circulares

Tanto las funciones sen bx como cos bx cumplen las condiciones suficientes de existencia de transformadas. Ambas son continuas y al ser acotadas son de orden exponencial.

Sus transformadas son:

$$L[\text{sen } bx] = \int_0^\infty e^{-sx}\,\text{sen } bx\,dx; \quad L[\cos bx] = \int_0^\infty e^{-sx}\cos bx\,dx$$

Integrando por partes, resulta:

$$L[\text{sen } bx] = \frac{1}{s^2+b^2}\,|e^{-sx}(-s\,\text{sen } bx - b\cos x|_0^\infty = \frac{b}{s^2+b^2}$$

Y análogamente en el caso del coseno:

$$L[\cos bx] = \int_0^\infty e^{-sx}\cos bx\,dx = \frac{1}{s^2+b^2}\,|e^{-sx}(-s\cos bx + b\,\text{sen } bx|_0^\infty = \frac{s}{s^2+b^2}$$

Ambas integrales convergen para $s > 0$ que es el intervalo de existencia de las transformadas.

Transformada de la derivada de una función

Sea $f(x)$ una función continua de orden exponencial y tal que su derivada primera sea continua a trozos y también de orden exponencial. Con esas condiciones se garantiza la existencia de la transformada de Laplace $L[f'(x)]$. Su valor es:

$$L[f'(x)] = \int_0^\infty e^{-sx} f'(x)\, dx$$

Integrando por partes, haciendo:

$$e^{-sx} = u; \quad -se^{-sx}\, dx = du$$

$$dv = f'(x)\, dx; \quad v = f(x)$$

queda:

$$L[f'(x)] = |e^{-sx} f(x)|_0^\infty + s\int_0^\infty e^{-sx} f(x)\, dx$$

expresión en la cual $|e^{-sx} f(x)|_0^\infty = -f(0)$, ya que $f(x)$ es de orden exponencial, y con ello el producto $e^{-sx} f(x)$ tiende a cero cuando x lo hace a infinito. Por tanto resulta la siguiente fórmula para la transformada de Laplace de la derivada:

$$L[f'(x)] = sL[f(x)] - f(0)$$

«La transformada de la derivada de una función es igual al producto por s de la transformada de dicha función, menos su valor en $x = 0$.»

Si la función es sucesivamente derivable y sus derivadas cumplen las condiciones suficientes de existencia de transformada, puede reiterarse el cálculo anterior y hallar las transformadas de las derivadas sucesivas de $f(x)$:

$$L[f''(x)] = sL[f'(x)] - f'(0) = s^2 L[f(x)] - sf(0) - f'(0)$$

$$L[f'''(x)] = sL[f''(x)] - f''(0) = s^3 L[f(x)] - s^2 f(0) - sf'(0) - f''(0)$$

Y en general, la transformada de la derivada n-ésima:

$$L[f^{(n)}(x)] = s^n L[f(x)] - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0)$$

Esta propiedad es muy interesante a la hora de resolver ecuaciones diferenciales como más adelante se verá, ya que al reemplazarse derivadas por productos, la ecuación diferencial se transformará en una algebraica, y su resolución será más sencilla.

Transformada de la integral de una función

Inversamente a lo anterior, si la función $\int_0^x f(x)\,dx$ cumple las condiciones para tener transformada, puede escribirse:

$$L\left[\int_0^x f(x)\,dx\right] = \int_0^\infty e^{-sx}\left(\int_0^x f(x)\right)dx$$

Integrando por partes haciendo:

$$e^{-sx}\,dx = dv; \qquad \int_0^x f(x)\,dx = u$$

$$-\frac{e^{-sx}}{s} = v; \qquad f(x)\,dx = du$$

resulta:

$$L\left[\int_0^x f(x)\,dx\right] = \left|-\frac{1}{s}e^{-sx}\int_0^x f(x)\,dx\right|_0^\infty + \frac{1}{s}\int_0^\infty e^{-sx}f(x)\,dx = \frac{L[f(x)]}{s}$$

Ejemplo:

$$L\left[\int_0^x \cos x\,dx\right] = \frac{L[\cos x]}{s} =$$

$$= \frac{\dfrac{s}{s^2+1}}{s} = \frac{1}{s^2+1}$$

que es la transformada de sen x.

Es interesante el conocimiento de las transformadas de Laplace de ciertas funciones elementales y la familiarización con las mismas ya que éstas se encuentran con frecuencia a la hora de resolver ecuaciones diferenciales. En la Tabla 1.1 expresan algunas de ellas.

Tabla 1.1. Algunas transformadas de Laplace

$f(x)$	$L(f(x)] = F(s)$
1	$\frac{1}{s}$
e^{ax}	$\frac{1}{s-a}$
$x^n(n \in \mathbb{N})$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
sen bx	$\frac{b}{s^2+b^2}$
cos bx	$\frac{s}{s^2+b^2}$
$x^x f(x)\,(n \in \mathbb{N})$	$(-1)^n \frac{d^n}{ds^n} F(s)$
$e^{ax} f(x)$	$F(s-a)$

3. PROPIEDADES DE LA TRANSFORMADA DE LAPLACE

La transformada de Laplace es un operador lineal

Es consecuencia directa de la linealidad de la integral que la define. Si f y g son dos funciones con transformadas respectivas $L[f(x)]$ y $L[g(x)]$ y α, β números reales, entonces:

$$L[\alpha f(x) + \beta g(x)] = \alpha L[f(x)] + \beta L[g(x)]$$

La linealidad de la transformada permite el cálculo sencillo de la de cualquier expresión algebraica.

Ejemplo:

$$L[x^2 + 3x - e^{2x}] = L[x^2] + 3L[x] - 5L[e^{2x}] =$$

$$= \frac{2}{s^3} + 3\frac{1}{s^2} - 5\frac{1}{s-2}$$

Límite de la transformada de Laplace

Teorema 1.3. Si una función $f(x)$ verifica las condiciones de existencia de transformada, dicha transformada tiende a cero cuando s tiende a infinito.

Demostración: Al ser $f(x)$ de orden exponencial, existen números reales c, M $(M > 0)$ tal que a partir de un x_0 es:

$$|f(x)| < Me^{cx} \quad \text{para todo} \quad x > x_0$$

y al ser positivo e^{-sx} también es:

$$e^{-sx}|f(x)| < Me^{-(s-c)x}$$

Integrando esta expresión entre 0 e ∞, se obtiene:

$$\int_0^\infty e^{-sx}\,|f(x)|\,dx < \int_0^\infty Me^{-(s-c)x}\,dx = \frac{M}{s-c}, \quad \text{con} \quad s > c$$

Por lo tanto si $F(s)$ es la transformada de $f(x)$, resulta:

$$|F(s)| = \left|\int_0^\infty e^{-sx} f(x)\,dx\right| \leqslant \int_0^\infty |e^{-sx} f(x)|\,dx = \int_0^\infty e^{-sx}\,|f(x)|\,dx = \frac{M}{s-c}$$

y al ser:

$$\lim_{s\to\infty} \frac{M}{s-c} = 0$$

entonces también es:

$$\lim_{s\to\infty} F(s) = 0$$

Esta propiedad indica que funciones como sen s, polinomios en s, etc., no pueden ser transformadas de Laplace de ninguna función. Además, en las funciones racionales que son transformadas de Laplace, el grado del numerador ha de ser menor que el del denominador.

De hecho, aunque la propiedad ha utilizado la condición de ser de orden exponencial para que su transformada tienda a cero, esto sucede también aún en el caso de que la función no verifique las condiciones suficientes de existencia.

Propiedad de traslación

Si la transformada de Laplace de $f(x)$ es $F(s) = L[f(x)]$ para $s > c$, entonces:

$$L[e^{ax}f(x)] = F(s-a) \quad \text{para} \quad s > c + a$$

En efecto:

$$L[e^{ax}f(x)] = \int_0^{\infty} e^{ax}e^{-sx}f(x)\,dx = \int_0^{\infty} e^{-(s-a)x}f(x)\,dx = F(s-a)$$

Ejemplo:

Al ser $L[\text{sen } 2x] = \dfrac{2}{s^2+4}$, para hallar la transformada de la función e^{5x} sen $2x$, bastará con sustituir en la anterior expresión s por $s - 5$. Es decir:

$$L[e^{5x} \text{ sen } 2x] = \frac{2}{(s-5)^2+4}$$

Transformada del producto de una función por x^n

Si $f(x)$ es una función con transformada $L[f(x)] = F(s)$, entonces:

$$L[xf(x)] = -\frac{d}{ds}F(s)$$

En efecto: Derivando respecto a s la expresión de la transformada de Laplace, resulta:

$$\frac{d}{ds} F(s) = \frac{d}{ds} \int_0^\infty e^{-sx} f(x)\, dx = \int_0^\infty \frac{d}{ds} e^{-sx} f(x)\, dx =$$

$$= \int_0^\infty -x e^{-sx} f(x)\, dx = \int_0^\infty e^{-sx}(-x f(x))\, dx = L[-x f(x)]$$

Por un procedimiento recurrente y basándose en esta propiedad, resulta:

$$L[x^n f(x)] = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} F(s)$$

Ejemplo:

$$L[x \text{ sen } x] = -\frac{d}{ds} L[\text{sen } x] = -\frac{d}{ds} \frac{1}{s^2+1} = \frac{2s}{(s^2+1)^2}$$

Transformada del cociente de una función por x

Si $f(x)$ es una función con transformada $F(s)$, entonces:

$$L\left[\frac{f(x)}{x}\right] = \int_s^\infty F(s)\, ds$$

En efecto: Si $F(s) = L[f(x)]$, se trata de buscar $G(s) = L[g(x)]$, donde $g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$.

De $f(x) = x \cdot g(x)$ y aplicando la propiedad anterior se obtiene:

$$F(s) = L[f(x)] = L[x \cdot g(x)] = -\frac{d}{ds} L[g(x)] = -G'(s)$$

Es decir:

$$G'(s) = -F(s)$$

Integrando entre infinito y s, resulta:

$$|G(s)|_\infty^s = -\int_\infty^s F(s)\, ds = \int_s^\infty F(s)\, ds$$

Es decir:

$$G(s) - \lim_{s \to \infty} G(s) = \int_s^\infty F(s)\, ds$$

Al ser $G(s)$ la transformada de Laplace de una función, su límite cuando s tiende a infinito es cero (propiedad del límite de la transformada), con lo cual resulta:

$$G(s) = \int_s^\infty F(s)\, ds$$

o lo que es igual:

$$L\left[\frac{f(x)}{x}\right] = \int_s^\infty L[f(x)]\, ds \qquad [1]$$

Ejemplo:

$$L\left[\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right] = \int_s^\infty L[\operatorname{sen} x]\, ds = \int_s^\infty \frac{1}{1+s^2}\, ds = |\operatorname{arctg} s|_s^\infty = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} s$$

La expresión [1] puede ponerse también:

$$\int_0^\infty \frac{f(x)}{x} e^{-sx}\, dx = \int_s^\infty L[f(x)]\, ds$$

en la que haciendo tender s a cero se obtiene:

$$\int_0^\infty \frac{f(x)}{x}\, dx = \int_0^\infty L[f(x)]\, ds$$

expresión válida para calcular integrales de esa forma, siempre que existan.

Ejemplo:

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx = \int_0^\infty L[\operatorname{sen} x]\, ds = \int_0^\infty \frac{1}{1+s^2}\, ds = |\operatorname{arctg} s|_0^\infty = \frac{\pi}{2}$$