Índice general

Capítulo 2

Análisis de sistemas y señales bidimensionales

Muchos de los fenómenos físicos presentan la propiedad fundamental de que su respuesta a varios estímulos que actúan simultáneamente es igual a la suma de las respuestas que cada estímulo produciría si actuara solo. Tales fenómenos se dicen que son *lineales* y la propiedad que manifiestan se llama *linealidad.* Los circuitos eléctricos compuestos de resistencias, condensadores e inductancias son muy a menudo lineales para una extensa gama de señales de entrada. Por otra parte, como veremos pronto, la linealidad de las ecuaciones de onda que describen la propagación de la luz a través de la mayor parte de los medios nos conduce de manera natural a considerar la formación de imágenes ópticas como transformaciones lineales de la distribución luminosa llamada "objeto" en la distribución luminosa llamada "imagen".

Esta sencilla propiedad de linealidad conduce a una gran simplificación en la descripción matemática de tales fenómenos y es la base de un edificio matemático que llamaremos en lo sucesivo *teoría de sistemas lineales.* La gran ventaja que ofrece la linealidad es su capacidad de poder expresar la respuesta a un estímulo complicado (que puede ser una diferencia de potencial, una corriente, una amplitud o una intensidad luminosa) en forma de términos que son las respuestas a ciertos estímulos "elementales". Así, cuando un estímulo se descompone como una combinación lineal de estímulos elementales, cada uno de los cuales produce una respuesta conocida de forma conveniente, en virtud de la propiedad de linealidad, se puede encontrar la respuesta global como la combinación lineal de las respuestas a los estímulos elementales.

En este capítulo revisaremos algunas herramientas matemáticas muy útiles en la descripción de sistemas lineales y presentaremos algunas de las descomposiciones matemáticas empleadas frecuentemente en el análisis de estos fenómenos.

En los siguientes capítulos consideraremos estímulos (señales de entrada del sistema) y respuestas (señales de salida del sistema), que podrán ser magnitudes físicas diferentes. Si la iluminación utilizada en un sistema óptico posee una propiedad llamada *coherencia espacial,* veremos que conviene considerar la luz como una distribución espacial de amplitud con *valores complejos.* Cuando la iluminación no presenta coherencia espacial, es más conveniente considerar la luz como una distribución espacial de intensidad con *valores reales.* Nos ocuparemos aquí del análisis de sistemas lineales con magnitudes de entrada complejas; los resultados relativos a magnitudes de entrada reales serán considerados como casos particulares de esta teoría.

2.1. Análisis de Fourier en dos dimensiones

Una herramienta matemática extraordinariamente útil para el estudio de los fenómenos tanto lineales como no lineales es el *análisis de Fourier.* Éste ha sido ampliamente utilizado en el estudio de circuitos eléctricos y de sistemas de comunicación. Se supone que el lector conoce ya la teoría de Fourier en tales aplicaciones y, por consiguiente, está familiarizado con el análisis de funciones de una sola variable (por ejemplo, el tiempo). Para una revisión de los conceptos fundamentales ver los libros de Papoulis [226], Bracewell [32] y Gray y Goodman [131]. Un tratamiento particularmente interesante es el de Bracewell [33]. Nuestro objetivo aquí se limita a familiarizar al lector con el análisis de funciones de *dos* variables independientes. No buscaremos un gran rigor matemático sino que adoptaremos más bien la manera en que este tema es tratado en los textos destinados a estudiantes de ingeniería.

2.1.1. Definición y condiciones de existencia

La *transformada de Fourier* (alternativamente *espectro de Fourier* o *espectro de frecuencias*) de una función g (en general, compleja) de dos variables independientes x e y, que denotaremos por $\mathcal{F}\{g\}$, se define como:[1]

$$\mathcal{F}\{g\} = \iint_{-\infty}^{\infty} g(x,y)\, \exp\left[-j2\pi(f_X x + f_Y y)\right] dx\, dy. \qquad \text{(2-1)}$$

La transformada así definida es también una función compleja de dos variables independientes, f_X y f_Y, que consideraremos de manera general como *frecuencias.* De manera análoga la *transformada de Fourier inversa* de una función $G(f_X, f_Y)$,

[1] Cuando aparece un límite de integración arriba y abajo de una doble integral, dicho límite se aplica a las dos integrales.

representada por $\mathcal{F}^{-1}\{G\}$, se define como:

$$\mathcal{F}^{-1}\{G\} = \iint_{-\infty}^{\infty} G(f_X, f_Y) \exp\left[j2\pi(f_X x + f_Y y)\right] df_X\, df_Y. \tag{2-2}$$

Hacemos notar que las transformaciones directa e inversa son operaciones matemáticas completamente análogas y no se diferencian más que por el signo del exponente que se encuentra en el integrando. Algunas veces se denomina a la transformada de Fourier inversa como la representación *integral de Fourier* de una función $g(x, y)$.

Antes de discutir las propiedades de la transformada de Fourier y de su inversa, debemos preguntarnos bajo qué condiciones las definiciones (2-1) y (2-2) tienen significado. Para ciertas funciones estas integrales pueden no existir en el sentido matemático del término y, por consiguiente, esta discusión sería incompleta si no se mencionasen, aunque sea brevemente, las "condiciones de existencia". Entre los diversos conjuntos de posibles condiciones *suficientes* de existencia de (2-1) el más usual es el siguiente:

1. g debe ser absolutamente integrable en el plano infinito (x, y).
2. g debe tener solamente un número finito de discontinuidades y un número finito de máximos y mínimos en un rectángulo cualquiera de superficie finita.
3. g no debe tener discontinuidades infinitas.

En general, una cualquiera de estas exigencias puede no ser rigurosamente cumplida a condición de reforzar una de las condiciones que la acompañan o incluso las dos, pero tales consideraciones nos conducirían demasiado lejos de nuestros propósitos.

Como Bracewell [32] ha hecho notar, la "posibilidad física es una condición suficiente para justificar la existencia de una transformación". Sin embargo, es a menudo cómodo en el análisis de los sistemas representar las ondas físicas verdaderas por funciones matemáticas ideales; para tales funciones una o varias de las condiciones de existencia precedentes pueden no verificarse. Por ejemplo, se representa habitualmente un gran impulso de corta duración por una función llamada delta de Dirac[2], expresada de la siguiente manera:

$$\delta(t) = \lim_{N\to\infty} N \exp(-N^2 \pi t^2), \tag{2-3}$$

donde la operación límite proporciona una construcción mental cómoda, pero no debe tomarse en cuenta literalmente. Para más detalles ver el Apéndice A.

[2]Para una discusión más detallada de la función delta, incluyendo las definiciones, véase el Apéndice A.

De igual forma, una fuente puntual de luz viene representada por la función equivalente en dos dimensiones:

$$\delta(x,y) = \lim_{N\to\infty} N^2 \exp[-N^2\pi(x^2+y^2)]. \tag{2-4}$$

Tales "funciones", infinitas en el origen y nulas en el resto, presentan una discontinuidad infinita y por consiguiente no satisfacen la tercera condición de existencia. Se encuentran fácilmente otros ejemplos importantes; como son las funciones:

$$f(x,y) = 1 \qquad \text{y} \qquad f(x,y) = \cos(2\pi f_X x) \tag{2-5}$$

que no satisfacen la primera condición de existencia.

Si la mayoría de las funciones que nos interesan deben estar incluidas en el marco del análisis de Fourier, es evidente que se necesita generalizar de alguna manera la definición (2-1). Afortunadamente, es a menudo posible encontrar una transformación que tenga sentido para funciones que no satisfacen estrictamente las condiciones de existencia, siempre que dichas funciones puedan ser definidas como el límite de una sucesión de funciones transformables. Transformando cada término de esta sucesión se genera una nueva, cuyo límite se llama *transformada de Fourier generalizada* de la función original. Se pueden manipular las transformadas generalizadas de la misma manera que las ordinarias y con frecuencia ignorar la distinción entre los dos casos, dejando claro que cuando una función no satisface las condiciones de existencia y se afirma, a pesar de todo, que tiene una transformada, ésta ha de tomarse en el sentido de la transformada generalizada. Para una discusión más detallada de esta generalización del análisis de Fourier el lector puede acudir al libro de Lighthill [194].

Para ilustrar el cálculo de una transformada generalizada consideremos la función delta de Dirac que, como hemos visto, no verifica la tercera condición de existencia. Notemos que cada término de la sucesión (2-4) que la define *satisface* las tres condiciones de existencia y, de hecho, tiene una transformada de Fourier dada por (ver Tabla 2.1):

$$\mathcal{F}\{N^2\exp[-N^2\pi(x^2+y^2)]\} = \exp\left[-\frac{\pi(f_X^2+f_Y^2)}{N^2}\right]. \tag{2-6}$$

La transformada generalizada de $\delta(x,y)$ es, por consiguiente:

$$\mathcal{F}\{\delta(x,y)\} = \lim_{N\to\infty}\left\{\exp\left[-\frac{\pi(f_X^2+f_Y^2)}{N^2}\right]\right\} = 1. \tag{2-7}$$

Nótese que el espectro de la función delta se extiende uniformemente sobre todo el dominio de frecuencias.

Otros ejemplos de transformadas generalizadas se encuentran en la Tabla 2.1.

2.1.2. La transformada de Fourier considerada como una descomposición

Como ya hemos mencionado, cuando se trata de sistemas lineales es útil descomponer una señal de entrada complicada en un cierto número de señales más simples, calcular la respuesta del sistema para cada una de estas señales "elementales" y superponer las diferentes respuestas para obtener la señal de salida. El análisis de Fourier proporciona un medio fundamental para realizar esta descomposición. Consideremos la conocida relación:

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(f) \exp(j2\pi f t)\, df \tag{2-8}$$

Esta transformada inversa expresa la función g del tiempo por medio de su espectro de frecuencias. Podemos considerar esta expresión como una descomposición de la función $g(t)$ en una combinación lineal (en este caso, una integral) de funciones elementales, cada una de ellas teniendo la forma característica $\exp(j2\pi f t)$. El número complejo $G(f)$ se puede considerar como un simple factor de peso que se debe aplicar a la función elemental de frecuencia f para obtener la función $g(t)$.

De la misma manera debemos considerar la transformada de Fourier *bidimensional* como la descomposición de una función $g(x, y)$ en una combinación lineal de funciones elementales de la forma $\exp[j2\pi(f_X x + f_Y y)]$. Tales funciones presentan un cierto número de propiedades interesantes. Señalemos que para una pareja de frecuencias (f_X, f_Y) dada, la función elemental correspondiente tiene una fase que es cero o múltiplo entero de 2π radianes sobre las líneas rectas definidas por la ecuación:

$$y = -\frac{f_X}{f_Y} x + \frac{n}{f_Y}, \tag{2-9}$$

donde n es un número entero. Así, como se puede ver en la Fig. 2.1, esta función elemental puede considerarse "orientada" en el plano (x, y) según la dirección que forma un ángulo θ con respecto al eje x, tal que:

$$\theta = \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{f_Y}{f_X}\right). \tag{2-10}$$

Por otra parte, el *periodo* espacial (es decir, la distancia entre dos rectas consecutivas de fase nula) viene dado por la expresión:

$$L = \frac{1}{\sqrt{f_X^2 + f_Y^2}}. \tag{2-11}$$

En conclusión, debemos considerar que la transformada de Fourier inversa constituye un modo de descomposición de las funciones matemáticas. El espectro de

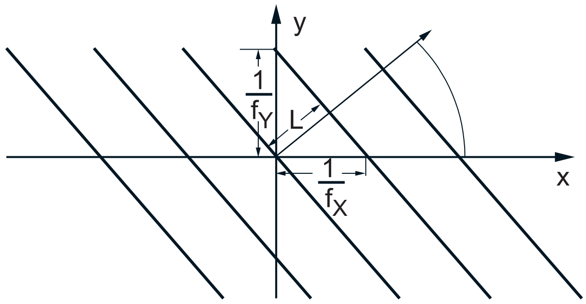

Figura 2.1: Líneas de fase nula para la función $\exp[j2\pi(f_X x + f_Y y)]$.

Fourier G de una función g es simplemente el conjunto de factores de peso que se debe aplicar a cada una de las funciones elementales para reconstruir la función g. La ventaja real de la utilización de esta descomposición no aparecerá de manera evidente hasta la discusión relativa a los sistemas lineales invariantes.

2.1.3. Teoremas relativos a la transformada de Fourier

La definición fundamental (2-1) de la transformada de Fourier permite construir un rico edificio matemático en torno a esta transformación. Vamos a considerar ahora algunas de las propiedades matemáticas de la transformada, que utilizaremos ampliamente en este libro. Estas propiedades las presentamos como teoremas matemáticos seguidos de una breve explicación relativa a su significado físico. Como estos teoremas son extensiones directas de los enunciados para la transformada de Fourier en una sola dimensión, su demostración la dejamos para el Apéndice A.

1. **Teorema de linealidad.** $\mathcal{F}\{\alpha g+\beta h\} = \alpha\mathcal{F}\{g\}+\beta\mathcal{F}\{h\}$; es decir, la transformada de una suma ponderada de dos(o más) funciones es simplemente la suma ponderada de sus transformadas respectivas.

2. **Teorema de semejanza.** Si $\mathcal{F}\{g(x,y)\} = G(f_X, f_Y)$, entonces:

$$\mathcal{F}\{g(ax,by)\} = \frac{1}{|ab|}\, G\left(\frac{f_X}{a}, \frac{f_Y}{b}\right); \tag{2-12}$$

   Es decir, una “dilatación” de las coordenadas en el dominio espacial (x, y) se traduce por una “contracción” de las coordenadas en el dominio de frecuencias (f_X, f_Y) y por un cambio de amplitud en todo el espectro.

3. **Teorema de traslación.** Si $\mathcal{F}\{g(x,y)\} = G(f_X, f_Y)$, entonces:

$$\mathcal{F}\{g(x-a, y-b)\} = G(f_X, f_Y)\exp[-j2\pi(f_X a + f_Y b)]; \tag{2-13}$$

es decir, una traslación de una función en el dominio espacial introduce una variación de fase lineal en el dominio de frecuencias.

4. **Teorema de Rayleigh (teorema de Parseval).** Si $\mathcal{F}\{g(x,y)\} = G(f_X, f_Y)$, entonces:

$$\iint_{-\infty}^{\infty} |g(x,y)|^2 \, dx \, dy = \iint_{-\infty}^{\infty} |G(f_X, f_Y)|^2 \, df_X \, df_Y. \tag{2-14}$$

La integral del lado izquierdo de este teorema puede interpretarse como la energía contenida en la onda $g(x,y)$. Esto permite interpretar la cantidad $|G(f_X, f_Y)|^2$ como una densidad de energía en el dominio de frecuencias.

5. **Teorema de convolución.** Si $\mathcal{F}\{g(x,y)\} = G(f_X, f_Y)$ y $\mathcal{F}\{h(x,y)\} = H(f_X, f_Y)$, entonces:

$$\mathcal{F}\left\{\iint_{-\infty}^{\infty} g(\xi,\eta)\ h(x-\xi, y-\eta)\ d\xi\, d\eta\right\} = G(f_X, f_Y)\, H(f_X, f_Y). \tag{2-15}$$

La convolución de dos funciones en el dominio espacial (operación que encontraremos a menudo en la teoría de los sistemas lineales) es equivalente a la operación (mucho más simple) de multiplicar sus transformadas individuales y calcular la transformada inversa de dicho producto.

6. **Teorema de autocorrelación.** Si $\mathcal{F}\{g(x,y)\} = G(f_X, f_Y)$, entonces:

$$\mathcal{F}\left\{\iint_{-\infty}^{\infty} g(\xi,\eta)\, g^*(\xi - x, \eta - y)\ d\xi\, d\eta\right\} = |G(f_X, f_Y)|^2. \tag{2-16}$$

De manera análoga, se obtiene:

$$\mathcal{F}\{|g(x,y)|^2\} = \iint_{-\infty}^{\infty} G(\xi,\eta)\, G^*(\xi - f_X, \eta - f_Y)\ d\xi\, d\eta. \tag{2-17}$$

Este teorema puede ser considerado como un caso particular del de convolución, en el cual convolucionamos $g(x,y)$ con $g^*(-x,-y)$.

7. **Teorema integral de Fourier (o teorema de reciprocidad).** En todos los puntos donde g sea continua se verifica:

$$\mathcal{F}\mathcal{F}^{-1}\{g(x,y)\} = \mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}\{g(x,y)\} = g(x,y). \tag{2-18}$$

En los puntos en los que g sea discontinua, las dos transformadas sucesivas proporcionan el promedio angular de los valores de g en un entorno pequeño de cada punto. Por consiguiente, la sucesión de transformadas directa e inversa de una función restituye ésta, salvo en los puntos de discontinuidad.

Estos teoremas tienen mucho más interés que el puramente teórico. Los utilizaremos frecuentemente, pues constituyen una herramienta fundamental en el manejo de la transformada de Fourier y pueden ahorrar un trabajo considerable en la búsqueda de soluciones en los problemas del análisis de Fourier.

2.1.4. Funciones de variables separables

Una función de dos variables independientes se llama *separable* con relación a un sistema particular de coordenadas si se puede escribir como el producto de dos funciones, cada una de ellas dependiente de una sola variable. Así una función g es separable en el sistema de coordenadas cartesianas (x, y) si:

$$g(x, y) = g_X(x)\, g_Y(y), \tag{2-19}$$

y lo es en el sistema de coordenadas polares (r, θ) si:

$$g(r, \theta) = g_R(r)\, g_\Theta(\theta). \tag{2-20}$$

Las funciones de variables separables son a menudo más cómodas de utilizar que las más generales pues la separación permite reducir las operaciones bidimensionales complicadas a operaciones unidimensionales más sencillas. Por ejemplo, una función separable en coordenadas cartesianas posee la propiedad particularmente simple de que su transformada de Fourier bidimensional es el producto de dos transformadas de Fourier unidimensionales como lo evidencia la siguiente relación:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{g(x,y)\} &= \iint_{-\infty}^{\infty} g(x,y)\, \exp[-j2\pi(f_X x + f_Y y)]\, dx\, dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} g_X(x)\, \exp[-j2\pi f_X x]\, dx \int_{-\infty}^{\infty} g_Y(y)\, \exp[-j2\pi f_Y y]\, dy \\ &= \mathcal{F}_X\{g_X\}\, \mathcal{F}_Y\{g_Y\}. \end{aligned} \tag{2-21}$$

Así, la transformada de g es separable en un producto de dos factores, uno dependiente sólo de f_X y el otro, dependiente sólo de f_Y, y la determinación de la transformada bidimensional se reduce a una sucesión de transformaciones unidimensionales más conocidas.

Las funciones separables en coordenadas polares no son tan fáciles de tratar como las precedentes, pero se demuestra que es posible efectuar las operaciones bidimensionales con la ayuda de las transformaciones unidimensionales. Como ejemplo, se pide en los problemas al lector que verifique que la transformada de Fourier de una función general separable en coordenadas polares puede expresarse como la suma infinita de transformadas de *Hankel* ponderadas:

$$\mathcal{F}\{g(r,\theta)\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (-j)^k \exp(jk\phi)\, \mathcal{H}_k\{g_R(r)\} \tag{2-22}$$

donde:

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g_\Theta(\theta) \exp(-jk\theta)\, d\theta$$

y $\mathcal{H}_k\{\ \}$ es el operador transformada de Hankel de orden k, definido por:

$$\mathcal{H}_k\{g_R(r)\} = 2\pi \int_0^{\infty} r\, g_R(r)\, J_k(2\pi r\rho)\, dr. \tag{2-23}$$

Aquí la función J_k es la función de Bessel de orden k de primera especie.

2.1.5. Funciones con simetría circular: transformadas de Fourier-Bessel

La clase más sencilla de funciones de variables separables en coordenadas polares puede ser la constituida por las funciones de *simetría circular.* Se dice que la función g posee simetría circular si puede ser expresada como una función que sólo dependa de la variable r, es decir:

$$g(r,\theta) = g_R(r). \tag{2-24}$$

Tales funciones juegan un papel muy importante en los problemas que nos interesan, pues la mayor parte de los sistemas ópticos poseen precisamente este tipo de simetría. Por esta razón daremos aquí una gran importancia a la transformación de Fourier de una función de simetría circular.

La transformada de Fourier de g en un sistema de coordenadas rectangulares viene dada por:

$$G(f_X, f_Y) = \iint_{-\infty}^{\infty} g(x,y)\, \exp[-j2\pi(f_X x + f_Y y)]\, dx\, dy. \tag{2-25}$$

Para explotar completamente la simetría circular de g utilizaremos coordenadas polares tanto en el plano (x,y) como en el plano (f_X, f_Y):

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2+y^2} & x &= r\cos\theta \\ \theta &= \operatorname{arc\,tg}(y/x) & y &= r \operatorname{sen}\theta \\ \rho &= \sqrt{f_X^2+f_Y^2} & f_X &= \rho\cos\phi \\ \phi &= \operatorname{arc\,tg}(f_Y/f_X) & f_Y &= \rho \operatorname{sen}\phi. \end{aligned} \tag{2-26}$$

Escribamos la transformada como una función del radio y del ángulo:[3]

$$\mathcal{F}\{g\} = G_o(\rho,\phi). \tag{2-27}$$

[3] Nótese que se ha añadido el subíndice en G_o simplemente porque la forma funcional de la expresión para la transformada en coordenadas polares es, en general, diferente de la forma funcional de la misma transformada en coordenadas rectangulares.

Aplicando las fórmulas de transformación de coordenadas (2-26) a la ecuación (2-25), la transformada de Fourier de g se escribe:

$$G_o(\rho, \phi) = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\infty} r\, g_R(r)\ \exp[-j2\pi r\rho(\cos\theta\ \cos\phi + \operatorname{sen}\,\theta\ \operatorname{sen}\,\phi)]\, dr \quad (2\text{-}28)$$

o de otra forma:

$$G_o(\rho, \phi) = \int_0^{\infty} r\, g_R(r) \int_0^{2\pi} d\theta\ \exp[-j2\pi r\rho\cos(\theta - \phi)]\, dr. \quad (2\text{-}29)$$

Finalmente, para simplificar la expresión de la transformada, utilicemos la identidad relativa a la función de Bessel:

$$J_0(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp[-ja\cos(\theta - \phi)]\, d\theta, \quad (2\text{-}30)$$

donde J_0 es una función de Bessel de primera especie de orden cero. Substituyendo (2-30) en (2-29), se ve que la transformada no depende del ángulo ϕ, lo que proporciona para G_0 la siguiente expresión de radio ρ:

$$G_o(\rho, \phi) = G_o(\rho) = 2\pi \int_0^{\infty} r\, g_R(r)\, J_0(2\pi r\rho)\, dr. \quad (2\text{-}31)$$

Por lo tanto, la transformada de Fourier de una función de simetría circular posee también simetría circular y puede ser calculada con ayuda de la integral simple (2-31). Esta forma particular de la transformada de Fourier aparece con suficiente frecuencia como para ser designada con una nomenclatura especial; a la ecuación (2-23) la llamaremos *transformada de Fourier-Bessel,* o bien *transformada de Hankel de orden cero*. Para abreviar adoptaremos en este libro la primera de estas terminologías.

Mediante una demostración idéntica a la precedente se ve que la transformada de Fourier *inversa* de una función de simetría circular $G_o(\rho)$ es:

$$g_R(r) = 2\pi \int_0^{\infty} \rho\, G_o(\rho)\, J_0(2\pi r\rho)\, d\rho. \quad (2\text{-}32)$$

Así, para funciones de simetría circular no hay diferencia entre las transformadas directa e inversa.

Utilizando la notación $\mathcal{B}\{\,\}$ para representar la transformada de Fourier-Bessel, se obtiene inmediatamente, aplicando el teorema integral de Fourier, que:

$$\mathcal{B}\mathcal{B}^{-1}\{g_R(r)\} = \mathcal{B}^{-1}\mathcal{B}\{g_R(r)\} = \mathcal{B}\mathcal{B}\{g_R(r)\} = g_R(r) \quad (2\text{-}33)$$

para cada valor de r en que $g_R(r)$ es continua. Se demuestra, además, por aplicación directa del *teorema de semejanza* (ver Prob. 2-6(c)), que:

$$\mathcal{B}\{g_R(ar)\} = \frac{1}{a^2}\, G_o\left(\frac{\rho}{a}\right). \quad (2\text{-}34)$$

Al utilizar la expresión (2-31) de la transformada de Fourier-Bessel el lector ha de tener presente que no es más que un caso particular de la transformada de Fourier en dos dimensiones, por lo que toda propiedad clásica de la transformada de Fourier tendrá su análoga entre las propiedades de la transformada de Fourier-Bessel.

2.1.6. Algunas funciones utilizadas frecuentemente y sus transformadas de Fourier

En esta obra aparecerán a menudo ciertas funciones matemáticas, por lo cual les vamos a asignar notaciones particulares con el fin de no tener que recurrir constantemente a su definición. A continuación indicamos las definiciones de dichas funciones:

Función *rectángulo* $$\mathrm{rect}\,(x) = \begin{cases} 1 & |x| < 1/2 \\ 1/2 & |x| = 1/2 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

Función *sinc* $$\mathrm{sinc}(x) = [\mathrm{sen}\,(\pi x)]\,/(\pi x)$$

Función *signo* $$\mathrm{sgn}\,(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

Función *triángulo* $$\Lambda(x) = \begin{cases} 1 - |x| & x \leq 0 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

Función *peine* $$\mathrm{comb}\,(x) = \Sigma_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - n)$$

Función *círculo* $$\mathrm{circ}\,(x) = \begin{cases} 1 & \sqrt{x^2 + y^2} < 1 \\ 1/2 & \sqrt{x^2 + y^2} = 1 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

Las cinco primeras, representadas en la Fig. 2.2, son funciones de una sola variable; sin embargo, se puede formar un gran número de funciones de variables separables de dos dimensiones como producto de ellas. La función *círculo* no existe más que en el caso de dos variables independientes y está esquematizada en la Fig. 2.3.

Para terminar esta discusión relativa al análisis de Fourier presentaremos algunas parejas de transformadas bidimensionales características. En la Tabla 2.1 se indica un cierto número de transformadas de funciones de variables separables