

ÍNDICE

CAPÍTULO 1. Espacios Topológicos	11
CAPÍTULO 2. Sucesiones. Bases de filtro. Espacios T_2	41
CAPÍTULO 3. Aplicaciones continuas. Homeomorfismos	71
CAPÍTULO 4. Topología inicial. Subespacios. Espacio producto	93
CAPÍTULO 5. Topología final. Espacio cociente	123
CAPÍTULO 6. Espacios compactos	145
CAPÍTULO 7. Espacios conexos	165
CAPÍTULO 8. Homotopía de aplicaciones continuas. Grupo fundamental de homotopía	183
CAPÍTULO 9. Complejos simpliciales. Grupos de homología	207

CAPÍTULO 1

ESPACIOS TOPOLÓGICOS

1.1. Sean (X, T) un espacio topológico y $A \subset X$. Probar que la familia:

$$T^* = \{U \cup (V \cap A) \mid U, V \in T\}$$

es una topología de X y determinar la relación entre las topologías T y T^* .

SOLUCIÓN.—

Comprobamos en primer lugar que T^* es una topología de X :

1. Para $U = X$ y $V \in T$ arbitrario es $U \cup (V \cap A) = X$, por lo que $X \in T^*$.

Si $U = V = \emptyset$ es $U \cup (V \cap A) = \emptyset$ y también es $\emptyset \in T^*$.

2. Si $\{M_i\}_{i \in I}$ es una colección de elementos de T^* existen familias $\{U_i\}_{i \in I}$, $\{V_i\}_{i \in I}$ de manera que para cada $i \in I$, se tiene $U_i, V_i \in T$ y $M_i = U_i \cup (V_i \cap A)$.

Ahora:

$$\bigcup_{i \in I} M_i = \bigcup_{i \in I} [U_i \cup (V_i \cap A)] = \left(\bigcup_{i \in I} U_i \right) \cup \left[\left(\bigcup_{i \in I} V_i \right) \cap A \right]$$

y como $\bigcup_{i \in I} U_i = U \in T$, $\bigcup_{i \in I} V_i = V \in T$ resulta:

$$\bigcup_{i \in I} M_i = U \cup (V \cap A) \in T^*$$

3. Si $M_1, M_2 \in T^*$, será $M_j = U_j \cup (V_j \cap A)$ para $j = 1, 2$ y $U_j, V_j \in T$. Se tiene entonces:

$$\begin{aligned} M_1 \cap M_2 &= [U_1 \cup (V_1 \cap A)] \cap [U_2 \cup (V_2 \cap A)] = \\ &= [(U_1 \cap U_2)] \cup \\ &\cup [(U_1 \cap V_2) \cup (V_1 \cap U_2) \cup (V_1 \cap V_2)] \cap A = \\ &= U \cup (V \cap A) \in T^* \end{aligned}$$

donde $U = U_1 \cap U_2 \in T$ y

$V = (U_1 \cap V_2) \cup (V_1 \cap U_2) \cup (V_1 \cap V_2)$ que también es un abierto de la topología T .

Luego T^* es una topología definida en el conjunto X .

Si hacemos $V = \emptyset$, para todo $U \in T$ resulta:

$$U = U \cup (\emptyset \cap A) \in T^*$$

por lo que siempre es $T \subset T^*$. En caso de que $A \notin T$, al ser $A = \emptyset \cup (X \cap A) \in T^*$ la inclusión $T \subset T^*$ es estricta y es $T \neq T^*$. Si $A \in T$, para todo $U \cup (V \cap A) \in T^*$ es $U \cup - (V \cap A) \in T$ y en este caso las dos topologías son iguales ($T = T^*$).

* * *

1.2. En el conjunto N de los números naturales probar que:

$$T = \{A \subset N \mid \text{Si } 2n+1 \notin A \text{ entonces } 2n, 2n+2 \notin A\}$$

es una topología de N .

SOLUCIÓN.—

1. Veamos en primer lugar que si $\{A_i\}_{i \in I}$ es una familia de partes de N tal que $A_i \in T$ para todo índice $i \in I$, entonces es $\bigcup_{i \in I} A_i \in T$:

Si $2n+1 \notin \bigcup_{i \in I} A_i$ para todo $i \in I$ es $2n+1 \notin A_i$ y en consecuencia $2n, 2n+2 \notin A_i$ cualquiera que sea $i \in I$ y así $2n, 2n+2 \notin \bigcup_{i \in I} A_i$.

Luego, $\bigcup_{i \in I} A_i \in T$.

2. Si $A_1, A_2 \in T$, sea $2n + 1 \notin A_1 \cap A_2$. Si $2n + 1 \notin A_1$ entonces $2n, 2n + 2 \notin A_1$ y por tanto $2n, 2n + 2 \notin A_1 \cap A_2$. Análogamente si $2n + 1 \notin A_2$. Es decir, $A_1 \cap A_2 \in T$.
3. Como para todo $n \in \mathbb{N}$ es $2n, 2n + 1, 2n + 2 \notin \emptyset$ es evidente que $\emptyset \in T$. Asimismo, los conjuntos $\{0, 1, \dots, 2n + 1\} \in T$ para $n \in \mathbb{N}$ arbitrario. Así pues:

$$N = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{0, 1, \dots, 2n + 1\} \in T$$

Luego T es una topología definida sobre N .

* * *

1.3. En el conjunto Z de los números enteros se considera la familia T de partes de Z :

$$T = \{M \subset Z \mid 0 \notin M \text{ ó } Z - M \text{ es finito}\}$$

- a) Probar que (Z, T) es un espacio topológico.
- b) Caracterizar los entornos de 0 y 1 en (Z, T) .
- c) ¿Cumple (Z, T) los axiomas primero y segundo de numerabilidad?

SOLUCIÓN.—

- a) 1. Como $0 \notin \emptyset$ y $Z - Z = \emptyset$ es un conjunto finito, $\emptyset, Z \in T$.
2. Si $\{M_i\}_{i \in I}$ es una familia de conjuntos de T y para todo $i \in I$ es $0 \notin M_i$ entonces

$$0 \notin \bigcup_{i \in I} M_i \text{ y } \bigcup_{i \in I} M_i \in T.$$

Si $0 \in \bigcup_{i \in I} M_i$, sea $I_0 = \{j \in I \mid 0 \in M_j\}$. Como $M_i \in T$ para todo $i \in I$, si $j \in I_0$, $Z - M_j$ es un conjunto finito y así:

$$Z - \bigcup_{i \in I} M_i \subset Z - \bigcup_{j \in I_0} M_j = \bigcap_{j \in I_0} (Z - M_j)$$

Al ser $\bigcap_{j \in I_0} (Z - M_j)$ un conjunto finito, también lo será $Z - \bigcup_{i \in I} M_i$ y en consecuencia, $\bigcup_{i \in I} M_i \in T$.

3. Si $M_1, M_2 \in T$ y $0 \notin M_1 \cap M_2$ entonces $M_1 \cap M_2 \in T$. En el caso en que $0 \in M_1 \cap M_2$, al ser $0 \in M_1$ y $0 \in M_2$ los conjuntos $Z - M_i$ son finitos ($i = 1, 2$) por lo que tenemos:

$$Z - (M_1 \cap M_2) = (Z - M_1) \cup (Z - M_2)$$

y este conjunto es también finito. Luego, $M_1 \cap M_2 \in T$.

- b) Si $V \in E(0)$ existe un abierto M de (Z, T) tal que $0 \in M \subset V$. Por ser $M \in T$ y $0 \in M$, $Z - M$ es un conjunto finito y al ser $Z - V \subset Z - M$, $Z - V$ también es finito. Recíprocamente, si $0 \in V$ y $Z - V$ es finito, $V \in E(0)$ por ser abierto. Por tanto:

$$E(0) = \{V \subset Z | 0 \in V \text{ y } Z - V \text{ es finito}\}$$

Por otra parte, los entorno de 1 quedan definidos como

$$E(1) = \{V \subset Z | 1 \in V\}$$

pues si $0 \notin V$, V es abierto. Asimismo, si $\{0, 1\} \subset V$, se tiene $1 \in V - \{0\} \subset V$ y como $V - \{0\}$ es abierto ($0 \notin V - \{0\}$), $V \in E(1)$.

- c) Veamos que (Z, T) cumple el primer axioma de numerabilidad: Una base de entornos de $n \neq 0$ es la familia $B(n) = \{\{n\}\}$, que es numerable. Una base de entornos de 0 es $B(0) = E(0)$ y como el cardinal de $E(0)$ es menor o igual que el cardinal del conjunto de las partes finitas de Z , es numerable.

Por ser Z un conjunto numerable, la base de T :

$$B = \{\{n\} | n \neq 0\} \cup \{V \subset Z | 0 \in V \text{ y } Z - V \text{ finito}\}$$

es numerable y por tanto (Z, T) cumple el segundo axioma de numerabilidad.

* * *

1.4. En el conjunto R de los números reales se define la familia T de partes de R como:

$$T = \{R\} \cup \mathcal{P}(R - M)$$

donde $M = (1, 3)$.

- a) Probar que (R, T) es un espacio topológico.
- b) Describir una base de entornos de 2 y una base de entornos de 0 en (R, T) .
- c) Estudiar si alguno de los dos puntos 2 y 0 tiene una base de entornos cerrados.

SOLUCIÓN.—

- a) La comprobación de que T es una topología de R es inmediata, por lo que la omitimos.
- b) Como $2 \in M$ el único abierto que contiene al punto 2 es el propio R por lo que $B(2) = \{R\}$.

Al ser $0 \notin M$, si $A \neq R$ es un abierto tal que $0 \in A$ deberá ser $A \subset R - M$, por lo que una base de entornos de 0 es $B(0) = \{\{0\}\}$.

- c) Es evidente que $B(2) = \{R\}$ es una base de entornos cerrados de 2. Por otra parte, si C es un cerrado de (R, T) tal que $0 \in C$ será $M \subset C$ y así, ningún cerrado en estas condiciones puede estar contenido en $\{0\} \in E(0)$. Luego, 0 no tiene ninguna base de entornos cerrados.

* * *

- 1.5.** Sea (X, T) un espacio topológico tal que si $x \in X$ el conjunto $\{x\}$ es cerrado. Probar que la intersección de todos los entornos de x es igual a $\{x\}$.

SOLUCIÓN.—

Consideremos la familia $E(x)$ de todos los entornos de x . Evidentemente, $x \in \bigcap_{V \in E(x)} V$; si $y \neq x$, al ser $\{y\}$ un conjunto cerrado, $X - \{y\}$ es abierto con $x \in X - \{y\}$. Es decir, $X - \{y\}$ es un entorno de x que no contiene a y ; luego $y \notin \bigcap_{V \in E(x)} V$.

En consecuencia:

$$\{x\} = \bigcap_{V \in E(x)} V.$$

Recíprocamente, si la intersección de los entornos de cualquier punto $x \in X$ coincide con $\{x\}$, para todo $y \notin \{x\}$ existe un entorno W de y que no contiene a x ; por lo tanto, $W \subset X - \{x\}$ y así $X - \{x\}$ es abierto y $\{x\}$ será cerrado, cualquiera que sea $x \in X$.

* * *

1.6. Dadas las familias de subconjuntos de $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} B_1 &= \{[a, b] \mid a, b \in \mathbb{R}\} & B_2 &= \{(a, b] \mid a, b \in \mathbb{R}\} \\ B'_1 &= \{[p, q] \mid p, q \in \mathbb{Q}\} & B'_2 &= \{(p, q] \mid p, q \in \mathbb{Q}\} \end{aligned}$$

Probar:

- a) Son base de alguna topología de $\mathbb{R}$.
- b) Si llamamos $T_i = T(B_i)$ y $T'_i = T(B'_i)$ con $i = 1, 2$, es $T_i \neq T'_i$.
- c) Si T_u es la topología usual de $\mathbb{R}$, entonces $T_u = T_1 \cap T_2 = T'_1 \cap T'_2$.

SOLUCIÓN.—

- a) Lo probaremos solamente para B_1 : Sean $[a_1, b_1), [a_2, b_2) \in B_1$ y sea $x \in [a_1, b_1) \cap [a_2, b_2)$. Como $[a_1, b_1) \cap [a_2, b_2) = [a, b) \in B_1$ con

$$a = \max(a_1, a_2); \quad b = \min(b_1, b_2),$$

se tiene $x \in [a, b) \subset [a_1, b_1) \cap [a_2, b_2)$. Como $\mathcal{R} = \bigcap_{a, b \in \mathbb{R}} [a, b)$, B_1 es base de una topología (T_1) de $\mathbb{R}$.

Los restantes casos se demuestran de manera análoga.

- b) Veamos que $T_1 \neq T'_1$ (de igual forma se ve que $T_2 \neq T'_2$): Si $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, entonces $[\alpha, \rightarrow) \in T_1$, mientras que $[\alpha, \rightarrow) \notin T'_1$ ya que es imposible encontrar un conjunto $[p, q) \in B'_1$ tal que $\alpha \in [p, q) \subset [\alpha, \rightarrow)$.

- c) Como sabemos, una base de T_u es $B = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ así como $B' = \{(p, q) \mid (p, q) \in \mathbb{Q}\}$.

Veamos en primer lugar que $T_u \subset T_1 \cap T_2$: Para todo $(a, b) \in B$ es

$$(a, b) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [a + 1/2^n, b) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (a, b - 1/2^n].$$

Luego $(a, b) \in T_1 \cap T_2$. Por otra parte, sea $A \in T_1 \cap T_2$; es decir $A \in T_1$ y $A \in T_2$. Si $x \in A$, existen conjuntos $[a_1, b_1]$ y $(a_2, b_2]$ tales que $x \in [a_1, b_1] \subset A$ y $x \in (a_2, b_2] \subset A$. En consecuencia, $x \in [a_1, b_1] \cup (a_2, b_2] \subset A$ y podemos comprobar que existe un intervalo abierto (a, b) de manera que tenemos $x \in (a, b) \subset A$ (ver Fig. 1) y por lo tanto $A \in T_u$.

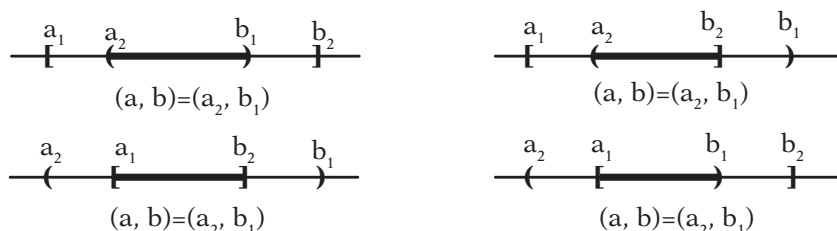


Figura 1

Probamos que $T_u = T'_1 \cap T'_2$ de manera semejante tomando como referencia la base B' de T_u .

* * *

1.7. En el conjunto N de los números naturales se define:

$B = \{A \subset N \mid \text{Para todo } x \in A \text{ existe } n \in N \text{ tal que si } m > n \text{ entonces } m \cdot x \in A\}$.

a) Probar que B es base de una topología T de N .

b) En (N, T) calcular el interior, la adherencia y la frontera de:

$$F = \{2n + 1 \mid n \in N\}$$

$$G = \{n \in N \mid n = 3k \text{ o } n = 5k \text{ (} k \in N \text{)}\}.$$

SOLUCIÓN.—

a) Es obvio que $N \in B$ por lo que resulta inmediato que $\bigcap_{A \in B} A = N$.

Asimismo, dados $A_1, A_2 \in B$ y $x \in A_1 \cap A_2$ existen $n_1, n_2 \in N$ tales que si $m \geq n_1$ entonces $m \cdot x \in A_1$; y $m \cdot x \in A_2$ si $m \geq n_2$. Luego, para $m \geq \max(n_1, n_2)$ es $m \cdot x \in A_1 \cap A_2$; es decir $A_1 \cap A_2 \in B$ y B es base de una topología T de N .

b) Observemos que si $M \in T$, $M \neq \emptyset$ entonces M contiene siempre números pares, por lo que $M \not\subset F$ y es $\overset{\circ}{F} = \emptyset$.

El conjunto $P = \{2n | n \in N\}$ es un conjunto abierto y en consecuencia $F = N - P$ es cerrado y $\bar{F} = F$. Asimismo, $\text{Fr}(F) = \bar{F} - \overset{\circ}{F} = F$.

Por otra parte, el conjunto G es abierto, ya que si $x \in G$ tomando $n = x$ para $m \geq n$ es $m \cdot x \in G$; así, $\overset{\circ}{G} = G$. Si $x \in N - G$ y $A \in B$ con $x \in A$, existe $n \in N$ tal que para $m \geq n$ es $m \cdot x \in A$ y como para todo número natural n existen números $m \geq n$ múltiplos de 3 ó 5, siempre existe $m \geq n$ tal que $m \cdot x \in G$; es decir, $\bar{G} = N$ y será $\text{Fr}(G) = N - G$.

* * *

1.8. Sea $X = \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$; para todo punto $(x, y) \in X$ se define:

$$E(x, y) = \{V \subset X | (tx, ty) \in V, 0 < t < 1\}$$

- a) Probar que $E(x, y)$ es un sistema de entornos de (x, y) para una topología T de X .
- b) Estudiar si (X, T) cumple los axiomas primero y segundo de numerabilidad.
- c) ¿Es (X, T) un espacio separable?
- d) Calcular en (X, T) el interior, la adherencia y la frontera del conjunto:

$$M = \{(x, y) \in X | 0 < x^2 + y^2 \leq 1\}$$

SOLUCIÓN.—

a) Para que $E(x, y)$ sea el sistema de entornos de (x, y) en una topología T de X debe cumplirse:

E. 1. Si $V \in E(x, y)$ entonces $(x, y) \in V$.

E. 2. Si $V \in E(x, y)$ y $V \subset W$ se cumple que $W \in E(x, y)$.

E. 3. Si $V, W \in E(x, y)$ también $V \cap W \in E(x, y)$.

E. 4. Si $V \in E(x, y)$, existe $W \subset V$ tal que $W \in E(x, y)$ y si $(x', y') \in W$ se verifica que $V \in E(x', y')$.

Por la propia definición de la familia $E(x, y)$, E1, E2 y E3 son inmediatas. Para comprobar E4 es suficiente tomar $W = \{(tx, ty) | 0 < t \leq 1\}$ para cualquier $V \in E(x, y)$.

b) Para cada $(x, y) \in X$, una base de entornos del mismo es:

$$B(x, y) = \{(tx, ty) | 0 < t \leq 1\}$$

y por tanto (X, T) cumple el primer axioma de numerabilidad.

Consideremos ahora el conjunto $S = \{(x, y) | x^2 + y^2 = 1\}$ y para cada $(x, y) \in S$ tomemos el abierto de (X, T) :

$$A_{xy} = \{(tx, ty) | 0 < t \leq 1\}$$

Si B es una base de la topología T , para cada elemento $(x, y) \in S$ existe un conjunto $B_{xy} \in B$ tal que $(x, y) \in B_{xy} \subset A_{xy}$. Establezcamos así una aplicación:

$$\sigma : S \rightarrow B$$

de manera que $\sigma(x, y) = B_{xy} \in B$, donde B_{xy} está elegido entre aquellos que cumplen $(x, y) \in B_{xy} \subset A_{xy}$. Para $(x', y') \neq (x, y)$ en S se tiene $A_{x'y'} \cap A_{xy} = \emptyset$, por lo que $B_{x'y'} \neq B_{xy}$ y σ es una aplicación inyectiva y así, $\text{Card}(S) \leq \text{Card}(B)$. Como S es un conjunto no numerable, tampoco lo puede ser B por lo que (X, T) no cumple el segundo axioma de numerabilidad.

c) Consideremos los conjuntos $\{A_k\}_{k \in \mathbb{R}}$ donde:

$$A_k = \{(x, y) | y = kx\} \cap X$$

que son abiertos en (X, T) . Si D es denso en todo el espacio X para cada $k \in \mathbb{R}$, $A_k \cap D \neq \emptyset$, y como los conjuntos A_k son

disjuntos dos a dos el conjunto: $\{x_k \in X | x_k \in A_k \cap D\}$ es no numerable, por lo que tampoco lo es D y el espacio (X, T) no es separable.

- d) Se comprueba fácilmente que $\overset{\circ}{M} = M$, $\overline{M} = X$ y $\text{Fr}(M) = \{(x, y) | x^2 + y^2 > 1\}$.

* * *

- 1.9.** Probar que en $(\mathbb{R}, T_u)$ no existe ninguna familia numerable de abiertos $\mathcal{V}$ tal que si A es abierto y $Z \subset A$ existe $V \in \mathcal{V}$ que cumple $Z \subset V \subset A$.

SOLUCIÓN.—

Sea una familia numerable de abiertos:

$$\mathcal{V} = \{V_0, V_1, \dots, V_n, \dots\}$$

tales que para todo $n \in \mathbb{N}$, $Z \subset V_n$. Vamos a ver que $\mathcal{V}$ no cumple la condición exigida:

Como $0 \in V_0$ existe ε_0 tal que $0 < \varepsilon_0 < 1/3$ con $(-\varepsilon_0, \varepsilon_0) \subset V_0$. Asimismo, existe ε_1 con $0 < \varepsilon_1 < 1/3$ y $(1 - \varepsilon_1, 1 + \varepsilon_1) \subset V_1$; así sucesivamente, para cada número natural n existe ε_n verificando $0 < \varepsilon_n < 1/3$, $(n - \varepsilon_n, n + \varepsilon_n) \subset V_n$.

Ahora, el abierto:

$$A = (\leftarrow, -2/3) \cup \left[\bigcap_{n \in \mathbb{N}} (n - \varepsilon_n/2, n + \varepsilon_n/2) \right]$$

es tal que $Z \subset A$ mientras que para todo número natural n se cumple que $V_n \not\subset A$.

* * *

- 1.10.** En $X = \mathbb{R}^2$ se considera la topología T cuya sub-base es:

$$S = \{ \{ (x, y) | y = k \} | k \in \mathbb{R} \} \cup \{ \{ (0, y) | y \in \mathbb{R} \} \}$$