

Índice

Prólogo a la primera edición	15
Prólogo a la segunda edición	17
I Cinemática relativista	19
1. Transformación de Lorentz	21
1.1 Transformación de Lorentz inversa	21
1.2 Matriz de Lorentz para movimientos en varias direcciones	22
1.3 Las transformaciones de Lorentz en forma vectorial	23
1.4 Transformación de la velocidad	28
1.5 Transformación de la aceleración	29
1.6 Transformaciones de Lorentz sucesivas (I)	32
1.7 Transformaciones de Lorentz sucesivas (II)	34
1.8 Velocidad relativa de dos sistemas en movimiento	36
1.9 Error en la velocidad relativa al usar las expresiones galileanas . .	37
1.10 Elemento de arco en el espacio de velocidades	38
1.11 Incrementos reiterados de la velocidad	38
2. Dilatación del tiempo	43

2.1	La Tierra alrededor del Sol	43
2.2	Apolo X	44
2.3	Muones en la atmósfera	45
2.4	Piones en un acelerador	46
2.5	Situaciones variadas de tiempos de vida de partículas	47
2.6	El refrigerador relativista	48
2.7	Deducción de la fórmula para la dilatación temporal	49
3.	Contracción de Lorentz	51
3.1	Contracción de un avión	51
3.2	Contracción del diámetro terrestre	52
3.3	Contracción del uno por ciento	53
3.4	Velocidad a la que un objeto se contrae a la mitad de su longitud propia	54
3.5	Deducción de la fórmula para la contracción de Lorentz	54
4.	Espacio de Minkowski	57
4.1	Línea de Universo de una partícula en movimiento rectilíneo uniforme	57
4.2	Línea de Universo de una partícula uniformemente acelerada . . .	59
4.3	Línea de Universo de una partícula entre dos paredes	60
4.4	Línea de Universo de un planeta	60
4.5	Relación entre sucesos en el espacio tiempo	61
4.6	Diagrama de Minkowski de sucesos separados por un intervalo temporaloideo	62
4.7	Diagrama de Minkowski de sucesos separados por un intervalo espacialoideo	64
5.	El intervalo Δs^2	67
5.1	El intervalo y el tiempo propio	67

ÍNDICE	9
--------	---

5.2	Sucesos simultáneos	67
5.3	Limitaciones a la simultaneidad	69
5.4	Orden temporal de dos sucesos	69
5.5	Sucesos en un mismo punto del espacio	70
5.6	Limitaciones a la coincidencia en el espacio	71
5.7	Separación espacial entre dos sucesos	71
5.8	Ejemplo numérico de transformación de x y t	72
5.9	Invariancia del intervalo	74

6. Problemas variados 77

6.1	Dilatación del tiempo y contracción de la longitud cuando $V = c/2$	77
6.2	Estrella binaria	77
6.3	Movimiento con aceleración constante (I)	79
6.4	Movimiento con aceleración constante (II)	81
6.5	Movimiento con aceleración constante (III)	82
6.6	Tiempo propio de la partícula uniformemente acelerada	84
6.7	Invariancia de la ecuación del resorte ante las transformaciones de Galileo	85
6.8	Invariancia de la ecuación de las ondas electromagnéticas (I)	86
6.9	Invariancia de la ecuación de las ondas electromagnéticas (II)	88
6.10	Atravesando la Galaxia a $v \approx c$	90

II Dinámica relativista 93

7. Leyes dinámicas 95

7.1	Segunda ley de Newton	95
7.2	Masas transversal y longitudinal	96
7.3	Si la fuerza es nula la velocidad no cambia	97

7.4	Aproximación no relativista de algunas magnitudes dinámicas . . .	98
7.5	Aproximación ultrarrelativista de algunas magnitudes dinámicas .	99
7.6	Dependencia del momento lineal relativista con la velocidad	101
7.7	Dependencia de la velocidad con el momento	103
7.8	Dependencia de la velocidad con la energía	105
7.9	Velocidad de protones a distintas energías	106
7.10	Velocidad, momento y energía del fotón y de partículas masivas . .	106
7.11	Masa en términos del momento lineal y la energía cinética	108
7.12	Energía cinética de un electrón en un átomo de Hidrógeno	110
7.13	Pérdida de masa del Sol	110
7.14	Energía de las explosiones nucleares	111
7.15	Defecto de masa del átomo de Hidrógeno	112
7.16	Dos neutrones al encuentro	113
7.17	Ejemplo numérico de transformación de E y p	114
7.18	Correcciones a la energía de orden v^4	117
7.19	Energía necesaria para acelerar una partícula	119
7.20	¿A qué velocidad se hace la energía igual a n veces la de reposo? .	120
7.21	Momento distinto de mv en 1%	121
7.22	Hamiltoniano hasta sexto orden en el momento	122
7.23	Expresiones $E = \sqrt{m^2c^4 + p^2c^2}$ y $cp = \sqrt{2mc^2T + T^2}$	123
7.24	Energía, momento y frecuencia del fotón	124
7.25	Movimiento de una carga q en un campo magnético $\vec{B}$	125
8.	Colisiones	129
8.1	Choque perfectamente inelástico (I)	129
8.2	Choque perfectamente inelástico (II)	130
8.3	Choque de una partícula con otra idéntica en reposo	131

ÍNDICE	11
8.4 Fotón que colisiona con un protón	132
8.5 Imposibilidad de que un electrón aislado absorba o emita un fotón	134
8.6 Fotón absorbido por una partícula	135
8.7 Nave espacial a vela propulsada por un láser desde la Tierra	136
8.8 Dispersión Compton estándar	137
8.9 Incremento de masa de un núcleo por absorción de un cuanto γ . .	138
8.10 Fusión de dos deuterios dando lugar a una partícula α	140
8.11 Choque de un electrón y un positrón, resultando dos fotones que se mueven en direcciones opuestas	140
9. Vectores y tensores	143
Tritensores cartesianos	143
9.1 Ejercicios sencillos de tritensores (I)	143
9.2 Ejercicios sencillos de tritensores (II)	145
9.3 El tensor e_{ijk}	146
9.4 e_{ijk} y el producto vectorial	148
9.5 e_{ijk} y el rotor	149
9.6 e_{ijk} y el producto mixto	149
9.7 e_{ijk} y el determinante	150
Tensores en general	151
9.8 Los tensores y las transformaciones de coordenadas curvilíneas (I)	151
9.9 Los tensores y las transformaciones de coordenadas curvilíneas (II)	152
9.10 Los tensores y las transformaciones de coordenadas curvilíneas (III)	153
9.11 El tensor unidad δ^α_β	154
9.12 Tensores cartesianos	155
9.13 Ejercicios sencillos de tensores	155
Tetratensores en el espacio de Minkowski	158

9.14 Ortogonalidad de la Matriz de Lorentz: $L^\alpha{}_\mu g_{\alpha\beta} L^\beta{}_\nu = g_{\mu\nu}$	158
9.15 Formas de la Matriz de Lorentz: $L^\mu{}_\nu, L_\mu{}^\nu, L_{\mu\nu}, L^{\mu\nu}$	159
9.16 Formas de un tensor: $T^\mu{}_\nu, T_\mu{}^\nu, T_{\mu\nu}, T^{\mu\nu}$	160
9.17 Ejercicios sencillos de cuadritensores	161
9.18 Rotaciones del triespacio y del cuadriespacio	163
9.19 Trivectores y cuadvectores (I)	165
9.20 Tritensores y cuadritensores (II)	166
9.21 Derivada de un 4-vector respecto de un 4-escalar: $B^\mu = \frac{dA^\mu}{de} \Leftrightarrow$ $B_\mu = \frac{dA_\mu}{de}$	167
9.22 Producto interno de dos 4-vectores: $A^\mu B_\mu = A_\mu B^\mu$	168
9.23 Identidades con tensores simétricos y antisimétricos	169
Mecánica relativista en el espacio de Minkowski	170
9.24 Cuadriaceleración en términos de $\vec{v}$ y $\vec{a}$	171
9.25 Ortogonalidad de la 4-velocidad con la 4-aceleración	175
9.26 Velocidad relativa entre dos sistemas inerciales de referencia	176
9.27 Ecuaciones de transformación de la energía y el momento	178
9.28 Ortogonalidad de la cuadrifuerza y el cuadrimomento	179
9.29 Forma tridimensional del operador de D'Alembert $\partial^\mu \partial_\mu \varphi$	179

III Electrodinámica 181

10. Transformación de campos 183

10.1 Transformación inversa de los campos	183
10.2 Forma vectorial de las ecuaciones de transformación de los campos	184
10.3 Campo de una carga en movimiento rectilíneo y uniforme	185
10.4 Sistema inercial de referencia en que $\vec{E}$ y $\vec{B}$ son paralelos	188

10.5 Sistema inercial de referencia con $\vec{B} = \vec{0}$ o $\vec{E} = \vec{0}$	190
10.6 Sistema inercial de referencia con el mismo E (B)	192
10.7 Sistema inercial de referencia con $E' < cB'/N$	193
10.8 Invariantes $\vec{E} \cdot \vec{B}$ y $E^2 - c^2 B^2$	194
10.9 Sistema inercial de referencia en que el ángulo entre $\vec{E}$ y $\vec{B}$ es agudo	195
10.10 Ecuaciones para los potenciales φ y $\vec{A}$	196
11. Electrodinámica en el Cuadriespacio de Minkowski	199
11.1 Invariante $F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$	199
11.2 Invariante $\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} F^{\mu\nu} F^{\alpha\beta}$	200
11.3 Relación entre potenciales y campos	202
11.4 Transformaciones de calibración	203
11.5 Transformación de Lorentz para $\vec{E}$ y $\vec{B}$	204
11.6 Ecuaciones de Maxwell	207
11.7 Invariancia de calibración de Lorenz	209
11.8 Tensor de energía-momento	209
11.9 Efecto Doppler relativista	213
11.10 Ecuaciones para el cuadripotencial A^μ	215
11.11 Ecuaciones de transformación para la cuádracorriente	217
11.12 Teorema de Poynting	218
11.13 Propiedades de las ondas electromagnéticas a partir de los invariantes	219
11.14 Demostración de la ecuación de continuidad a partir de las ecuacio- nes de Maxwell	220
11.15 Invariancia de calibración	221
11.16 Ecuación de movimiento de una carga bajo la influencia de un campo electromagnético	222

IV	Apéndices	225
	Apéndice A. Tensores I	227
	Apéndice B. Tensores II	229
	B.1. Tensores contravariantes	229
	B.2. Tensores covariantes	230
	B.3. Tensores mixtos	232
	B.4. El tensor métrico	232
	Apéndice C. Tensores en el cuadriespacio de Minkowski	235
	Apéndice D. Convenios en TRR	241
	Apéndice E. Valores numéricos de algunas constantes universales	247
	Bibliografía	249
	Índice alfabético	257

2. Dilatación del tiempo

2.1 La Tierra alrededor del Sol

La velocidad orbital de la Tierra alrededor del Sol es de unos 30 km/s. En un año, ¿cuántos segundos pierden los relojes de la Tierra con respecto a los relojes de un sistema de referencia en reposo respecto del Sol?

Ohanian [16], problema 3.1, página 109.

Solución:

Pongamos sendos sistemas de referencia en el Sol y la Tierra. La relación entre los tiempos medidos en uno y otro sistema es

$$t' = \frac{t}{\sqrt{1 - (V/c)^2}}. \quad (2.1)$$

La respuesta del problema se obtiene calculando la diferencia entre t y t' cuando t es un año. No se pierde gran cosa si ponemos que el año tiene 365 días y la velocidad de la luz es 300.000 km/s. Entonces

$$\begin{aligned} t - t' &= t \left[1 - \frac{1}{\sqrt{1 - (V/c)^2}} \right] \\ t - t' &\approx -t \frac{1}{2} \left(\frac{V}{c} \right)^2 \\ &\approx -\frac{365 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60}{2} \left(\frac{30}{300.000} \right)^2 \text{ s} \\ &\approx -0,16 \text{ s}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Hemos usado la fórmula aproximada

$$(1 - x^2)^{-1/2} \approx 1 + \frac{x^2}{2}, \quad (2.3)$$

que es válida para valores pequeños de la variable independiente x . Su uso en este problema está plenamente justificado pues la relación V/c es del orden de 10^{-4} .

2.2 Apolo X

El récord mundial de velocidad alcanzado por un ser humano relativo a la Tierra es de 24.791 mi/h, que fue alcanzado por la tripulación de la nave Apolo X en su viaje de regreso a la Tierra. A esta velocidad, ¿cuál es la dilatación temporal de un reloj en la nave respecto de un reloj en la Tierra?

Ohanian [16], problema 3.2, página 109.

Solución:

La respuesta es inmediata:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta t'}{\Delta t} &= \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} \approx 1 - \frac{1}{2} \frac{V^2}{c^2} \\ &\approx 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{24.791 \cdot 1.609 \text{ m}/(3.600 \text{ s})}{300.000.000 \text{ m/s}} \right)^2 \\ &\approx 1 - 6,82 \times 10^{-10}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Se ha usado por el camino que una milla es equivalente a 1.609 m, que una hora son 3.600 s y que la velocidad de la luz en el vacío es igual, aproximadamente, a 300.000 km/s.

El resultado es elocuente. Aún a estas velocidades los efectos relativistas son significativamente pequeños.

2.3 Muones en la atmósfera

Las partículas inestables como los muones se desintegran siguiendo una ley según la cual la probabilidad de desintegración al cabo del tiempo t es $1 - \exp(-t/\tau)$, mientras que la probabilidad de no desintegración es $\exp(-t/\tau)$, siendo τ la *vida media* de la partícula. Para los muones la vida media es $\tau = 2,20 \times 10^{-6}$ s. Suponga que el impacto de un rayo cósmico en la atmósfera crea un muón a 40 km de altura y con una velocidad de $0,99 c$ hacia abajo. Entonces

1. Si no hubiera dilatación temporal, ¿cuál sería la probabilidad de que el muón alcance la superficie terrestre?
2. Halle la misma probabilidad considerando la dilatación temporal.

Ohanian [16], problema 3.8, páginas 110 y 243.

Solución:

La probabilidad de que un muón alcance la superficie terrestre, o sea de que no *desaparezca* en sus 40 Km de recorrido, en el primer caso sería

$$\begin{aligned} \exp(-(d/v)/\tau) &= \exp\left[-\frac{40}{0,99 \cdot 300.000 \cdot 2,20 \cdot 10^{-6}}\right] \\ &\approx \exp[-61,26] \approx 2,48 \cdot 10^{-27}, \end{aligned} \quad (2.5)$$

o sea, una probabilidad muy baja.

Tengamos en cuenta ahora la dilatación temporal. Desde el sistema de referencia de la Tierra el tiempo de vida $\tau = 2,20 \times 10^{-6}$ s se convierte en

$$\tau' = \frac{\tau}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{2,2 \cdot 10^{-6}}{\sqrt{1-0,99^2}} \text{ s} \approx 15,6 \cdot 10^{-6} \text{ s}, \quad (2.6)$$

por lo cual la probabilidad de que llegue a la Tierra es realmente

$$\begin{aligned} \exp(-(d/v)/\tau') &= \exp\left[-\frac{40}{0,99 \cdot 300.000 \cdot 15,6 \cdot 10^{-6}}\right] \\ &\approx \exp[-8,64] \approx 1,77 \cdot 10^{-4}, \end{aligned} \quad (2.7)$$

valor que ya es apreciable experimentalmente.

Es interesante notar que el tiempo se ha multiplicado casi por 10, y que esto ha implicado que la probabilidad haya aumentado en aproximadamente 23 órdenes.

2.4 Piones en un acelerador

La vida media de los piones es de $1,8 \times 10^{-8}$ s. Un haz de piones sale de un acelerador con una velocidad de $0,8c$. ¿Cuál es clásicamente la distancia a la cual la mitad de los piones ha desaparecido? Responder la misma pregunta en el marco relativista.

Gautreau et Savin [22], problemas 5.5 y 5.6, página 32.

Solución:

La probabilidad de no desintegración sigue una ley exponencial del tipo $P(t) = \exp[-t/\tau]$, siendo $t_{1/2} = \tau \ln 2$ el tiempo de vida medio¹. De aquí que en términos de la velocidad y distancia recorrida sea $P(d) = \exp[-d \ln 2 / (vt_{1/2})]$. Entonces, la distancia $d_{1/2}$ a la que esta probabilidad es $1/2$ viene dada por la condición

$$\frac{1}{2} = \exp[-d_{1/2} \ln 2 / (vt_{1/2})] , \quad (2.8)$$

de donde

$$d_{1/2} = vt_{1/2} . \quad (2.9)$$

Entonces, clásicamente hablando, esta distancia es aproximadamente $(0,8 \cdot 300.000 \cdot 1,8 \times 10^{-8})$ km, o sea unos 4,32 m.

Para tener en cuenta los efectos relativistas se debe considerar que en el sistema de referencia del laboratorio la vida media es más larga por un factor γ , o sea $t'_{1/2} = \gamma t_{1/2}$, la correspondiente distancia recorrida es $d'_{1/2} = vt'_{1/2}$. Con los datos de nuestro caso esta distancia es aproximadamente 7,2 m.

¹Atención: existen textos que nombran a τ como *tiempo de vida medio* y a $t_{1/2}$ como *periodo de semidesintegración*. En este problema nos dan como dato a $t_{1/2}$ y lo llaman tiempo de vida medio.

2.5 Situaciones variadas de tiempos de vida de partículas

Sea τ_0 el tiempo de vida de una partícula en el sistema de referencia en que está en reposo y $\tau(V)$ esta misma magnitud en el sistema de referencia en que la partícula en cuestión tiene una velocidad V . Sean ℓ_0 y ℓ el recorrido de su trayectoria en uno y otro sistema de referencia. Complete la siguiente tabla.

Partícula	τ_0 (s)	V/c	$\tau(V)$ (s)	ℓ_0 (m)	$\ell(V)$ (m)	Ref.
1	2×10^{-6}	0,95	6×10^{-6}		3	1
2		0,80				2,3
3		0,998				4,5

Gautreau et Savin [22], 1: problema 5.1, página 31; 2: problema 5.10, página 33; 3: problema 5.11, página 33; 4: problema 6.3, página 35; 5: problema 6.4, página 35.

Solución:

Para completar la tabla basta tener en cuenta que estas magnitudes están relacionadas por las expresiones

$$\tau = \frac{\tau_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2}} ; \ell = V \tau ; \ell_0 = V \tau_0 . \quad (2.10)$$

Es importante que el lector note en esta tabla la dilatación temporal y la contracción de longitudes, características ambas de los cambios de sistemas de referencia cuando las velocidades relativas son grandes.

Partícula	τ_0	V/c	$\tau(V)$	ℓ_0	$\ell(V)$	Ref.
1	1,87	0,95	6	533,6	1.708,9	1
2	0,00751	0,80	0,0125	1,8	3	2,3
3	2	0,998	31,6	598,4	9466,0	4,5

2.6 El refrigerador relativista

Un físico ha propuesto un refrigerador relativista: Usted toma un pollo muerto fresco y lo acelera hasta una velocidad alta de modo que, digamos, en 6 meses de la Tierra el pollo apenas envejezca 6 horas de su tiempo propio. ¿Qué velocidad se requiere para esto?

Ohanian de Relatividad [16], problema 3.3, página 110.

Solución:

Se trata de evaluar la velocidad relativa de los sistemas cuando el tiempo se dilata de 6 horas (en el referencial propio) a 6 meses en el referencial no propio. En fórmulas

$$\begin{aligned}\Delta t &= \gamma \Delta \tau \\ \gamma &= \frac{\Delta t}{\Delta \tau} \\ \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} &= \frac{\Delta t}{\Delta \tau} \\ \sqrt{1-\beta^2} &= \frac{\Delta \tau}{\Delta t} \\ 1-\beta^2 &= \left(\frac{\Delta \tau}{\Delta t}\right)^2 \\ \beta^2 &= 1 - \left(\frac{\Delta \tau}{\Delta t}\right)^2 \\ \beta &= \sqrt{1 - \left(\frac{\Delta \tau}{\Delta t}\right)^2} .\end{aligned}\tag{2.11}$$

Esta es la expresión analítica general. Pongamos ahora que $\Delta \tau$ son 6 horas y que Δt son 6 meses. Para estimar el resultado pongamos meses de 30 días.

$$\begin{aligned}\beta &= \sqrt{1 - \left(\frac{6 \text{ hr}}{6 \times 30 \times 24 \text{ hr}}\right)^2} \\ &= \sqrt{1 - \left(\frac{1}{30 \times 24}\right)^2} \\ &= 0.9999980709876543 \dots .\end{aligned}\tag{2.12}$$