

ÍNDICE

Prólogo.....	9
Geometría de masas.....	11
Cinemática.....	69
Estática	193
Dinámica.....	273
Percusiones.....	411
Mecánica analítica	455
Bibliografía.....	551

1. X e Y son los ejes principales de inercia en el centro de masas G de un sistema plano de 2 kg de masa. Se sabe que:

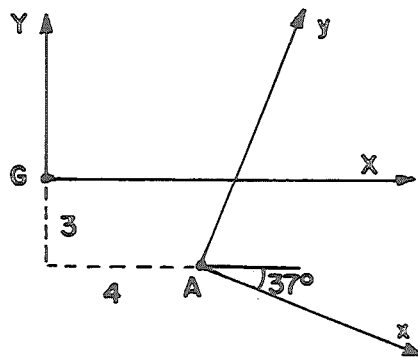
$$I_X = 10 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \quad I_Y = 20 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

Se pide:

1.º) Tensor de inercia en A .

2.º) I_x, I_y .

3.º) Ecuación de la elipse de inercia de centro en A .



1.º) *Tensor de inercia en A*

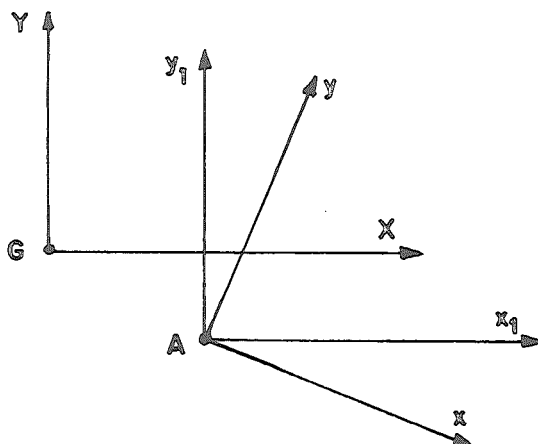
Calculamos primero los momentos y producto de inercia respecto a los ejes x_1, y_1 , paralelos a los X, Y , en A , mediante el teorema de Steiner:

$$I_X = 10 \quad I_Y = 20 \quad P_{XY} = 0$$

$$I_{x_1} = I_X + md_1^2 = 10 + 2 \cdot 3^2 = 28 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$I_{y_1} = I_Y + md_2^2 = 20 + 2 \cdot 4^2 = 52 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$P_{x_1y_1} = P_{XY} + md_1d_2 = 0 + 2 \cdot (-4) \cdot 3 = -24 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$



El tensor de inercia referido a estos ejes será:

$$\bar{\bar{I}}_A = \begin{vmatrix} I_{x_1} & -P_{x_1 y_1} \\ -P_{x_1 y_1} & I_{y_1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 28 & 24 \\ 24 & 52 \end{vmatrix}$$

2.º) I_x, I_y

El momento de inercia respecto a un eje que pasa por A y forma un ángulo θ con el eje x_1 en sentido antihorario es:

$$I_\delta = I_{x_1} \cos^2 \theta + I_{y_1} \sin^2 \theta - 2P_{x_1 y_1} \sin \theta \cos \theta$$

Sustituyendo los valores se tiene para este caso:

$$I_x = I_{x_1} \cos^2 (-37^\circ) + I_{y_1} \sin^2 (-37^\circ) - 2P_{x_1 y_1} \sin (-37^\circ) \cos (-37^\circ) = 13,6 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$I_y = I_{x_1} \cos^2 53^\circ + I_{y_1} \sin^2 53^\circ - 2P_{x_1 y_1} \sin 53^\circ \cos 53^\circ = 66,4 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

Se podría haber hecho en forma matricial:

$$I_\delta = \bar{u}^t \cdot \bar{\bar{I}}_A \cdot \bar{u}$$

siendo $\bar{u}$ el unitario en la dirección del eje.

$$I_x = \begin{vmatrix} \cos 37^\circ & -\sin 37^\circ \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 28 & 24 \\ 24 & 52 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \cos 37^\circ \\ -\sin 37^\circ \end{vmatrix} = 13,6 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$I_y = \begin{vmatrix} \cos 53^\circ & \sin 53^\circ \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 28 & 24 \\ 24 & 52 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \cos 53^\circ \\ \sin 53^\circ \end{vmatrix} = 66,4 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

3.º) *Elipse de inercia en A*

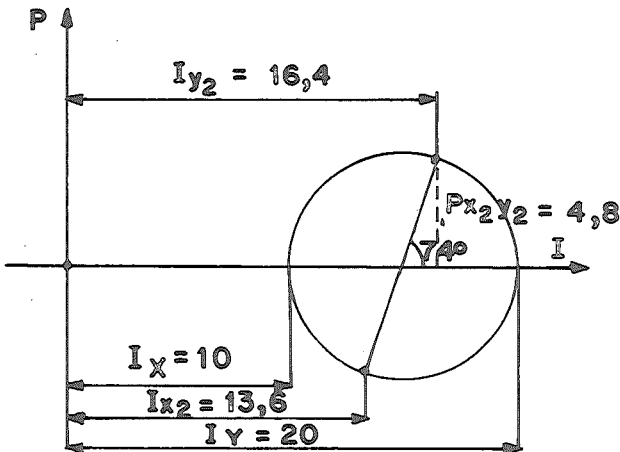
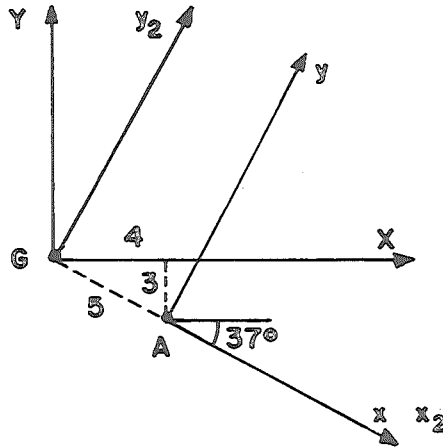
Referida a los ejes x_1, y_1 , será:

$$K^2 = 1 = I_{x_1}\xi^2 + I_{y_1}\eta^2 - 2P_{x_1y_1}\xi\eta = 28\xi^2 + 52\eta^2 + 48\xi\eta$$

donde hemos tomado $K = 1$

Otro método

Podemos calcular primero los momentos y el producto de inercia respecto a unos ejes x_2, y_2 , paralelos a los x, y , con origen en G. Puede hacerse como en el caso anterior o mediante el círculo de *Mohr*. Aquí lo haremos siguiendo lo segundo.



Los momentos principales I_X, I_Y , se representan en el eje de abscisas y son los extremos del círculo. Haciendo la figura a escala, se hallan gráficamente los valores de $I_{x_2}, I_{y_2}, P_{x_2y_2}$. También se pueden obtener de las relaciones:

$$I_{x_2} = \frac{I_Y + I_X}{2} - \frac{I_Y - I_X}{2} \cos 2\theta = \frac{20+10}{2} - \frac{20-10}{2} \cos(2 \cdot 37^\circ) = 13,6 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$I_{y_2} = \frac{I_Y + I_X}{2} + \frac{I_Y - I_X}{2} \cos 2\theta = \frac{20+10}{2} + \frac{20-10}{2} \cos(2 \cdot 37^\circ) = 16,4 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$P_{x_2y_2} = \frac{I_Y - I_X}{2} \sin 2\theta = \frac{20-10}{2} \sin(2 \cdot 37^\circ) = 4,8 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

Conocidos estos valores, aplicamos los teoremas de Steiner:

$$I_x = I_{x_2} + mD_1^2 = 13,6 + 2 \cdot 0^2 = 13,6 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$I_y = I_{y_2} + mD_2^2 = 16,4 + 2 \cdot 5^2 = 66,4 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$P_{xy} = P_{x_2y_2} + mD_1D_2 = 4,8 + 2 \cdot 0 \cdot 5 = 4,8 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

Con estos valores ya podemos contestar todos los apartados, aunque el tensor de inercia y la elipse de inercia los deberemos referir a los ejes x, y . Para referirlos a los x_1, y_1 , como se hizo anteriormente, deberíamos calcular previamente $I_{x_1}, I_{y_1}, P_{x_1y_1}$, y esto resulta mucho más cómodo por el primer método.

Se haría:

$$I_{x_1} = I_x \cos^2 37^\circ + I_y \sin^2 37^\circ - 2P_{xy} \sin 37^\circ \cos 37^\circ = 28 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$I_{y_1} = I_x \cos^2 127^\circ + I_y \sin^2 127^\circ - 2P_{xy} \sin 127^\circ \cos 127^\circ = 52 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$P_{xy} = -(I_{y_1} - I_{x_1}) \sin \theta \cos \theta + P_{x_1y_1} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \rightarrow P_{x_1y_1} = -24 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

2. El tensor de inercia de un sistema plano en unos ejes x, y , que contienen al c.d.g. es:

$$\begin{vmatrix} m\rho_x^2 & 0 \\ 0 & m\rho_y^2 \end{vmatrix} \quad \begin{array}{l} m \equiv \text{masa total del sistema} \\ \rho_x, \rho_y \equiv \text{radios de giro} \end{array}$$

1.º) Demostrar que la elipse central de inercia puede representarse por la ecuación

$$\frac{\xi^2}{(1/\rho_x)^2} + \frac{\eta^2}{(1/\rho_y)^2} = 1 \quad (\xi, \eta) \in \text{elipse de inercia}$$

2.º) Sean X, Y , unos ejes cualesquiera para los que se cumple:

$$I_X = m(\rho_x^2 + \lambda\rho_y^2) \quad P_{XY} = m\mu(\rho_y^2 - \rho_x^2)$$

Si ambos ejes son perpendiculares y pasan por el c.d.g., demostrar que $\lambda \in (-^\circ, 1)$ y que $\mu \in (-1/2, 1/2)$.

3.º) X_1 contiene al punto $(0, -\sqrt{2})$ y al vector $3\bar{i} - 4\bar{j}$. Hallar I_{X_1} .

4.º) Siendo $\rho_x > \rho_y$, justifique que si s es una recta que forma un ángulo ϕ con el eje x , en sentido antihorario, sucede que:

a) I_s decrece si $\phi < \pi/2$.

b) I_s crece si $\phi > \pi/2$.

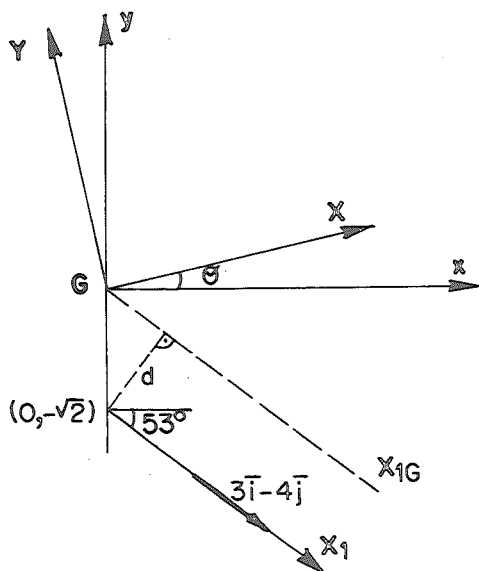
1.º) De la matriz de inercia que nos da el enunciado, se ve que $P_{xy} = 0$. Esto nos dice que los ejes x, y , son los principales de inercia.

Además:

$$I_x = m\rho_x^2 \quad I_y = m\rho_y^2$$

La elipse central de inercia tiene centro en G , siendo su ecuación, referida a unos ejes coincidentes con las direcciones principales:

$$I_1\xi^2 + I_2\eta^2 = K^2$$



Como en este caso x e y son los ejes principales, se tiene:

$$I_1 = I_x \quad I_2 = I_y$$

Por tanto:

$$I_x \xi^2 + I_y \eta^2 = K^2 \rightarrow \frac{\xi^2}{1/I_x} + \frac{\eta^2}{1/I_y} = K^2$$

Sustituyendo I_x e I_y y haciendo $K = \sqrt{m}$,

$$\frac{\xi^2}{1/m\rho_x^2} + \frac{\eta^2}{1/m\rho_y^2} = K^2 \rightarrow \frac{\xi^2}{(1/\rho_x)^2} + \frac{\eta^2}{(1/\rho_y)^2} = \frac{K^2}{m} = 1$$

que es lo que teníamos que demostrar.

2.º) Sean los ejes X, Y , indicados en la figura, que forman un ángulo θ con los x, y , en sentido antihorario. Se tiene:

$$I_X = I_x \cos^2 \theta + I_y \sin^2 \theta - P_{xy} \sin 2\theta = m\rho_x^2 \cos^2 \theta + m\rho_y^2 \sin^2 \theta$$

Como nos dicen que $I_X = m(\rho_x^2 + \lambda\rho_y^2)$, identificamos

$$\begin{aligned} m(\rho_x^2 + \lambda\rho_y^2) &= m(\rho_x^2 \cos^2 \theta + \rho_y^2 \sin^2 \theta) \rightarrow \lambda = \frac{\rho_x^2 \cos^2 \theta + \rho_y^2 \sin^2 \theta - \rho_x^2}{\rho_y^2} = \\ &= \frac{\rho_y^2 \sin^2 \theta - \rho_x^2 (1 - \cos^2 \theta)}{\rho_y^2} = \frac{(\rho_y^2 - \rho_x^2) \sin^2 \theta}{\rho_y^2} = \left(1 - \frac{\rho_x^2}{\rho_y^2}\right) \sin^2 \theta \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que $0 \leq \sin^2 \theta \leq 1$, la variación de λ será entre

$$\begin{aligned} \lambda &= -1 & \text{para } \rho_y &= 0 \\ \lambda &= 1 & \text{para } \rho_x &= 0 \end{aligned}$$

Por tanto: $\lambda \in (-1, 1]$.

También se podía haber hecho a partir de I_Y .

$$I_Y = I_x \cos^2 (\pi/2 + \theta) + I_y \sin^2 (\pi/2 + \theta) = I_x \sin^2 \theta + I_y \cos^2 \theta$$

Sumando miembro a miembro a I_X , y teniendo en cuenta que

$$\begin{aligned} I_X + I_Y &= I_x + I_y \rightarrow m(\rho_x^2 + \lambda\rho_y^2) + I_y = m(\rho_x^2 + \rho_y^2) \rightarrow I_Y = (1 - \lambda)m\rho_y^2 \\ I_Y &\geq 0 \rightarrow 1 - \lambda \geq 0 \rightarrow \lambda \leq 1 \end{aligned}$$

Para demostrar que $\mu \in (-1/2, 1/2)$, partimos del producto de inercia P_{XY} .

$$P_{XY} = \frac{I_y - I_x}{2} \sin 2\theta \rightarrow \frac{m\rho_y^2 - m\rho_x^2}{2} \sin 2\theta = m\mu(\rho_y^2 - \rho_x^2) \rightarrow \mu = 1/2 \sin 2\theta$$

Y como $-1 \leq \sin 2\theta \leq 1 \rightarrow -1/2 \leq \mu \leq 1/2$.

3.º) Calculamos primero el momento respecto a un eje paralelo a X_1 que pase por G.

$$I_{X_{1G}} = I_x \cos^2(-53^\circ) + I_y \sin^2(-53^\circ) = \frac{m}{25}(9\rho_x^2 + 16\rho_y^2)$$

Aplicamos el teorema de Steiner, con $d = \sqrt{2} \cos 53^\circ = \frac{3\sqrt{2}}{5}$:

$$I_{X_1} = I_{X_{1G}} + md^2 = \frac{m}{25}(9\rho_x^2 + 16\rho_y^2) + m\frac{18}{25} = \frac{m}{25}(9\rho_x^2 + 16\rho_y^2 + 18)$$

$$4.º) I_s = I_x \cos^2 \phi + I_y \sin^2 \phi = m\rho_x^2 \cos^2 \phi + m\rho_y^2 \sin^2 \phi$$

Derivando esta expresión con respecto a ϕ :

$$\frac{\partial I_s}{\partial \phi} = -2m\rho_x^2 \sin \phi \cos \phi + 2m\rho_y^2 \sin \phi \cos \phi = m \sin 2\phi (\rho_y^2 - \rho_x^2)$$

$$\rho_x > \rho_y \rightarrow \begin{cases} 0 < \phi < \pi/2 \rightarrow \sin 2\phi > 0 \rightarrow \frac{\partial I_s}{\partial \phi} < 0 \rightarrow I_s \text{ decrece al aumentar } \phi \\ \pi/2 < \phi < \pi \rightarrow \sin 2\phi < 0 \rightarrow \frac{\partial I_s}{\partial \phi} > 0 \rightarrow I_s \text{ crece al aumentar } \phi \end{cases}$$

$$3. \quad \xi^2 + \frac{\eta^2}{2} + \frac{\zeta^2}{3} = \frac{1}{ma^2} \text{ es el elipsoide central de inercia de un cuerpo}$$

de masa m respecto a unos ejes X, Y, Z . P es un punto de coordenadas $(a, -a/2, -a)$ respecto a los ejes anteriores; $\{x, y, z\}$, es un triedro centrado en P y paralelo al $\{X, Y, Z\}$. Hallar:

— Valor de a para que el momento de inercia respecto a un eje que pasa por P y forma ángulos iguales con los x, y, z , coincida numéricamente con la masa.

El elipsoide central de inercia referido a unos ejes coincidentes con las direcciones principales, y con $k = 1$, tiene por ecuación:

$$I_x \xi^2 + I_y \eta^2 + I_z \zeta^2 = 1$$

Operando en la ecuación que nos dan, se puede poner en la forma:

$$ma^2 \xi^2 + \frac{1}{2} ma^2 \eta^2 + \frac{1}{3} ma^2 \zeta^2 = 1$$

de donde, identificando, resulta:

$$I_X = ma^2 \quad I_Y = \frac{1}{2}ma^2 \quad I_Z = \frac{1}{3}ma^2$$

Tomamos un sistema de coordenadas con origen en P y ejes paralelos a los X, Y, Z . Los llamamos x, y, z . Las coordenadas de G respecto a estos nuevos ejes serán: $G(-a, a/2, a)$.

El momento de inercia respecto a una recta δ que pase por P , y forme ángulos α, β y γ con los ejes x, y, z , es:

$$I_\delta = I_x \cos^2 \alpha + I_y \cos^2 \beta + I_z \cos^2 \gamma - 2P_{xy} \cos \alpha \cos \beta - \\ - 2P_{xz} \cos \alpha \cos \gamma - 2P_{yz} \cos \beta \cos \gamma$$

Calcularemos los momentos y productos de inercia mediante los teoremas de Steiner.

$$I_x = I_X + md_x^2 = ma^2 + m(y_G^2 + z_G^2) = ma^2 + m(a^2/4 + a^2) = \frac{9}{4}ma^2$$

$$I_y = I_Y + md_y^2 = \frac{1}{2}ma^2 + m(x_G^2 + z_G^2) = \frac{1}{2}ma^2 + m(a^2 + a^2) = \frac{5}{2}ma^2$$

$$I_z = I_Z + md_z^2 = \frac{1}{3}ma^2 + m(x_G^2 + y_G^2) = \frac{1}{2}ma^2 + m(a^2 + a^2/4) = \frac{19}{12}ma^2$$

$$P_{xy} = P_{XY} + md_x d_y = 0 + m(-a) \cdot a/2 = -\frac{1}{2}ma^2$$

$$P_{xz} = P_{XZ} + md_x d_z = 0 + m(-a) \cdot a = -ma^2$$

$$P_{yz} = P_{YZ} + md_y d_z = 0 + m \cdot a/2 \cdot a = \frac{1}{2}ma^2$$

ya que $P_{XY} = P_{XZ} = P_{YZ} = 0$, por ser X, Y, Z , las direcciones principales.

Como $\alpha = \beta = \gamma$ se tiene:

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1 \rightarrow 3\cos^2 \alpha = 1 \rightarrow \cos \alpha = \cos \beta = \cos \gamma = 1/\sqrt{3}$$

donde se han tomado sólo los valores positivos de las raíces. Sustituyendo:

$$I_\delta = \frac{9}{4}ma^2 \frac{1}{3} + \frac{5}{2}ma^2 \frac{1}{3} + \frac{19}{12}ma^2 \frac{1}{3} + 2\frac{ma^2}{2} \frac{1}{3} + 2ma^2 \frac{1}{3} - 2\frac{ma^2}{2} \frac{1}{3} = \frac{25}{9}ma^2$$

Como:

$$I_\delta = m \rightarrow \frac{25}{9}ma^2 = m \rightarrow a = 3/5$$

4. Sea una varilla homogénea de longitud a , y densidad λ kg/m. Se divide a la mitad obteniendo dos trozos. El izquierdo se vuelve a dividir a la mitad, con lo que la parte izquierda tendrá ahora una longitud $a/4$, y la derecha $3a/4$. Se repite la operación « n » veces, hasta que el momento de inercia del conjunto formado por ambos trozos respecto a un eje perpendicular a la varilla por el c.d.g. del trozo izquierdo sea mayor que $\lambda a^3/4$. Hallar:

1.º) Valor mínimo de n para el que ocurre.

2.º) Momentos de inercia máximo y mínimo del conjunto respecto a dicho eje y valores de n para los que se obtienen.

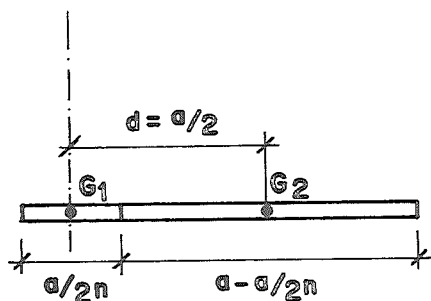
1.º) Las longitudes de ambos trozos para los sucesivos valores de n son:

Parte izquierda

$$a/2, a/4, a/8, \dots, a/2^n$$

Parte derecha

$$a - a/2, a - a/4, a - a/8, \dots, a - a/2^n$$



La distancia entre los c.d.g. de ambas partes tras la división n -ésima es:

$$d = \frac{1}{2} \frac{a}{2^n} + \frac{1}{2} a \left(1 - \frac{1}{2^n} \right) = \frac{a}{2}$$

que es, como vemos, independiente de n .

Para calcular el momento de inercia del conjunto, lo hacemos de cada parte y luego sumamos. Recordemos que el momento de inercia de una varilla homogénea respecto a un eje perpendicular a ella por su centro de masas es $1/12 mL^2$, siendo m la masa y L la longitud.

Llamamos I_1 al momento de inercia del trozo izquierdo y I_2 al del trozo derecho. Se tiene:

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \frac{1}{12} m_1 L_1^2 = \frac{1}{12} \left(\lambda \frac{a}{2^n} \right) \left(\frac{a}{2^n} \right)^2 = \frac{1}{12} \lambda \frac{a^3}{2^{3n}} \\
 I_2 &= \frac{1}{12} m_2 L_2^2 + m_2 d^2 = \frac{1}{12} \lambda a \left(1 - \frac{1}{2^n} \right) a^2 \left(1 - \frac{1}{2^n} \right)^2 + \lambda a \left(1 - \frac{1}{2^n} \right) \frac{a^2}{4} = \\
 &= \frac{1}{12} \lambda a^3 \left(1 - \frac{1}{2^n} \right) \left[\left(1 - \frac{1}{2^n} \right)^2 + 3 \right]
 \end{aligned}$$

habiendo aplicado el teorema de Steiner para el cálculo de I_2 .

Sumando resulta:

$$I = I_1 + I_2 = \frac{1}{12} \lambda a^3 \left(4 - \frac{6}{2^n} + \frac{3}{2^{2n}} \right) = \frac{1}{12} \lambda a^3 (4 - 6 \cdot 2^{-n} + 3 \cdot 2^{-2n})$$

Se podría haber hallado de forma más cómoda, calculando directamente el momento de inercia de una varilla de longitud a , respecto al eje que nos indican, mediante la aplicación del teorema de Steiner:

$$I = \frac{1}{12} (\lambda a) a^2 + \lambda a \left(\frac{a}{2} - \frac{1}{2} \frac{a}{2^n} \right)^2 = \frac{1}{12} \lambda a^3 (4 - 6 \cdot 2^{-n} + 3 \cdot 2^{-2n})$$

Haciendo el cambio $p = 2^{-n}$ e imponiendo la condición del enunciado, se tiene:

$$\begin{aligned}
 I &\geq \frac{1}{4} \lambda a^3 \rightarrow \lambda \frac{a^3}{12} (4 - 6 \cdot 2^{-n} + 3 \cdot 2^{-2n}) \geq \frac{\lambda a^3}{4} \rightarrow \\
 &\rightarrow 3 \cdot 2^{-2n} - 6 \cdot 2^{-n} + 1 \geq 0 \rightarrow 3p^2 - 6p + 1 \geq 0 \rightarrow \\
 &\rightarrow p = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 12}}{6} \rightarrow \begin{cases} p \geq 1,8164 \rightarrow n \leq -0,8611 \\ p \leq 0,1835 \rightarrow n \geq 2,446 \end{cases}
 \end{aligned}$$

donde se ha tenido en cuenta que

$$p = 2^{-n} \rightarrow n = -\frac{\ln p}{\ln 2}$$

El primer « n » no nos sirve por ser negativo. Como además n debe ser un número natural, el primer valor de n válido es:

$$n = 3$$

2.º) Derivamos el momento de inercia I respecto a n , igualando dicha derivada a cero. Será:

$$I = \frac{\lambda a^3}{12} (4 - 6 \cdot 2^{-n} + 3 \cdot 2^{-2n}) \rightarrow \frac{dI}{dn} = \frac{\lambda a^3}{12} \left(\frac{6 \cdot 2^n \cdot \ln 2}{2^{2n}} - \frac{3 \cdot 2 \cdot 2^{2n} \cdot \ln 2}{2^{4n}} \right)$$

$$\frac{dI}{dn} = 0 \rightarrow 2^{-n}(1 - 2^{-n}) = 0 \rightarrow \begin{cases} 2^{-n} = 0 \rightarrow n = \infty \\ 1 - 2^{-n} = 0 \rightarrow 2^{-n} = 1 \rightarrow n = 0 \end{cases}$$

Si hallamos la derivada segunda y sustituimos el valor obtenido, resulta:

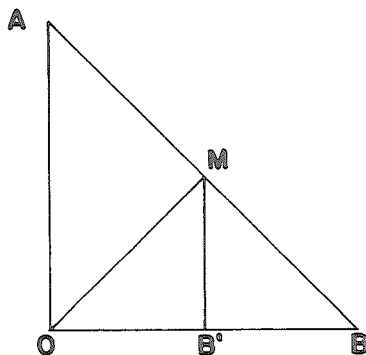
$$\frac{d^2 I}{dn^2} = \frac{\lambda a^3}{2} \ln 2 \left(\frac{-2^n \cdot \ln 2}{2^{2n}} + \frac{2 \cdot 2^{2n} \cdot \ln 2}{2^{4n}} \right) = \frac{\lambda a^3}{2} (\ln 2)^2 (2 \cdot 2^{-2n} - 2^{-n})$$

$$\text{— Para } n = 0 \rightarrow \frac{d^2 I}{dn^2} = \frac{\lambda a^3}{2} (\ln 2)^2 > 0 \rightarrow I \text{ es mínimo} \rightarrow I_{\min} = \frac{1}{12} \lambda a^3$$

Podemos fijarnos que la sucesión formada por los valores de I correspondientes a los sucesivos valores de n , es monótona creciente, con lo que el mayor momento de inercia corresponderá a $n = 0$. Además, dicho momento de inercia máximo será el de una varilla respecto a un eje normal a ella en un extremo.

$$I_{\max} = \frac{1}{3} \lambda a^3$$

5. La figura representa un triángulo rectángulo OAB , en el que $OA = OB = a$. Desde O se traza la perpendicular OM a AB , y desde M , la perpendicular MB' a OB , con lo que se obtiene el triángulo BMB' . Se repite la operación « n » veces. Hallar:



1.º) Tensor de inercia en O del triángulo que se obtiene después de la operación n -ésima.

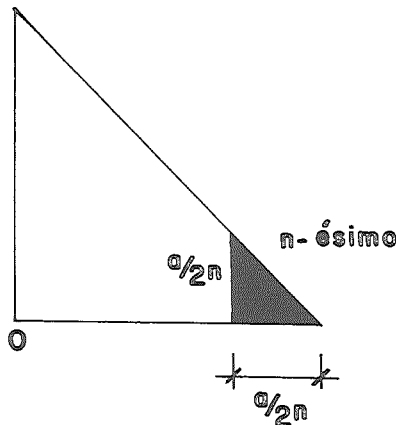
- 2.º) Momento de inercia de dicho triángulo respecto a la recta OM .
- 3.º) Valor mínimo de n que hace que el radio de giro respecto al eje «y» sea 10 veces mayor que el radio de giro según «x».
- 4.º) Para dicho valor de n , obtener los momentos y direcciones principales en O .

1.º) *Tensor de inercia en O*

Las longitudes de la base y altura de los triángulos correspondientes a los sucesivos valores de n son:

Base: $a/2, a/4, a/8, \dots, a/2^n$.

Altura: $a/2, a/4, a/8, \dots, a/2^n$.



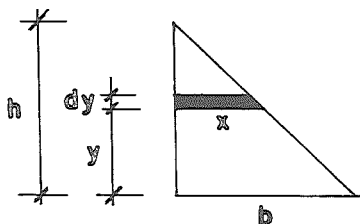
El área del triángulo n -ésimo será entonces:

$$S = \frac{1}{2} \frac{a}{2^n} \frac{a}{2^n} = \frac{1}{2} \frac{a^2}{2^{2n}}$$

Por tratarse todos ellos de triángulos rectángulos isósceles, los momentos de inercia respecto a la base y a la altura son iguales. Calculemos el momento de inercia de un triángulo de este tipo respecto a la base:

$$I_{\text{base}} = \int y^2 dS = \int y^2 x dy = \int_0^h y^2 (h-y) \frac{b}{h} dy = \frac{b}{h} \left[h \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} \right]_0^h = \frac{1}{12} b h^3$$

Se ha supuesto que el triángulo es homogéneo, y se calculó el momento de inercia geométrico.



Aplicando esto al triángulo n -ésimo resulta:

$$I_x = \frac{1}{12} (a/2^n) (a/2^n)^3 = \frac{1}{12} a^4 / 2^{4n}$$

Y si llamamos I'_y al momento de inercia respecto a la altura de dicho triángulo, el resultado es el mismo:

$$I'_y = \frac{1}{12} a^4 / 2^{4n}$$

Aplicamos el teorema de Steiner dos veces para calcular el momento respecto al eje y .

$$I'_y = I_{yG} + S \left(\frac{1}{3} \frac{a}{2^n} \right)^2$$

$$I_y = I_{yG} + S \left(a - \frac{2}{3} \frac{a}{2^n} \right)^2$$

De donde, si eliminamos I_{yG} (momento de inercia respecto a un eje paralelo al eje y , que pasa por el c.d.g. del triángulo considerado), resulta:

$$\begin{aligned} I_y &= I'_y - S \left(\frac{1}{3} \frac{a}{2^n} \right)^2 + S \left(a - \frac{2}{3} \frac{a}{2^n} \right)^2 = I'_y + S \frac{a^2}{2^{2n}} \left[\left(2^n - \frac{2}{3} \right)^2 - \left(\frac{1}{3} \right)^2 \right] = \\ &= \frac{1}{12} \frac{a^4}{2^{4n}} (3 - 8 \cdot 2^n + 6 \cdot 2^{2n}) \end{aligned}$$

Este momento de inercia puede obtenerse directamente de acuerdo a la definición, comprobándose que el resultado es el mismo:

$$\begin{aligned} I_y &= \int x^2 dS = \int x^2 y dx = \int_{a-a/2^n}^a x^2 (a-x) dx = \left[a \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right]_{a-a/2^n}^a = \\ &= \frac{1}{12} \frac{a^4}{2^{4n}} (3 - 8 \cdot 2^n + 6 \cdot 2^{2n}) \end{aligned}$$

Calculemos ahora el producto de inercia:

$$\begin{aligned} P_{xy} &= \iint xy dS = \int_{a-a/2^n}^a x dx \int_0^{a-x} y dy = \int_{a-a/2^n}^a x \left[\frac{1}{2} (a-x)^2 \right] dx = \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{a^2 x^2}{2} - \frac{2ax^3}{3} + \frac{x^4}{4} \right]_{a-a/2^n}^a = \frac{1}{12} \frac{a^4}{2^{4n}} \left(-\frac{3}{2} + 2 \cdot 2^n \right) \end{aligned}$$

Ya conocemos, pues, el tensor de inercia. Bastaría sustituir los valores hallados en:

$$\bar{\bar{I}}_O = \begin{vmatrix} I_x & -P_{xy} \\ -P_{xy} & I_y \end{vmatrix}$$

2.º) Momento de inercia respecto a la recta OM

Utilizamos la expresión de I_δ , que podemos escribir en forma matricial:

$$I_\delta = \bar{u}^t \cdot \bar{\bar{I}}_O \cdot \bar{u}$$

siendo $\bar{u}$ el vector unitario en la dirección de la recta OM.

Como el ángulo que forma la recta OM con el eje x es de 45° , el vector $\bar{u}$ es:

$$\bar{u} = (1/\sqrt{2})\bar{i} + (1/\sqrt{2})\bar{j}$$

Sustituyendo se tiene:

$$\begin{aligned} I_\delta &= \begin{vmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} I_x & -P_{xy} \\ -P_{xy} & I_y \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{2} I_x + \frac{1}{2} I_y - P_{xy} = \\ &= \frac{1}{24} \frac{a^4}{2^{4n}} (7 - 14 \cdot 2^n + 6 \cdot 2^{3n}) \end{aligned}$$

3.º) Teniendo en cuenta la expresión de radio de giro:

$$m\rho^2 = I \rightarrow \rho = \sqrt{I/m}$$

para que el radio de giro respecto al eje «y» sea 10 veces mayor que el radio de giro respecto al eje «x», el momento de inercia I_y deberá ser 100 veces mayor que I_x .

Por lo tanto, se tiene:

$$\begin{aligned}\rho_y = 10\rho_x \rightarrow I_y = 100I_x \rightarrow \frac{1}{12} \frac{a^4}{2^{4n}} (3 - 8 \cdot 2^n + 6 \cdot 2^{2n}) = \\ = 100 \frac{1}{12} \frac{a^4}{2^{4n}} \rightarrow 6 \cdot 2^{2n} - 8 \cdot 2^n - 97 = 0\end{aligned}$$

Hacemos el cambio $2^n = p$, con lo que queda una ecuación de 2.º grado en p , que se resuelve:

$$6p^2 - 8p - 97 = 0 \rightarrow p = \frac{8 \pm \sqrt{64 + 2328}}{12} \rightarrow \begin{cases} p = 4,7423 \\ p = -3,4090 \end{cases}$$

El valor negativo no nos sirve porque hace negativo el valor de n , y éste debe ser un número positivo. Del otro valor de p obtenemos el correspondiente de n :

$$n = \frac{\ln p}{\ln 2} = 2,2455$$

Como n debe ser un número natural, el primer valor de n que satisface la condición pedida es

$$n = 3$$

4.º) *Momentos y direcciones principales en O para $n = 3$*

Sustituimos el valor de n mencionado en I_x , I_y y P_{xy} :

$$I_x = \frac{1}{49.152} a^4 \quad I_y = \frac{323}{49.152} a^4 \quad P_{xy} = \frac{29}{98.304} a^4$$

Por ser un sistema plano, las direcciones principales se obtienen de:

$$\operatorname{tg}(2\alpha) = \frac{2P_{xy}}{I_y - I_x} = \frac{29}{322} = 0,09 \rightarrow \begin{cases} 2\alpha_1 = 5,146^\circ \rightarrow \alpha_1 = 2,573^\circ \\ 2\alpha_2 = 185,146^\circ \rightarrow \alpha_2 = 92,573^\circ \end{cases}$$

Se sustituyen estos dos valores del ángulo en la expresión:

$$I_\delta = I_x \cos^2 \alpha + I_y \sin^2 \alpha - P_{xy} \sin(2\alpha)$$

Resulta:

$$\begin{aligned}I_1 &= I_x \cos^2 \alpha_1 + I_y \sin^2 \alpha_1 - P_{xy} \sin(2\alpha_1) = \\ &= \frac{0,348}{49.152} a^4 = 7,087 \cdot 10^{-6} a^4\end{aligned}$$