ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

Al principio del siglo XX las necesidades del análisis condujeron a los matemáticos a extender nociones definidas para los números reales, como límite y entorno, a otros objetos muy diferentes. Fue el matemático francés Maurice Fréchet (1878-1973) quien descubrió, en 1906 (véase N., pág. 200), una estructura muy sencilla y totalmente general, la estructura de espacio métrico, que permitía extender estas nociones a otros objetos, como vectores, funciones, curvas, etc.

Este tema contiene la definición de espacio métrico, y otras definiciones de suma importancia. Es, por tanto, un tema fundamental para el desarrollo y comprensión de los demás temas y por esta razón no debe el estudiante pasar al siguiente tema sin haber alcanzado, mínimamente, cada uno de los objetivos que se enumeran a continuación.

OBJETIVOS

1. Comprender el concepto de distancia, teniendo presente que se pueden dar casos tan diferentes como la distancia discreta y la euclídea.
2. Entender qué es una bola abierta y qué es un conjunto abierto, teniendo presente que se pueden dar casos muy diferentes.
3. Conocer la relación entre conjunto abierto y conjunto cerrado.
4. Saber calcular si dos distancias son equivalentes.
5. Conocer en qué posición puede estar situado un punto $x \in E$ respecto de un conjunto A.
6. Aprender a probar si una sucesión es convergente, o no es convergente, con la notación de ε y n_0.
7. Entender qué significa que Q es denso en $\{R, d_e\}$ y por qué Q tiene cardinal infinito numerable y R no.
8. Saber qué es un conjunto acotado.

ESPACIOS MÉTRICOS

Definición 1

Dado un conjunto no vacío E, se dice que una función $d: E \times E \to R$ es una distancia si verifica las siguientes propiedades:

I. $d(x, y) \geqslant 0$ para todo $x, y \in E$.

II. $d(x, y) = 0$ si y sólo si $x = y$.

III. $d(x, y) = d(y, x)$ para todo $x, y \in E$.

IV. $d(x, y) \leqslant d(x, z) + d(z, y)$ para todo $x, y, z \in E$.

Cada conjunto E dotado de una distancia d forma un espacio métrico, que se denota por $\{E, d\}$.

OBSERVACIÓN 1

La distancia natural en la recta real es la definida por el valor absoluto, esto es $d(x, y) = |x - y|$. Esta función verifica trivialmente las propiedades I, II y III y la propiedad IV se prueba así:

$$d(x, y) = |x - y| = |x - z + z - y| \leqslant |x - z| + |z - y| = d(x, z) + d(z, y)$$

Pero observe que en la definición anterior el conjunto E sólo debe cumplir la condición de ser no vacío. Por lo tanto se pueden definir distancias sobre partes de R y sobre conjuntos tan poco matemáticos como los habitantes de Navacepedilla de Corneja. Además, si compara el significado de la palabra distancia con la definición matemática de distancia, observará que las propiedades que se exigen a la función d son bastante elementales: I) que la distancia tome siempre un valor positivo, II) que entre dos puntos distintos haya una distancia estrictamente mayor que cero y además que la distancia de cada punto a sí mismo sea cero, III) que la distancia entre x e y no dependa de si se mide desde x o desde y, y finalmente, la propiedad IV) que es conocida con el nombre de **desigualdad triangular** porque hace referencia a la figura 1.

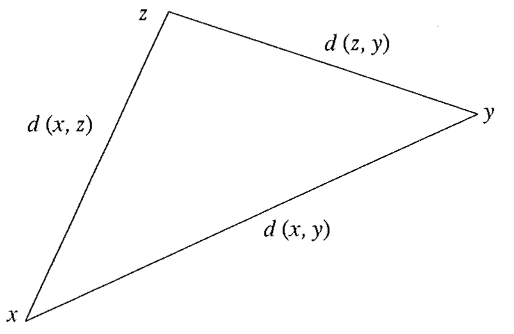

FIGURA 1. Desigualdad triangular.

Esta propiedad significa que la distancia entre dos puntos x e y debe ser menor o igual que si se suma la distancia de x a un tercer punto z y la distancia de este punto z a y.

Como verá en el ejercicio 2, la función que usamos para medir, por ejemplo, los kilómetros de Albacete a Tortosa, cumple las cuatro propiedades descritas. Esta distancia es conocida con el nombre de distancia euclídea y en los temas IV y VI verá otras propiedades adicionales que verifica esta distancia.

En el ejercicio 1 se estudia la distancia discreta, es decir, la función más simple que cumple las cuatro propiedades. Esta distancia pone de manifiesto lo poco exigentes que son las condiciones que se le piden a la función d. Tanto es así, que la distancia discreta no sirve para medir, sólo sirve para saber si dos puntos son iguales o son distintos.

A lo largo del libro se van introduciendo otros ejemplos de distancias. Los ejemplos que más se utilizan aparecen recogidos en la tabla de la página 365.

EJERCICIO 1

Dado un conjunto no vacío E, se define la **distancia discreta** como:

$$\begin{aligned} d_0 : E \times E &\to \quad R \\ (x, y) &\to \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \neq y \\ 0 & \text{si} \quad x = y \end{cases} \end{aligned}$$

Pruebe que d_0 verifica las cuatro propiedades de la definición 1.

Sugerencia: *Este ejercicio debería resultarle muy fácil. Sólo debe poner un poco más de atención para probar la propiedad IV. Distinguir casos posibles le ayudará.*

Solución

Propiedad I: por definición la distancia discreta vale 0 o vale 1.

Propiedad II: por definición $d_0(x, y) = 0$ si y sólo si $x = y$.

Propiedad III: obviamente sólo es necesario probar esta propiedad para $x \neq y$. En este caso, por definición, $d_0(x, y) = 1 = d_0(y, x)$.

Como vemos las propiedades I, II y III se deducen trivialmente de la definición. Esta circunstancia sucede a menudo. Por esta razón, de ahora en adelante, no repetiremos pruebas tan simples como las anteriores. Nos limitaremos a decir que la propiedad tal se deduce directamente de la definición.

Propiedad IV: la desigualdad $d_0(x, y) \leqslant d_0(x, z) + d_0(y, z)$ es trivial si $x = y$, porque a la izquierda de la desigualdad aparece el valor 0. Si $x \neq y$, entonces $d_0(x, y) = 1$ y como z no puede ser a la vez igual a x y a y, al menos una de las dos distancias, $d_0(x, z)$ o $d_0(y, z)$, toma también el valor 1, por lo tanto a la derecha de la desigualdad aparecerá el valor 1 o el valor 2, lo cual implica que en este caso también se verifica la desigualdad triangular.

EJERCICIO 2

En R^2 se define la función:

$$\begin{array}{llcl} d_e : & R^2 \times R^2 & \to & R \\ & ((x_1, x_2), (y_1, y_2)) & \to & \sqrt[2]{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} \end{array}$$

Pruebe que esta función es una distancia.

Sugerencia: *Todas las propiedades se prueban sin dificultad excepto la IV. Puede probar IV operando (tomando cuadrados, desarrollando binomios y simplificando, cuándo y dónde sea necesario) pero no se lo aconsejo. Le resultará más fácil probar IV si utiliza la siguiente desigualdad, cuya prueba requiere muchas menos operaciones:*

$$\sqrt{(a + b)^2 + (c + d)^2} \leqslant \sqrt{a^2 + c^2} + \sqrt{b^2 + d^2}$$

Después de estudiar el tema VI entenderá mejor que relación hay entre la distancia euclídea y esta desigualdad, llamada desigualdad de Minkowski (Tema VI, Proposición 1).

Solución

La propiedad I se deduce directamente de la definición. Para probar II razonamos de la siguiente manera:

$$d_e((x_1, x_2), (y_1, y_2) = 0 \text{ si y sólo si } \sqrt[2]{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} = 0 \text{ si y sólo si}$$
$$(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 = 0 \text{ si y sólo si } (x_1 - y_1)^2 = 0$$
$$\text{y } (x_2 - y_2)^2 = 0 \text{ si y sólo si } x_1 = y_1 \text{ y } x_2 = y_2 \text{ si y sólo si } (x_1, x_2) = (y_1, y_2)$$

La propiedad III se verifica porque $(x_1 - y_1)^2 = (y_1 - x_1)^2$ y lo mismo sucede con las segundas coordenadas.

La desigualdad triangular se deduce de la siguiente desigualdad:

$$\sqrt{(a + b)^2 + (c + d)^2} \leqslant \sqrt{a^2 + c^2} + \sqrt{b^2 + d^2} \qquad (*)$$

que es cierta para cualesquiera números reales a, b, c, d. Para probar esta desigualdad tomamos cuadrados a ambos lados de la desigualdad y desarrollamos los términos que quedan, obteniendo:

$$a^2 + b^2 + 2ab + c^2 + d^2 + 2cd \leqslant a^2 + b^2 + d^2 + c^2 + 2\sqrt{a^2 + c^2}\,\sqrt{b^2 + d^2}$$

Después de simplificar llegamos a:

$$ab + cd \leqslant \sqrt{a^2 + c^2}\,\sqrt{b^2 + d^2}$$

Si volvemos a elevar al cuadrado obtenemos:

$$a^2b^2 + c^2d^2 + 2abcd \leqslant a^2b^2 + a^2d^2 + c^2b^2 + c^2d^2$$

que simplificando de nuevo se convierte en:

$$2abcd \leqslant a^2d^2 + c^2b^2$$

Esta última desigualdad es equivalente a la siguiente:

$$0 \leqslant (ad - cb)^2 \text{ para todo } a, b, c, d \in R$$

Ahora, para probar la desigualdad triangular razonamos de la siguiente manera:

$$d_e((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \sqrt[2]{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} =$$
$$\sqrt[2]{(x_1 - z_1 + z_1 - y_1)^2 + (x_2 - z_2 + z_2 - y_2)^2}$$

Aplicamos en la última expresión la desigualdad (*) a los números

$$a = (x_1 - z_1),\ b = (z_1 - y_1),\ c = (x_2 - z_2) \text{ y } d = (z_2 - y_2)$$

obteniendo:

$$d_e((x_1, x_2), (y_1, y_2)) \leqslant \sqrt[2]{(x_1 - z_1)^2 + (x_2 - z_2)^2} + \sqrt[2]{(z_1 - y_1)^2 + (z_2 - y_2)^2} =$$
$$d_e((x_1, x_2), (z_1, z_2)) + d_e((z_1, z_2), (y_1, y_2))$$

lo cual demuestra que d_e es una distancia.

Esta distancia recibe el nombre de **distancia euclídea o distancia canónica,** porque es la distancia que habitualmente se utiliza en el plano. Si dibujamos en el plano los puntos (x_1, x_2) y (y_1, y_2) y trazamos el segmento que los une, como se hace en la figura 2, observamos que, por el teorema de Pitágoras, la longitud de la hipotenusa del triángulo rectángulo dibujado es

$$\sqrt[2]{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2}$$

es decir, que la distancia entre los puntos (x_1, x_2) y (y_1, y_2) coincide con la longitud del segmento que los une.

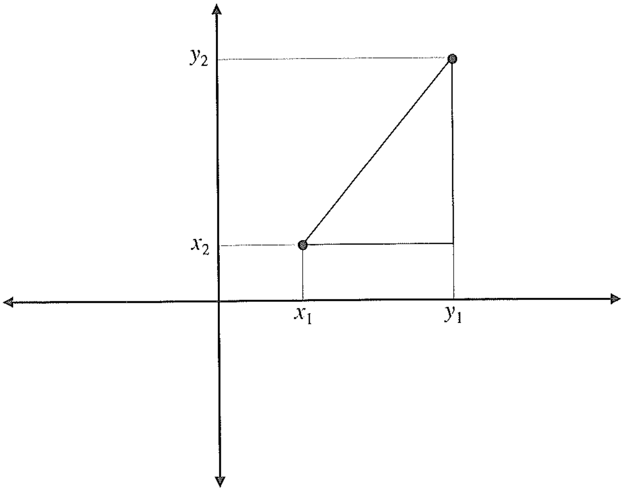

FIGURA 2. Distancia euclídea en el plano.

De forma análoga, se define en R^3 la distancia euclídea a través de la función:

$$\begin{array}{llll} d_e: & R^3 \times R^3 & \to & R \\ & ((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) & \to & \sqrt[2]{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2} \end{array}$$

de nuevo usando triángulos rectángulos, como se muestra en la figura 3, se puede ver como esta distancia coincide con la longitud del segmento en R^3 que une los puntos (x_1, x_2, x_3) e (y_1, y_2, y_3).

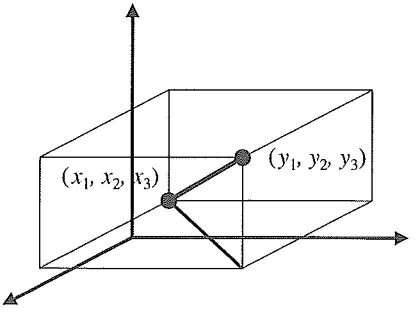

FIGURA 3. Distancia euclídea en el espacio.

Observemos que si se utiliza este tipo de función para definir una distancia en la recta real, se obtiene la distancia usual en R; esto es:

$$d_e(x, y) = \sqrt{(x - y)^2} = |x - y|$$

En conclusión, para todo $n \geqslant 1$ se define la distancia euclídea en R^n como:

$$d_e((x_1, ..., x_n), (y_1, ..., y_n)) = \sqrt[2]{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}$$

EJERCICIO 3

Sea E un subconjunto no vacío contenido en $C[0, 1] = \{f : [0, 1] \to R;$ continuas$\}$. Estudie si las siguientes funciones son distancias en E:

$$d_\infty(f, g) = \text{máx}\,\{|f(t) - g(t)|;\ t \in [0, 1]\}$$

$$d_1(f, g) = \int_0^1 |f(t) - g(t)|\, dt$$

Sugerencia: *Para resolver este ejercicio necesita utilizar las propiedades de las funciones continuas y de la integral que estudió en el curso de Análisis Matemático I. Ponga especial cuidado en la propiedad II de* d_1.

Solución

Empecemos por d_∞. Antes observemos que en muchos libros de texto (por ejemplo en **L.** pág. 116) la distancia d_∞ se define así:

$$d_\infty(f, g) = \sup\{|f(t) - g(t)|;\ t \in [0, 1]\}$$

Las dos definiciones coinciden; es decir, el supremo de los valores $\{|f(t) - g(t)|;\ t \in [0, 1]\}$ se alcanza en algún punto $t_0 \in [0, 1]$ y por lo tanto se puede hablar de máximo. Esto sucede porque la función $|f - g|$ es continua y porque el supremo se toma sobre los t del intervalo $[0, 1]$ (véase **F.** pág 184).

Las propiedades I y III se deducen directamente de la definición. Para probar II razonamos de la siguiente manera (***el símbolo*** $\Leftrightarrow$ ***significa «si y sólo si»***):

$$\begin{gathered} d_\infty(f, g) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \text{máx}\{|f(t) - g(t)|;\ t \in [0, 1]\} = 0 \quad \Leftrightarrow \\ |f(t) - g(t)| = 0 \text{ para todo } t \in [0, 1] \quad \Leftrightarrow \\ f(t) = g(t) \text{ para todo } t \in [0, 1] \quad \Leftrightarrow \quad f = g \end{gathered}$$

Finalmente, probamos que d_∞ verifica la desigualdad triangular y por lo tanto que es una distancia:

$$\begin{gathered} d_\infty(f, g) = \text{máx}\{|f(t) - g(t)|;\ t \in [0, 1]\} = \\ \text{máx}\{|f(t) - h(t) + h(t) - g(t)|;\ t \in [0, 1]\} \leqslant \\ \text{máx}\{|f(t) - h(t)| + |h(t) - g(t)|;\ t \in [0, 1]\} \end{gathered}$$

como el máximo de una suma es menor o igual que si se considera el máximo de cada expresión y luego se suman los dos máximos, resulta que

$$\begin{gathered} \text{máx}\{|f(t) - h(t)| + |h(t) - g(t)|;\ t \in [0, 1]\} \leqslant \\ \text{máx}\{|f(t) - h(t)|;\ t \in [0, 1]\} + \text{máx}\{|h(t) - g(t)|;\ t \in [0, 1]\} = d_\infty(f, h) + d_\infty(h, g) \end{gathered}$$

Para la función d_1, las propiedades I y III se deducen directamente de la definición. Para probar II razonamos de la siguiente manera:

$$d_1(f, g) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \int_0^1 |f(t) - g(t)|\, dt = 0 \quad \Leftrightarrow \quad |f - g| = 0$$

la última equivalencia es debida a la continuidad de la función $|f - g|$. Recordemos que si una función h: $[a, b] \to R$ es continua y positiva ($h(t) \geqslant 0$ para todo $t \in [a, b]$), entonces la igualdad

$$\int_a^b h(t)\, dt = 0$$