ÍNDICE

Volumen I

OBJETIVOS Y SINOPSIS 13

1. ÁLGEBRA DE PROPOSICIONES. CONJUNTOS 15
   - 1.1. Sentencias 17
   - 1.2. Proposiciones 18
   - 1.3. Verdad y equivalencia lógicas 20
   - 1.4. El razonamiento lógico 21
   - 1.5. Cuantificadores 22
   - 1.6. Conjuntos 23
   - 1.7. Inclusión de conjuntos 26
   - 1.8. Operaciones conjuntistas 27
   - 1.9. Producto cartesiano 31

2. RELACIONES 33
   - 2.1. Concepto de relación 35
   - 2.2. Composición de relaciones 38
   - 2.3. Relaciones de equivalencia 39
   - 2.4. Funciones y aplicaciones 40
   - 2.5. Generalización de las operaciones conjuntistas 43
   - 2.6. Conjuntos preordenados 44
   - 2.7. Conjuntos ordenados 47
   - 2.8. Elementos máximo y mínimo 48
   - 2.9. Elementos maximal y minimal 49

3. INTRODUCCIÓN DE LOS NÚMEROS NATURALES, ENTEROS Y RACIONALES 53
   - 3.1. Potencia de un conjunto. Números cardinales 55
   - 3.2. Conjuntos numerables y no numerables 58
   - 3.3. Conjuntos bien ordenados 66
   - 3.4. Conjuntos similares. Tipos ordinales 69
   - 3.5. Números ordinales 71
   - 3.6. Aritmética cardinal 78
   - 3.7. Aritmética ordinal 81

3.8. Números naturales 85
3.9. Números enteros 95
3.10. Números racionales 99

4. FILTROS 107
4.1. Definición de filtro 109
4.2. Filtro inducido 112
4.3. Bases de filtro 112
4.4. Filtros infinitos 117
4.5. Filtro imagen 118

5. ESPACIOS TOPOLÓGICOS. CONTINUIDAD 121
5.1. Definición de espacio topológico 123
5.2. Filtro de las proximidades de un punto 125
5.3. Convergencia y divergencia 127
5.4. Funciones continuas 131

6. CONJUNTOS NOTABLES DE UN ESPACIO TOPOLÓGICO 137
6.1. Adherencia y acumulación 139
6.2. Interior, exterior y frontera de un conjunto 143
6.3. Abiertos y cerrados 148
6.4. Preordenación de topologías 151
6.5. Homeomorfismos 152

7. BASES DE UN ESPACIO TOPOLÓGICO 155
7.1. Sistema completo de entornos 157
7.2. Postulados de numerabilidad 158
7.3. Recubrimientos abiertos 162
7.4. Sub-bases 163
7.5. Producto de espacios topológicos 165

8. ESPACIOS DE HAUSDORFF. ESPACIOS MÉTRICOS 169
8.1. Separación de Hausdorff 171
8.2. Espacios métricos 174
8.3. Distancia euclídea en $R^{(n)}$ 177
8.4. Otras distancias en $R^{(n)}$ 181
8.5. Espacios vectoriales normados 185
8.6. Espacio de las aplicaciones acotadas 187

9. COMPACIDAD. CONTINUIDAD UNIFORME 189
9.1. Idea de compacidad 191
9.2. Conjuntos compactos. Propiedades 193
9.3. Criterio de Bolzano-Weierstrass 196
9.4. Conjuntos compactos de $R^{(n)}$ 199
9.5. Compacidad local 200
9.6. Compactación de Alexandroff 202
9.7. Continuidad y compacidad 206
9.8. Continuidad uniforme 211

10. CONEXIÓN. DIMENSIÓN 215
10.1. Idea de conexión 217
10.2. Propiedades de los conjuntos conexos 220
10.3. Conexión en $R^{(n)}$ 222
10.4. Continuidad y conexión 225
10.5. Dimensión en los espacios topológicos. Curvas y superficies. 232
10.6. Índice de los puntos de una curva 235

11. LOS NÚMEROS REALES. COMPLETITUD 239
11.1. Sucesiones de números racionales 241
11.2. Álgebra de sucesiones 244
11.3. Sucesiones de Cauchy de números racionales 247
11.4. El cuerpo de los números reales 253
11.5. Orden en R 254
11.6. Representación de R en la recta euclídea 260
11.7. Completitud de la recta euclídea. Criterio de Cauchy 263

12. SUCESIONES DE NÚMEROS REALES. CÁLCULO DE LÍMITES. 271
12.1. Definiciones 273
12.2. Sucesiones comprendidas entre otras dos convergentes 274
12.3. Sucesiones extraídas de otra 276
12.4. Expresiones aritméticas 278
12.5. Expresiones logarítmicas. Expresiones potenciales 286
12.6. Sucesiones monótonas y acotadas 289
12.7. Expresiones potenciales enmascaradas por 1^{∞} 293
12.8. Algoritmo lineal de convergencia 298

13. SERIES NUMÉRICAS 305
13.1. Definiciones 307
13.2. Propiedades generales 311
13.3. Series de términos positivos. Criterios de convergencia 316
13.4. Clasificación de las series 332
13.5. Convergencia absoluta 336
13.6. Convergencia no absoluta. Criterios 339
13.7. Series alternadas 343

14. DERIVADAS Y DIFERENCIALES DE FUNCIONES DE UNA VARIABLE 349
14.1. Aproximación de una función por otra. 351
14.2. Derivada de una función en un punto 354
14.3. Diferencial de una función en un punto 360
14.4. Derivación de las funciones elementales 362
14.5. Derivadas y diferenciales sucesivas 368

15. ESTUDIO LOCAL DE FUNCIONES DERIVABLES DE UNA VARIABLE 371
15.1. Variación de una función en el entorno de un punto 373
15.2. Teorema de Rolle. 376
15.3. Teoremas del valor medio 381
15.4. Variación de la función derivada 385
15.5. Cálculo de límites. Reglas de L'Hôpital 388
15.6. Fórmula de Taylor 396
15.7. Estudio local de la gráfica de una función derivable 400
15.8. Curvas osculatrices 404

16. DIFERENCIALES DE FUNCIONES DE DOS O MÁS VARIABLES. 407
16.1. Concepto de diferencial 409
16.2. Condiciones de existencia de la diferencial 414
16.3. Derivadas parciales sucesivas 420
16.4. Fórmula de Taylor para funciones de dos variables 425
16.5. Máximos y mínimos relativos 427
16.6. Teorema de existencia de las funciones implícitas 432
16.7. Máximos y mínimos condicionados. Multiplicadores de Lagrange 438

17. CURVAS PLANAS 443
17.1. Concepto de curva. Expresiones analíticas. Envolvente 445
17.2. Curvas algebraicas 448
17.3. Dibujo de curvas algebraicas. Método de las regiones 452
17.4. Ramas de una curva algebraica. Método de Newton 454
17.5. Curvas en coordenadas polares 457
17.6. Cisoides y concoides 464
17.7. Ruletas 470
17.8. Otras curvas notables 473
17.9. Curvatura. Centro y radio de curvatura 479

18. CURVAS EN EL ESPACIO 485
18.1. Espacios afín y euclídeo. Operaciones con vectores 487
18.2. Problemas geométricos 495
18.3. Funciones vectoriales 499
18.4. Curvas en el espacio. Tangente y plano osculador 508
18.5. Triedro intrínseco. Fórmulas de Frenet 516
18.6. Determinación de una curva mediante la curvatura y la torsión .. 524
18.7. Ecuaciones intrínsecas de una curva. Curvas de pendiente constante 529
18.8. Curvas de Bertrand 534
18.9. Indicatrices esféricas 540
18.10. Contactos 543

19. SUPERFICIES 551
19.1. Concepto de superficie. Expresiones analíticas. Envolvente. Superficies de traslación 553
19.2. Superficies regladas 568
19.3. Superficies desarrollables 578
19.4. Curvas sobre una superficie. Fórmulas de Darboux 584
19.5. Indicatriz de Dupin. Líneas asintóticas y conjugadas 594
19.6. Líneas principales 605
19.7. Fórmulas de Gauss y Weingarten 618
19.8. Cálculo diferencial exterior 623
19.9. Curvatura total 629
19.10. Líneas geodésicas 632

1
Álgebra de proposiciones. Conjuntos

1.1. Sentencias

1.2. Proposiciones

1.3. Verdad y equivalencia lógicas

1.4. El razonamiento lógico

1.5. Cuantificadores

1.6. Conjuntos

1.7. Inclusión de conjuntos

1.8. Operaciones conjuntistas

1.9. Producto cartesiano

1.1. SENTENCIAS

Una sentencia (o aserción verbal) es cualquier expresión con la propiedad de tener valor verdadero o valor falso, pero no ambos a la vez.

Ejemplos:

«Está lloviendo»
2 + 2 = 5
«9 y 10 son primos entre sí».

Varias expresiones pueden combinarse para formar una sentencia compuesta, cuya verdad o falsedad se decide de la verdad o falsedad de sus componentes; de manera que, si **p** y **q** son sentencias, se define:

La sentencia disyuntiva $\boldsymbol{p} \vee \boldsymbol{q}$, cuando dos sentencias se combinan mediante la conjunción disyuntiva «o», en el sentido no excluyente [1]. Para que la disyunción sea verdadera basta con que lo sea una de las sentencias componentes, aunque pueden ser verdaderas ambas. El símbolo $\mathbf{p} \vee \mathbf{q}$ se lee «p o q».

Ejemplo:

Un estudiante matriculado en dos facultades universitarias puede decir: «seré licenciado por una facultad o por otra», lo cual no excluye que sea licenciado por ambas.

La sentencia copulativa $\boldsymbol{p} \wedge \boldsymbol{q}$, cuando las dos sentencias se enlazan mediante la conjunción copulativa «y». Para que la cópula sea verdadera es

---

[1] En español es más frecuente el uso de la conjunción disjuntiva «o» en el sentido excluyente y, no pocas veces en expresiones que encierran amenaza de violencia, como cuando se dice «estudia o te acordarás de mí».

preciso que ambas sentencias componentes sean verdaderas. El símbolo $\mathbf{p} \wedge \mathbf{q}$ se lee «p y q».

La sentencia negativa $\mathbf{\sim p}$, de otra **p**, cuyo valor es el contrario de ésta. Si **p** es verdadera entonces su negación $\mathbf{\sim p}$ tiene valor falso, y si **p** es falsa entonces $\mathbf{\sim p}$ es verdadera. La sentencia $\mathbf{\sim p}$ se lee «no p». Si se niega dos veces una misma sentencia **p** entonces se obtiene otra $\mathbf{\sim(\sim p)}$, cuyo valor es el mismo que el de **p**.

La sentencia condicional $\boldsymbol{p \Rightarrow q}$, definida por la disyuntiva $\mathbf{(\sim p) \vee q}$, tiene valor verdadero salvo que **p** sea verdadera y **q** falsa. El símbolo $\mathbf{p \Rightarrow q}$ se lee «si p entonces q» o bien «p implica q». También se dice que «**p** es una condición suficiente para que ocurra **q**», o que «**q** es una condición necesaria para que ocurra **p**». Las sentencias condicionales son muy frecuentes en Matemáticas.

La sentencia bicondicional $\boldsymbol{p \Leftrightarrow q}$, definida por la copulativa $\mathbf{(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)}$, tiene valor verdadero solo cuando **p** y **q** son ambas verdaderas o ambas falsas. En Matemáticas se emplean las sentencias bicondicionales para caracterizar los objetos matemáticos; son las condiciones necesarias y suficientes.

1.2. PROPOSICIONES

Si $x, y, \ldots, z$ son *indeterminadas* (también llamadas frecuentemente *variables*), susceptibles de representar sentencias, y se combinan con los símbolos $\vee$, $\wedge$, $\sim$, $\Rightarrow$ y $\Leftrightarrow$, el resultado es una expresión $f(x, y, \ldots, z)$, llamada **polinomio booleano** o simplemente **proposición**.

Cuando en una proposición se sustituyen las letras $x, y, \ldots, z$ por las sentencias **p**, **q**, …, **r**, respectivamente, el resultado es una nueva sentencia cuyo valor (verdadero o falso) se deduce del que tenían aquéllas. Se puede construir así una *tabla de verificación*, dando valores a las variables que la componen.

Ejemplo:

La tabla de verificación correspondiente a la proposición $\mathbf{p \vee (\sim q) \Rightarrow q}$ es

p	**q**	**p** $\vee$ **(~q)** $\Rightarrow$ **q**
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	F

donde V indica valor verdadero y F valor falso.

Una proposición f(**p**, **q**, …, **r**) se llama **tautología** si es cierta (toma valor verdadero) cualesquiera que sean los valores de las variables **p**, **q**, …, **r**.

Correlativamente, la proposición f(**p**, **q**, …, **r**) es una **contradicción** si es falsa cualesquiera que sean los valores de las variables **p**, **q**, …, **r**.

Está claro que si f(**p**, **q**, …, **r**) es una tautología, su negación ~f(**p**, **q**, …, **r**) es una contradicción y viceversa.

Ejemplos:

La proposición **p** $\vee$ (~**p**) es una tautología y **p** $\wedge$ (~**p**) es una contradicción.

También es una tautología la proposición
[(**p** $\Rightarrow$ **q**) $\wedge$ (**q** $\Rightarrow$ **r**)] $\Rightarrow$ (**p** $\Rightarrow$ **r**)
conocida con el nombre de *ley del silogismo*.

Se dice que la proposición f_1(**p, q, …, r**) **implica lógicamente** a la proposición f_2(**p, q, …, r**) si la proposición f_1(**p, q,** …, **r**) $\Rightarrow$ f_2(**p, q,** …, **r**) es una tautología.

Ejemplo:

p $\wedge$ **q** implica lógicamente a **p** como se deduce de la siguiente tabla de verificación:

p	**q**	**p** $\wedge$ **q**	(**p** $\wedge$ **q**) $\Rightarrow$ **p**
V	V	V	V
V	F	F	V
F	V	F	V
F	F	F	V

Dos proposiciones $f_1(\mathbf{p, q, \ldots, r})$ y $f_2(\mathbf{p, q, \ldots, r})$ se dice que son **lógicamente equivalentes** si poseen idénticas tablas de verificación; dicho de otra manera, si la proposición

$$f_1(\mathbf{p, q, \ldots, r}) \Leftrightarrow f_2(\mathbf{p, q, \ldots, r})$$

es una tautología.

La equivalencia lógica entre ambas proposiciones se expresa en símbolos mediante

$$f_1(\mathbf{p, q, \ldots, r}) \equiv f_2(\mathbf{p, q, \ldots, r}).$$

Ejemplos:

Las equivalencias lógicas

$$\sim(\mathbf{p} \vee \mathbf{q}) \equiv (\sim\mathbf{p}) \wedge (\sim\mathbf{q}) \quad \text{y} \quad \sim(\mathbf{p} \wedge \mathbf{q}) \equiv (\sim\mathbf{p}) \vee (\sim\mathbf{q})$$

se llaman *leyes de Morgan*.

La equivalencia lógica tiene las siguientes propiedades:

- *Reflexiva*: Toda proposición es lógicamente equivalente a sí misma.
- *Simétrica*: Si una proposición es lógicamente equivalente a otra, ésta es lógicamente equivalente a la primera.
- *Transitiva*: Si una proposición es lógicamente equivalente a otra y ésta a una tercera, la primera es lógicamente equivalente a la tercera.

1.3. VERDAD Y EQUIVALENCIA LÓGICAS

Una sentencia se dice que es ***lógicamente verdadera****, o que tiene* ***verdad lógica****, si se ha obtenido de una tautología* f(***p, q, …, r***)*, dando valores a las variables* ***p, q, …, r****.*

La verdad (o certeza) lógica de una sentencia es independiente de que sus sentencias componentes sean verdaderas o falsas.

Ejemplos:

Puesto que la proposición $\mathbf{q} \Rightarrow (\mathbf{p} \Rightarrow \mathbf{q})$ es una tautología, como se comprueba mediante su tabla de verificación, la sentencia «Si x e y son primos entre sí, entonces una condición suficiente para ello es que x sea primo» es lógicamente cierta.

En cambio, la sentencia «Si $3 > 8$, entonces 10 es número primo» es cierta pero no lógicamente cierta, ya que la proposición $\mathbf{p} \Rightarrow \mathbf{q}$ no es una tautología.

Dos sentencias se dice que son ***lógicamente equivalentes*** *si se han obtenido de sendas proposiciones equivalentes*.

Ejemplos:

Teniendo en cuenta la equivalencia lógica

$$\sim(\mathbf{p} \vee \mathbf{q}) \equiv (\sim\mathbf{p}) \wedge (\sim\mathbf{q})$$

se comprueba enseguida que la sentencia «no es verdad que esté lloviendo o haciendo frío» es lógicamente equivalente a «no está lloviendo y no hace frío».

De la equivalencia lógica

$$(\mathbf{p} \Rightarrow \mathbf{q}) \equiv [(\sim\mathbf{q}) \Rightarrow (\sim\mathbf{p})]$$

y suponiendo que x es un número natural, se deduce que la sentencia «Si x^2 es impar, entonces x es impar» es lógicamente equivalente a esta otra: «Si x es par, entonces x^2 también es par».

1.4. EL RAZONAMIENTO LÓGICO

Si la aceptación de una sentencia **H** (*hipótesis*) lleva consigo la aceptación de otra **T** (*tesis* o *conclusión*), se suele expresar mediante la sentencia condicional

$$\mathbf{H} \Rightarrow \mathbf{T}$$

llamada *teorema*.

Puesto que **H** se toma como verdadera, un teorema solo es cierto si es cierta la tesis **T**, y se dice que se ha demostrado el teorema cuando se ha obtenido la validez de su tesis.

Llamando *directa* a la proposición $\mathbf{p} \Rightarrow \mathbf{q}$, de la cual se ha obtenido un teorema, se definen estas otras proposiciones:

- *Recíproca*: $\mathbf{q} \Rightarrow \mathbf{p}$.
- *Contraria*: $\sim\mathbf{p} \Rightarrow \sim\mathbf{q}$.
- *Contrarrecíproca*: $\sim\mathbf{q} \Rightarrow \sim\mathbf{p}$.

Teniendo en cuenta las equivalencias lógicas

$$(\mathbf{p} \Rightarrow \mathbf{q}) \equiv [(\sim\mathbf{q}) \Rightarrow (\sim\mathbf{p})]$$
$$(\mathbf{q} \Rightarrow \mathbf{p}) \equiv [(\sim\mathbf{p}) \Rightarrow (\sim\mathbf{q})]$$

resulta que los teoremas directo y contrarrecíproco son lógicamente equivalentes. Asímismo, son lógicamente equivalentes los teoremas recíproco y contrario.

El razonamiento se rige por los principios de la filosofía aristotélica:

- DE IDENTIDAD: *Toda sentencia es igual a sí misma*.
- DE CONTRADICCIÓN: *Si se acepta una sentencia entonces hay que rechazar su negación*.
- DE TERCERO EXCLUIDO: *Si no se acepta una sentencia entonces hay que admitir su negación.*

Existe un método popular de demostración de un teorema $\mathbf{H} \Rightarrow \mathbf{T}$, conocido con el nombre de *reducción al absurdo* que, en esencia, es una combinación de los principios anteriormente expuestos. Se comienza rechazando la tesis **T**, es decir aceptando $\sim\mathbf{T}$, según el principio de tercero excluido; si esto lleva consigo la aceptación de $\sim\mathbf{H}$, entonces, de acuerdo con el principio de contradicción, es preciso rechazar **H**, lo cual es absurdo porque en un teorema la hipótesis se supone cierta.

1.5. CUANTIFICADORES

En Matemáticas se usan frecuentemente expresiones como éstas:

$x^2 + 1 > 0$
«x es primo con y»
$2^n > n^2$, etc.

en las que aparecen una o más letras (variables) susceptibles de representar elementos de uno o más conjuntos, que pueden ser numéricos o no.

Cuando se hace tal sustitución, dichas expresiones se transforman en sentencias.

Para fijar ideas, supongamos una expresión $p(x)$, donde la variable x puede sustituirse por un elemento del conjunto A.

A la pregunta ¿cuántos elementos de A hacen cierta $p(x)$?, puede contestarse de dos maneras, con las sentencias siguientes:

Todo elemento del conjunto A hace cierta $p(x)$. En símbolos:

$$\forall\, x \in A,\, p(x) \quad \text{(cuantificador universal)}.$$

Al menos existe un elemento de A que hace cierta $p(x)$. En símbolos:

$$\exists\, x \in A,\, p(x) \quad \text{(cuantificador existencial)}.$$

También cabría la posibilidad de que ningún elemento del conjunto A hiciese cierta $p(x)$; pero entonces

$$\forall\, x \in A,\, \sim p(x).$$

1.6. CONJUNTOS

La idea de conjunto es radical en la Matemática y, como tal, difícil de plasmar en una definición más o menos satisfactoria. Así, hablamos del conjunto de letras del alfabeto latino, del conjunto de islas de un archipiélago o del conjunto de hombres que viven en el planeta Tierra; todos ellos con una nota común, que se pueden contar sus elementos. Sin embargo, también podemos pensar en el conjunto de estrellas o en el conjunto de ideas habidas y por haber, aunque no las podamos contar.

Aceptaremos sin discusión el

AXIOMA DE EXISTENCIA: *Existe un conjunto.*

Lo característico de los conjuntos es que poseen elementos, aunque se admite la existencia de un conjunto distinguido ϕ que no tiene elementos, llamado conjunto vacío.

Si x es un elemento del conjunto A, se dice que «x pertenece a A», y se escribe con el símbolo $x \in A$.

Para indicar que un elemento x no pertenece al conjunto A, se emplea el símbolo $x \notin A$.

En el esquema que estamos introduciendo [2], tanto los términos «conjunto» y «elemento» como la relación existente entre ellos son indefinidos.

La igualdad entre conjuntos se establece mediante el

AXIOMA DE EXTENSIÓN: *Dos conjuntos* A *y* B *son iguales si y solo si todo elemento de* A *pertenece a* B *y todo elemento de* B *pertenece a* A.

Aunque un conjunto se puede definir «enumerando» todos sus elementos, como por ejemplo el conjunto de los días de la semana

{lunes, martes, miércoles, jueves viernes, sábado, domingo}

esto solo es posible cuando el conjunto es finito.

Así, es muy frecuente en Matemáticas, la construcción de conjuntos cuyos elementos satisfacen ciertas propiedades restrictivas, dentro de un conjunto más amplio; lo que se consigue mediante el siguiente

AXIOMA DE ESPECIFICACIÓN:

Sea A un conjunto y $p(x)$ una proposición, donde la variable x puede sustituirse por un elemento del conjunto A.

Existe un conjunto B*, formado por todos los elementos* a *de* A *tales que la sentencia* p(a*) es verdadera*; se indica mediante el símbolo

$$B = \{a/a \in A, p(a)\}.$$

Sin embargo, no siempre se obtienen resultados satisfactorios; así por ejemplo, suponiendo que A es «el conjunto de todos los conjuntos», parece claro que con el axioma precedente se podría construir este otro conjunto

$$B = \{a/a \in A, a \notin a\}$$

es decir, B estaría formado por todos los conjuntos que no se pertenecen a sí mismos; pero, ¿es esto posible?, porque si B es efectivamente un conjunto, de su definición se deduce

$$B \in B \Rightarrow B \notin B \text{ o bien } B \notin B \Rightarrow B \in B.$$

[2] No se pretende que sea rigurosamente axiomático.

Esta contradicción se conoce con el nombre de *paradoja de Bertrand Russell*.

En forma popular, ya aparece en el Quijote:

> «Si alguno pasase por este puente de una parte a otra, ha de jurar primero adónde y a qué va; y si jurare verdad, déjese pasar, y si dijere mentira, muera por ello, ahorcado en la horca que allí se muestra, sin remisión alguna. Sucedió que, tomando juramento a un hombre juró y dijo que para el juramento que hacía, que iba a morir en aquella horca».
>
> Los jueces sólo pueden proceder de una de estas dos maneras: o dejan en libertad a ese hombre, pero entonces el juramento es falso y debe ir a la horca; o le condenan, en cuyo caso no puede ir a la horca por haber jurado verdad.

Otra forma muy conocida de la misma paradoja se da cuando alguien dice:

> «El barbero de mi pueblo solo afeita a aquellos hombres que no se afeitan a sí mismos»; porque entonces ¿quién afeita al barbero? No puede afeitarse a sí mismo pero, si se deja la barba, tiene que afeitarse.

Para eliminar la paradoja de Bertran Russell, bastaría desconsiderar a B como conjunto, y exigir en la definición de un conjunto la siguiente regla: *No puede ocurrir que un elemento pertenezca y no pertenezca a un conjunto* (lo que no quiere decir que se disponga de un criterio para decidir si pertenece o no a él).

Sin embargo, incluso con esta restricción, las Matemáticas no se liberan de otros escollos que aparecen inexorablemente en todo desarrollo axiomático [3].

---

[3] Kurt Gödel, en 1931, hizo tambalearse toda la pretendida consistencia de las Matemáticas, removiendo sus fundamentos y demostrando que hay resultados de la Aritmética que no pueden obtenerse con ningún sistema de axiomas.

La paradoja de Bertran Russell y otras, como la famosa de Cantor (véase la consecuencia del teorema 3.2.6), fueron explicadas por los seguidores de la *tesis logicista*, consistente en afirmar que la Aritmética es una parte de la Lógica. Para ellos, las paradojas que aparecen en la formulación de la Aritmética son, en última instancia, de naturaleza lógica.

Sin embargo, para los autores contrarios al logicismo, las paradojas de la teoría de conjuntos no eran lógicas sino estrictamente matemáticas, y podían explicarse por el uso incorrecto de la noción de infinito, ya que se da por hecho y definido el conjunto de todos los conjuntos, cuando en realidad no puede ser dado como dato actual.

ÍNDICE

Volumen II

OBJETIVOS Y SINOPSIS 11

20. INTEGRALES. DEFINICIONES Y PROPIEDADES 13
- 20.1. Integral de Darboux 15
- 20.2. Integral de Riemann 23
- 20.3. Integral de Lebesgue 25
- 20.4. Integral de Riemann-Stieltjes 28
- 20.5. Propiedades generales de la integral 31
- 20.6. Integral de una función compuesta 33
- 20.7. Propiedades de monotonía 35
- 20.8. Teoremas del valor medio 38
- 20.9. Otras propiedades de la integral 42

21. CÁLCULO DE INTEGRALES 47
- 21.1. Regla de Barrow. Cambio de variable e integración por partes. 49
- 21.2. Generalización de los teoremas del valor medio 56
- 21.3. Integración de funciones racionales 61
- 21.4. Área de un recinto plano 66
- 21.5. Longitud de un arco simple 70
- 21.6. Área lateral y volumen de un cuerpo de revolución 77
- 21.7. Integrales elípticas 80

22. INTEGRALES IMPROPIAS 87
- 22.1. Integrales en intervalos no acotados 89
- 22.2. Criterios de convergencia de integrales impropias de 1.ª especie, cuyas funciones integrando son no negativas 94
- 22.3. Convergencia absoluta y no absoluta de integrales impropias de 1.ª especie 99
- 22.4. Integrales de funciones no acotadas 103
- 22.5. Criterios de convergencia de integrales impropias de 2.ª especie, cuyas funciones integrando son no negativas 107
- 22.6. Convergencia absoluta y no absoluta de integrales impropias de 2.ª especie 113

22.7. Integrales eulerianas 114
22.8. Integrales de Frunalli 132

23. INTEGRACIÓN PARAMÉTRICA 141
23.1. Integrales de extremos constantes 143
23.2. Integrales de extremos variables 148
23.3. Integrales paramétricas impropias. Convergencia uniforme. Transformada de Laplace 153
23.4. Derivabilidad de las integrales paramétricas impropias 163
23.5. Integrabilidad de las integrales paramétricas impropias 169

24. SUCESIONES FUNCIONALES 177
24.1. Sucesiones de funciones. Convergencia uniforme 179
24.2. Continuidad de la función límite 188
24.3. Derivabilidad de la función límite 193
24.4. Integrabilidad de la función límite 198

25. SERIES FUNCIONALES 203
25.1. Series de funciones. Convergencia uniforme 205
25.2. Propiedades de las series funcionales 213
25.3. Series de potencias 220
25.4. Desarrollos en serie de potencias 230
25.5. Series trigonométricas 239
25.6. Series de Fourier 248
25.7. Criterios de convergencia de las series de Fourier 255

APÉNDICE I: ÓRDENES DE VARIACIÓN DE LAS SUCESIONES DE NÚMEROS REALES 279

APÉNDICE II: ÓRDENES DE VARIACIÓN DE LAS FUNCIONES REALES 287

APÉNDICE III: MEDIDA DE LEBESGUE Y FUNCIONES DE CONJUNTO 299
Conjuntos de Borel en R 301
Medida exterior de Lebesgue 302
Medida de Lebesgue 303
Sucesiones expansivas y contráctiles 310
Otras funciones de conjunto 312

APÉNDICE IV: FUNCIONES DE VARIACIÓN ACOTADA 317

APÉNDICE V: PROBLEMAS 327
1. Conjuntos. Relaciones de orden. Espacios topológicos 329
2. Sucesiones numéricas 352
3. Series numéricas 380
4. Funciones reales de una variable 402
5. Funciones reales de dos o más variables 420
6. Integrales 440
7. Sucesiones y series funcionales 474
8. Complejos 507

BIBLIOGRAFÍA 525

20
Integrales. Definiciones y propiedades

20.1. Integral de Darboux

20.2. Integral de Riemann

20.3. Integral de Lebesgue

20.4. Integral de Riemann-Stieltjes

20.5. Propiedades generales de la integral

20.6. Integral de una función compuesta

20.7. Propiedades de monotonía

20.8. Teoremas del valor medio

20.9. Otras propiedades de la integral

20.1. INTEGRAL DE DARBOUX

Sea $f(x)$ una función real , de la variable real x, definida y acotada en los puntos del segmento $[a, b]$. Si en este segmento se considera la partición P

$$a = x_1 < x_2 < \ldots < x_n < x_{n+1} = b$$

obtenida intercalando $n - 1$ puntos entre los extremos a y b, quedan construidos n subintervalos U_i (abiertos, cerrados o semiabiertos), de extremos x_i y x_{i+1}. Pues bien, para cada uno de estos subintervalos se definen los números reales

$$m_i = \inf_{x \in U_i} f(x), \qquad M_i = \sup_{x \in U_i} f(x), \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

cuya existencia está asegurada por ser $f(x)$ una función acotada en el segmento $[a, b]$.

En el conjunto $\mathcal{P}$ de todas las particiones posibles del segmento $[a, b]$ se define la relación de orden

$$\forall\, P_1, P_2 \in \mathcal{P},\ [P_1 \geqslant^c P_2 \Leftrightarrow C(P_2) \subseteq C(P_1)]$$

donde $C(P_1)$ y $C(P_2)$ son los conjuntos de puntos que definen a las particiones P_1 y P_2, respectivamente. Esta relación es filtrante, ya que si P_1 y P_2 son dos particiones cualesquiera de $\mathcal{P}$, existe otra partición P_3 también de $\mathcal{P}$ (por ejemplo la que resulta de reunir los puntos de P_1 con los de P_2) tal que

$$(P_3 \geqslant^c P_1) \wedge (P_3 \geqslant^c P_2).$$

Si a cada partición $P \in \mathcal{P}$ le hacemos corresponder los números reales

$$s(P, f) = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_{i+1} - x_i) \qquad \textit{suma inferior de Darboux}$$

y

$$S(P, f) = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_{i+1} - x_i) \qquad \textit{suma superior de Darboux}$$

se obtienen dos aplicaciones, ambas definidas en el conjunto $\mathcal{P}$.

TEOREMA 20.1.1

El conjunto de todas las sumas inferiores (superiores) de Darboux está acotado superiormente (inferiormente) por cualquiera de las sumas superiores (inferiores).

En efecto:

Por ser filtrante la relación de orden definida anteriormente, si P_1 y P_2 son dos particiones cualesquiera de $\mathcal{P}$, existe otra partición P_3 también de $\mathcal{P}$ tal que

$$s(P_1, f) \leq s(P_3, f) \leq S(P_3, f) \leq S(P_1, f)$$
$$s(P_2, f) \leq s(P_3, f) \leq S(P_3, f) \leq S(P_2, f)$$

de donde

$$s(P_1, f) \leq S(P_2, f) \quad \text{y} \quad s(P_2, f) \leq S(P_1, f).$$

Del teorema 20.1.1 se deduce inmediatamente que existen sendos números

$$\sup_{P \in \mathcal{P}} s(P, f) \quad \text{e} \quad \inf_{P \in \mathcal{P}} S(P, f)$$

llamados **integral inferior de Darboux** e **integral superior de Darboux**, respectivamente, de la función $f(x)$ sobre el segmento $[a, b]$. Se suelen representar con los símbolos

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx \quad \text{e} \quad \overline{\int_a^b} f(x)\,dx$$

respectivamente.

En particular, si las integrales inferior y superior de Darboux son coincidentes, o de forma equivalente, si elegido de antemano el número real y arbitrario $\epsilon > 0$, existe una partición $P \in \mathcal{P}$ tal que

$$S(P, f) - s(P, f) < \epsilon$$

se dice que *la función* f(x) *es integrable en el sentido de Darboux sobre el segmento [*a, b*]* (fig. 102). El número común se llama **integral de Darboux** y se representa con el símbolo

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

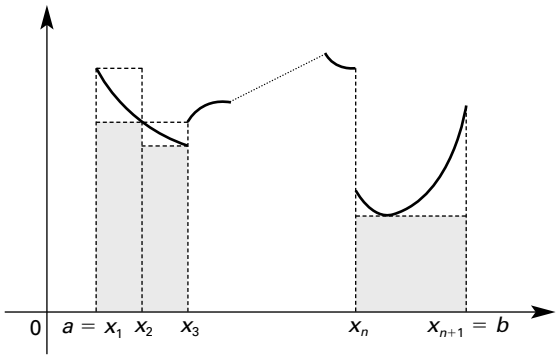

Figura 102. Integral de Darboux.

Ejemplo 1:

Para estudiar la integrabilidad de la función $f(x) = 1/x$ sobre el segmento [1, 2] se define la partición P

$$1 = x_1 < x_2 = r < x_3 = r^2 < \ldots < x_{n+1} = r^n = 2$$

donde

$$r = \sqrt[n]{2}.$$

Las sumas inferior y superior de Darboux, correspondientes a esa partición son

$$s(P, f) = \sum_{i=1}^{n} \frac{r^i - r^{i-1}}{r^i} = (r - 1) \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{r^{i-1}}{r^i} = \frac{n(r - 1)}{r}$$

$$S(P, f) = \sum_{i=1}^{n} \frac{r^i - r^{i-1}}{r^{i-1}} = (r - 1) \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{r^{i-1}}{r^{i-1}} = n(r - 1).$$

Elegido el número real y arbitrario $\epsilon > 0$, la diferencia

$$S(P, f) - s(P, f) = \frac{n(r - 1)^2}{r} = \frac{n(\sqrt[n]{2} - 1)^2}{\sqrt[n]{2}} < \epsilon$$

sin más que tomar n convenientemente grande; y en efecto

$$\frac{n(\sqrt[n]{2}-1)^2}{\sqrt[n]{2}} \sim^c n\left(\frac{\log 2}{n}\right)^2 = \frac{(\log 2)^2}{n} \to 0$$

cuando $n \to +\infty$.

Ejemplo 2:

Sea la función $f(x)$ definida en el segmento [0, 1] mediante

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \text{ es irracional} \\ \dfrac{1}{q} & \text{si } x = \dfrac{p}{q}, \text{ con } q > 0 \text{ y } p, q \text{ primos entre sí} \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Puesto que en todo subintervalo del segmento [0, 1] hay puntos de abscisa irracional, la integral inferior de Darboux es nula.

En cuanto a la integral superior, demostraremos que existe una partición P del segmento [0, 1] tal que la suma superior $S(P, f) < \epsilon$, donde ϵ es un número arbitrario, real y positivo. Para ello consideremos el conjunto de puntos de abscisa racional

$$\{0 = r_1, r_2, r_3, \ldots, r_n = 1\}$$

tales que $f(r_i) \geq \epsilon/2$, y construyamos en el segmento [0, 1] la partición P

$$0 = x_1 < x_2 < \ldots < x_{2n-1} < x_{2n} = 1$$

de forma que se cumplan las siguientes condiciones:

1.ª $x_2 < \epsilon/2n$.

2.ª Cada par de puntos x_{2i-1} y x_{2i} $(i = 2, 3, n-1)$ satisface las relaciones

$$x_{2i-1} < r_i < x_{2i}, \qquad x_{2i} - x_{2i-1} < \epsilon/2n.$$

3.ª Los puntos x_{2n-1} y x_{2n} satisfacen las relaciones

$$x_{2n-1} < r_n = x_{2n}, \qquad x_{2n} - x_{2n-1} < \epsilon/2n.$$

En estas condiciones, los puntos de abscisa racional r_i quedan «recubiertos» por los subintervalos de extremos x_{2i} y x_{2i-1} $(i = 1, 2, \ldots, n)$, todos ellos de longitud menor que $\epsilon/2n$.

La suma superior de Darboux

$$S(P,f)=\sum_{i=1}^{2n-1}M_i(x_{i+1}-x_i)=\sum_{i=1}^{n-1}M_{2i}(x_{2i+1}-x_{2i})+\sum_{i=1}^{n}M_{2i-1}(x_{2i}-x_{2i-1})$$

$$<\frac{\epsilon}{2}\sum_{i=1}^{n-1}(x_{2i+1}-x_{2i})\frac{\epsilon}{2n}\sum_{i=1}^{n}M_{2i-1}<\frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon n}{2n}=\epsilon.$$

Nótese que las integrales inferior y superior de Darboux, definidas anteriormente, no son otra cosa sino los valores límite de las aplicaciones $s(P,f)$ y $S(P,f)$, respectivamente, siguiendo el filtro $\mathcal{F}_c$ «por intercalación» en el conjunto $\mathcal{P}$ de todas las particiones posibles del segmento $[a,b]$

$$\underline{\int_a^b}f(x)\,dx=\lim_{\mathcal{F}_c}s(P,f)\quad\text{e}\quad\overline{\int_a^b}f(x)\,dx=\lim_{\mathcal{F}_c}S(P,f).$$

También podría haberse definido la integral de Darboux partiendo de otra relación de orden en el conjunto $\mathcal{P}$; por ejemplo, si $\mathcal{N}(P)$ es la *norma de la partición P*, es decir, la mayor longitud entre dos puntos consecutivos de la partición, se define la relación filtrante «según la norma»

$$\forall\,P_1,P_2\in\mathcal{P},\,[P_1\geqslant^n P_2\Leftrightarrow(P_1=P_2)\vee\mathcal{N}(P_1)<\mathcal{N}(P_2)].$$

En general, las integrales inferior y superior de Darboux siguiendo el filtro $\mathcal{F}_n$ «según la norma» no tienen por qué coincidir con las definidas anteriormente siguiendo el filtro $\mathcal{F}_c$ «por intercalación», es decir

$$\lim_{\mathcal{F}_c}s(P,f)\neq\lim_{\mathcal{F}_n}s(P,f)\quad\text{y}\quad\lim_{\mathcal{F}_c}S(P,f)\neq\lim_{\mathcal{F}_n}S(P,f)$$

pero si la función $f(x)$ es integrable en el sentido de Darboux sobre el segmento $[a,b]$, esto es, la diferencia $S(P,f)-s(P,f)$ es un infinitésimo siguiendo el filtro $\mathcal{F}_c$, también es un infinitésimo siguiendo el filtro $\mathcal{F}_n$, y recíprocamente, como establece el siguiente

TEOREMA 20.1.2

La condición necesaria y suficiente para que la función f(x) *sea integrable en el sentido de Darboux sobre el segmento [*a, b*] es que*

$$\forall\,\epsilon>0,\,\exists\,\delta>0,\ \text{tal que}\ S(P,f)-s(P,f)<\epsilon$$

cualquiera que sea la partición P *de norma* $\mathcal{N}$(P) $<\delta$.

En efecto:

La condición es necesaria porque, de lo contrario, existiría al menos un número $\epsilon > 0$ tal que, para todo número natural n, se podría construir una partición P^* tal que

$$\mathcal{N}(P^*) < 1/n \quad \text{y} \quad S(P^*, f) - s(P^*, f) \geq \epsilon.$$

Ahora bien, si P es una partición cualquiera, y representamos por $P \cup P^*$ a la partición que resulta de reunir los puntos de P y P^*, resulta

$$S(P, f) - s(P, f) \geq S(P \cup P^*, f) - s(P \cup P^*, f) \geq \epsilon$$

ya que las diferencias $S(P \cup P^*, f) - s(P \cup P^*, f)$ y $S(P^*, f) - s(P^*, f)$ difieren entre sí en menos de lo que se desee, sin más que tomar n suficientemente grande. En definitiva, existe un número $\epsilon > 0$ tal que, para toda partición P, se verifica

$$S(P, f) - s(P, f) \geq \epsilon$$

lo que contradice la hipótesis de ser $f(x)$ integrable en el sentido de Darboux.

Para demostrar la condición suficiente basta tener en cuenta que entre los filtros $\mathcal{F}_c$ «por intercalación» y $\mathcal{F}_n$ «según la norma» existe la relación

$$\mathcal{F}_n \preccurlyeq \mathcal{F}_c$$

(véase el ejemplo que sigue al teorema 4.3.3).

Enseguida estudiaremos otro criterio de integrabilidad en el sentido de Darboux de la función $f(x)$ sobre el segmento $[a, b]$, precisamente cuando el conjunto de puntos del segmento donde la función es discontinua tiene «medida nula» [1]. Pero antes daremos una idea somera del concepto de medida nula:

Se dice que el conjunto A de la recta real tiene **medida nula** si se puede determinar una sucesión recubridora de intervalos abiertos y finitos $\{I_n\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ tal que

$$A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$$

[1] La medida de Lebesgue es una función de conjunto que se estudia en el Apéndice III.

de forma que la suma de longitudes de todos esos intervalos sea tan pequeña como se desee.

Puede comprobarse fácilmente que todo conjunto finito de la recta real tiene medida nula. Más aún, si el conjunto es numerable $\{a_n\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$, y $\epsilon > 0$ es un número real y arbitrario, basta recubrir cada punto a_n con un intervalo abierto de longitud $\epsilon/2^n$ para que la suma de longitudes

$$\frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2^2} + \ldots + \frac{\epsilon}{2^n} + \ldots = \epsilon$$

sea tan pequeña como se desee; por tanto, los conjuntos numerables también tienen medida nula.

TEOREMA 20.1.3 (Vitali-Lebesgue)

La condición necesaria y suficiente para que la función f(x) *sea integrable en el sentido de Darboux sobre el segmento [*a, b*] es que el conjunto* A *de puntos de ese segmento donde la función es discontinua tenga medida nula. Eventualmente,* A *puede ser el conjunto vacío*.

En efecto:

Supongamos que la función $f(x)$ es integrable en el sentido de Darboux sobre el segmento $[a, b]$. Si el conjunto de sus discontinuidades es distinto del vacío, llamaremos A_n al subconjunto de A, donde la «oscilación» [2] es mayor o igual a $1/n$. La sucesión $\{A_n\}$ es «expansiva», esto es $A_n \subseteq A_{n+1}$, y por tanto $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$.

Por reducción al absurdo, si la medida de A no fuese nula, entonces existiría al menos un elemento A_m de esa sucesión, cuya medida también sería no nula. Pero entonces se podría determinar al menos un número real y arbitrario $\epsilon > 0$ tal que, para toda sucesión recubridora de A_m con interva-

---

[2] Se llama *oscilación* de la función real $f(x)$ en el conjunto C donde está definida, a la diferencia

$$\sup_{x \in C} f(x) = \inf_{x \in C} (f)$$

los abiertos y finitos, la suma de las longitudes de éstos sería mayor o igual a ϵ. Ahora bien, cualquiera que sea la partición P del segmento $[a, b]$

$$a = x_1 < x_2 < \ldots < x_n < x_{n+1} = b$$

queda definida una sucesión recubridora de A_m con intervalos abiertos y finitos, de forma que

$$S(P, f) - s(P, f) = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)(x_{i+1} - x_i) \geq \frac{\epsilon}{m}$$

y esto significa que $f(x)$ no es integrable en el sentido de Darboux sobre el segmento $[a, b]$, en contra de la hipótesis.

Recíprocamente, si el conjunto A tiene medida nula, dado el número real y arbitrario $\epsilon > 0$, se puede construir una partición P del segmento $[a, b]$, de forma que contenga una sucesión recubridora de A de intervalos abiertos cuya suma de longitudes sea menor que ϵ; y que, además, la oscilación de la función en los subintervalos restantes sea menor que ϵ. En estas condiciones

$$S(P, f) - s(P, f) < 2M \cdot \epsilon + (b - a) \cdot \epsilon$$

donde M es el mayor de los números

$$|\sup_{x \in [a, b]} f(x)| \quad \text{y} \quad |\inf_{x \in [a, b]} f(x)|.$$

Ejemplos:

De acuerdo con el teorema 20.1.3, si la función $f(x)$ es continua en el segmento $[a, b]$, entonces es integrable en el sentido de Darboux sobre él.

Si la función $f(x)$ es monótona (creciente o decreciente) y acotada en el segmento $[a, b]$, el teorema 9.7.5 permite asegurar que el conjunto de sus discontinuidades es numerable. Como este conjunto tiene medida nula, la función $f(x)$ es integrable en el sentido de Darboux sobre el segmento $[a, b]$.

Si C es el «discontinuo ternario» de Cantor, construido sobre el segmento $[0, 1]$ (véanse los ejemplos que siguen al teorema 3.2.5), entonces la función

$$f(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in C \\ 0 \text{ si } x \notin C \end{cases}$$

es integrable en el sentido de Darboux sobre el segmento [0, 1], puesto que lo que se suprime en la construcción de C tiene una medida igual a

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{2^2}{3^3} + \ldots + \frac{2^n}{3^{n+1}} + \ldots = \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{2}{3}} = 1.$$

Sin embargo, la «función de Dirichlet»

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \text{ es irracional} \\ 1 & \text{si } x \text{ es racional} \end{cases}$$

no es integrable en el sentido de Darboux sobre el segmento [0, 1], ya que en cualquier subintervalo de [0, 1] el extremo inferior de $f(x)$ es 0, y el extremo superior es 1. Por tanto, las sumas de Darboux asociadas a una partición cualquiera valen 0 y 1, respectivamente.

20.2. INTEGRAL DE RIEMANN

Sea $f(x)$ una función real de la variable real x, definida y acotada en los puntos del segmento $[a, b]$. Si en este segmento se considera la partición P

$$a = x_1 < x_2 < \ldots < x_n < x_{n+1} = b$$

obtenida intercalando $n - 1$ puntos entre los extremos a y b, quedan construidos n subintervalos U_i (abiertos, cerrados o semiabiertos), de extremos x_i y x_{i+1}. Eligiendo un punto ξ_i en cada uno de estos subintervalos

$$\xi_i \in U_i, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

y llamando $\mathcal{P}$ al conjunto de todas las particiones posibles del segmento $[a, b]$, la expresión

$$\sigma(P, \xi_i, f) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i)$$

recibe el nombre de *suma de Riemann*, correspondiente a la partición $P \in \mathcal{P}$ y a la elección de puntos ξ_i.

En particular, si elegido de antemano el número real y arbitrario $\epsilon > 0$, existe una partición $P \in \mathcal{P}$ tal que

$$|\sigma(P, \xi_i, f) - \sigma(P, \xi_i^*, f)| < \epsilon$$

cualesquiera que sean las elecciones ξ_i y ξ_i^*, hechas sobre la partición P, diremos que *la función* f(x) *es integrable en el sentido de Riemann sobre el segmento [*a, b*]*.

Esta formulación del concepto de integral es equivalente a la de Darboux, como se demuestra en el siguiente

TEOREMA 20.2.1

La condición necesaria y suficiente para que la función f(x) *sea integrable en el sentido de Riemann sobre el segmento [*a, b*] es que sea integrable en el sentido de Darboux sobre el mismo segmento*.

En efecto:

Si la función $f(x)$ es integrable en el sentido de Riemann sobre el segmento $[a, b]$, elegido el número real y arbitrario $\epsilon > 0$, de la definición de extremo superior M_i se deduce que entre M_i y $M_i - \epsilon$ existe al menos un valor $f(\xi_i)$, es decir

$$M_i < f(\xi_i) + \epsilon.$$

Análogamente, de la definición de extremo inferior m_i se deduce que entre m_i y $m_i + \epsilon$ existe al menos un valor $f(\xi_i^*)$, es decir

$$m_i > f(\xi_i^*) - \epsilon.$$

En consecuencia

$$\sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)(x_{i+1} - x_i) < \sum_{i=1}^{n} [f(\xi_i) - f(\xi_i^*)](x_{i+1} - x_i) + 2\epsilon(b - a)$$
$$= \sigma(P, \xi, f) - \sigma(P, \xi_i^*, f) + 2\epsilon(b - a)$$

y la función $f(x)$ es integrable en el sentido de Darboux sobre el segmento $[a, b]$.

Recíprocamente, si la función $f(x)$ es integrable en el sentido de Darboux sobre el segmento $[a, b]$, de las desigualdades

$$s(P, f) \leq \sigma(P, \xi_i, f) \leq S(P, f)$$

se deduce inmediatamente que $f(x)$ también es integrable en el sentido de Riemann sobre dicho segmento.

Para extender el concepto de integral de una función a conjuntos de la recta real más amplios que los segmentos, es preciso introducir una medida de esos conjuntos, por ejemplo la «medida de Lebesgue» que se estudia en el Apéndice III [3].

20.3. INTEGRAL DE LEBESGUE

Sea $f(x)$ una función real de la variable real x, definida y acotada sobre un conjunto de Borel, de medida finita $l(B) < +\infty$ [4], y sea P una partición del conjunto B en n conjuntos disjuntos, también de Borel

$$B = B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_n, \text{ con } B_i \cap B_j = \phi \text{ para } i \neq j.$$

Para cada uno de estos conjuntos se definen los números reales

$$m_i = \inf_{x \in B_i} f(x), \qquad M_i = \sup_{x \in B_i} f(x), \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

cuya existencia está asegurada por ser $f(x)$ una función acotada en el conjunto B.

Considerando el conjunto $\mathcal{P}$ de todas las particiones posibles de B, se definen las sumas inferior y superior de Darboux, asociadas a la partición $P \in \mathcal{P}$

$$s(P, f) = \sum_{i=1}^{n} m_i l(B_i) \quad \text{y} \quad S(P, f) = \sum_{i=1}^{n} M_i l(B_i)$$

---

[3] Esta medida es un recurso de gran importancia, tanto desde un punto de vista teórico como práctico. Se trata de la generalización más natural de la «longitud» en la recta real, y nosotros la aplicaremos a los *conjuntos de Borel*, es decir a los subconjuntos de la recta que se obtienen a partir de los intervalos abiertos (finitos) y las semirrectas, efectuando entre ellos las operaciones conjuntistas de unión y complementario, un número de veces finito o infinito numerable.

[4] Para obtener la integral de Lebesgue en toda su generalidad habría que suponer que B es un conjunto medible. Sin embargo, no es una restricción demasiado fuerte considerar únicamente conjuntos de Borel, ya que todo conjunto medible es la reunión de un conjunto de Borel con uno de medida nula. Además, existe una razón práctica, y es que los conjuntos de Borel son los más utilizados en las aplicaciones.