

ÍNDICE

<i>Prólogo</i>	11
----------------------	----

UNIDAD DIDÁCTICA I HERRAMIENTAS Y MODELOS DE LA TERMODINÁMICA DE SISTEMAS CONTINUOS

<i>Capítulo I. CALCULO VECTORIAL Y TENSORIAL EN COORDENADAS CARTESIANAS</i>	15
1.1. Álgebra de vectores	15
1.2. Concepto de tensor. Operaciones tensoriales	18
1.2.1. Producto diádico	18
1.2.2. Algunas operaciones en que intervienen tensores	19
1.3. Operaciones diferenciales	22
<i>Capítulo II. COORDENADAS CURVILÍNEAS</i>	27
2.1. Coordenadas curvilíneas. Bases covariante y contravariante	27
2.1.1. Coeficientes y tensores métricos	29
2.2. Expresión de un vector en coordenadas curvilíneas	31
2.2.1. Operaciones entre vectores en coordenadas curvilíneas ..	33
2.3. Operaciones diferenciales	35
2.3.1. Derivadas de los vectores de la base covariante	36
2.3.2. Derivadas de los vectores de la base contravariante	40
2.4. Expresiones explícitas resultado de operaciones diferenciales ...	42
2.5. Coordenadas curvilíneas ortogonales	44
2.5.1. Derivadas de los vectores de la base $\{e_1, e_2, e_3\}$	45
2.5.2. Algunos ejemplos de aplicación de ∇ en coordenadas curvilíneas ortogonales	46
<i>Ápndice 2.A. ALGUNOS SISTEMAS DE COORDENADAS CURVILÍNEAS USUALES</i>	48
2.A.1. Coordenadas cilíndricas	48
2.A.2. Coordenadas polares	49

<i>Capítulo III. SISTEMAS CONTINUOS</i>	53
3.1. Coordenadas convectivas	53
3.2. Dependencia temporal de los vectores \mathbf{g}_i y \mathbf{g}^i	56
3.2.1. Derivada de los tensores de deformación material y espacial	58
3.2.2. Derivada local y material	58
3.3. Tensores de deformación finita e infinitesimal	60
3.3.1. Tensor de deformación infinitesimal	60
3.3.2. Derivada de los tensores de deformación finita	61
3.4. Derivadas convectivas	63
3.4.1. Derivada corrotacional	68
3.5. Tensor presión	69
<i>Ápndice 3.A. MAGNITUDES OBJETIVAS</i>	76
<i>Capítulo IV. FORMULACIÓN CLÁSICA DE LA TERMODINÁMICA DE PROCESOS IRREVERSIBLES</i>	79
4.1. Ecuaciones de balance	79
4.1.1. Balance de masa	80
4.1.2. Balance de momento	81
4.1.3. Balance de energía	82
4.2. Ecuaciones de balance en términos de derivadas materiales	86
4.3. Hipótesis de equilibrio local	88
4.4. Las ecuaciones constitutivas	91
4.5. Teoría clásica de la termodinámica de no equilibrio	94
<i>Ápndice 4.A.</i>	97
<i>Capítulo V. EL FLUIDO NEWTONIANO</i>	101
5.1. Ecuaciones de Navier-Stokes	101
5.1.1. Divergencia del Tensor \mathbf{P} de un fluido newtoniano	101
5.1.2. Ecuación de balance de momento	103
5.2. Integración de la Ecuación de Stokes estacionaria	105
5.2.1. Expresión explícita del tensor de Oseen	108
5.3. Ecuación de Langevin	112
5.3.1. Consideraciones acerca de las fuerzas aleatorias	114
5.4. Integración de la Ecuación de difusión	115
<i>Ápndice 5.A. OPERADORES DE PROYECCIÓN</i>	118

<i>Capítulo VI. EL MODELO DE TERMODINÁMICA EXTENDIDA</i>	121
6.1. Hipótesis y desarrollo del modelo EIT	121
6.1.1. Evolución temporal de las variables clásicas	123
6.1.2. Tasa de producción de entropía	124
6.2. Flujos, fuerzas y ecuaciones constitutivas	125
6.2.1. Determinación de los parámetros $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$	127
6.3. Variables de estado fuera de equilibrio	129
6.4. La teoría de la información como herramienta	132
6.5. Algunas expresiones del tensor presión viscosa deducidas a partir del modelo EIT	138
6.5.1. Modelo de Maxwell	138
6.5.2. Modelo de Maxwell en términos de derivadas convectivas	141
<i>Referencias</i>	143

CAPÍTULO V EL FLUIDO NEWTONIANO

5.1. ECUACIÓN DE NAVIER-STOKES

El estudio hidrodinámico de un fluido tiene por objeto conocer en cada uno de sus puntos la densidad y la temperatura en un instante dado, así como la velocidad \mathbf{v} considerada en el apartado 4.1.1. Esas variables de campo están asociadas con alguna de las ecuaciones de balance (4.31), (4.34) y (4.38), aunque, expresándonos en un lenguaje coloquial, no puede atribuírseles un carácter estrictamente «termodinámico». Por otra parte, además de basarse en las ecuaciones de balance, la teoría clásica de la Termodinámica de no equilibrio se construye en el ámbito de ecuaciones fenomenológicas lineales, de las que las *ecuaciones de transporte* (4.57), (4.59) y (4.60) son un buen ejemplo.

El modelo lineal desarrollado en el Capítulo IV permite llevar a cabo el estudio *hidrodinámico* de fluidos [Lebon, Jou y Casas-Vázquez (2008), pág. 60], aunque exige que éstos se encuentren sometido a un régimen laminar, de tal modo que se excluye cualquier consideración acerca de la turbulencia y adolece, además, del inconveniente de utilizar unas ecuaciones de transporte que implican la respuesta instantánea del fluido ante cualquier efecto [tales serían ∇T , $\nabla \cdot \mathbf{v}$ y $\hat{\mathbf{V}}$, de acuerdo con (4.57), (4.59) y (4.60)]. Uno de los primeros sistemas que pueden estudiarse en el contexto de las restricciones anteriores anterior es el fluido newtoniano, para lo que se adopta como punto de partida la ecuación de balance de momento. En lo que sigue se exponen con detalle los pasos que conducen a la ecuación que rige el comportamiento hidrodinámico de tal fluido.

5.1.1. Divergencia del tensor \mathbf{P} de un fluido newtoniano

Según lo expuesto en el Capítulo III, la expresión explícita del tensor presión de un fluido newtoniano puede establecerse a partir de las ecuaciones (3.83) y (3.94), de las cuales se obtiene

$$\mathbf{P} = P\mathbf{I} - 2\eta\mathbf{V} + \left(\frac{2}{3}\eta - \zeta\right)(\nabla \cdot \mathbf{v})\mathbf{I} \quad (5.1)$$

Por consiguiente, al efectuar sobre \mathbf{P} la operación ∇ se llega al resultado

$$\nabla \cdot \mathbf{P} = \nabla P - 2\eta\nabla \cdot \mathbf{V} + \left(\frac{2}{3}\eta - \zeta\right)\nabla \cdot [(\nabla \cdot \mathbf{v})\mathbf{I}] \quad (5.2)$$

de tal modo que han de considerarse las contribuciones siguientes:

1) **Término** $\nabla \cdot [(\nabla \cdot \mathbf{v})\mathbf{I}]$

$$\nabla \cdot [(\nabla \cdot \mathbf{v})\mathbf{I}] = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}\right) \cdot \begin{pmatrix} \nabla \cdot \mathbf{v} & 0 & 0 \\ 0 & \nabla \cdot \mathbf{v} & 0 \\ 0 & 0 & \nabla \cdot \mathbf{v} \end{pmatrix} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}) \quad (5.3)$$

2) **Término** $\nabla \cdot \mathbf{V}$

Tal y como establece (3.87), el tensor \mathbf{V} es la parte simétrica del gradiente de velocidad ($\mathbf{V} = [\nabla\mathbf{v} + (\nabla\mathbf{v})^T]/2$), de tal modo que al aplicar $\nabla \cdot$ es preciso considerar las relaciones siguientes

$$\nabla \cdot \nabla\mathbf{v} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}\right) \cdot \begin{pmatrix} \partial v_1/\partial x_1 & \partial v_2/\partial x_1 & \partial v_3/\partial x_1 \\ \partial v_1/\partial x_2 & \partial v_2/\partial x_2 & \partial v_3/\partial x_2 \\ \partial v_1/\partial x_3 & \partial v_2/\partial x_3 & \partial v_3/\partial x_3 \end{pmatrix} = \nabla^2\mathbf{v} \quad (5.4)$$

$$\nabla \cdot (\nabla\mathbf{v})^T = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}\right) \cdot \begin{pmatrix} \partial v_1/\partial x_1 & \partial v_1/\partial x_2 & \partial v_1/\partial x_3 \\ \partial v_2/\partial x_1 & \partial v_2/\partial x_2 & \partial v_2/\partial x_3 \\ \partial v_3/\partial x_1 & \partial v_3/\partial x_2 & \partial v_3/\partial x_3 \end{pmatrix} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}) \quad (5.5)$$

Al sustituir (5.3)-(5.5) en (5.2), se llega al resultado

$$\nabla \cdot \mathbf{P} = \nabla P - \eta\nabla^2\mathbf{v} - \left(\frac{1}{3}\eta + \zeta\right)\nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}) \quad (5.6a)$$

que puede escribirse en la forma equivalente

$$\nabla \cdot \mathbf{P} = \nabla P - \eta \nabla^2 \mathbf{v} - \left(\frac{1}{3} \eta + \zeta \right) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v}) \quad (5.6b)$$

donde se ha introducido el parámetro

$$\beta = \frac{1}{3} + \frac{\zeta}{\eta} \quad (5.7)$$

5.1.2. Ecuación de balance de momento

Al sustituir la ecuación de la continuidad (4.6) en la expresión del balance de momento (4.12), es posible escribir

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} - \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) \mathbf{v} = -\nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \mathbf{v} + \mathbf{P}) + \rho \mathbf{f} \quad (5.8)$$

Por otra parte, al desarrollar (4.A.1) se obtiene el resultado

$$\begin{aligned} [\nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \mathbf{v})]_i &= \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho v_i v_j) = \\ &= v_i \sum_{j=1}^3 v_j \frac{\partial \rho}{\partial x_j} + \rho \sum_{j=1}^3 \frac{\partial v_i}{\partial x_j} v_j + \rho v_i \sum_{j=1}^3 \frac{\partial v_j}{\partial x_j} = \\ &= v_i (\mathbf{v} \cdot \nabla \rho) + \rho [(\nabla \mathbf{v})^T \cdot \mathbf{v}]_i + \rho v_i \nabla \cdot \mathbf{v} \end{aligned} \quad (5.9)$$

que, en forma compacta, puede expresarse

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \mathbf{v}) &= \mathbf{v} (\mathbf{v} \cdot \nabla \rho) + \rho \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} + \rho \mathbf{v} \nabla \cdot \mathbf{v} = \\ &= \mathbf{v} \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) + \rho \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \end{aligned} \quad (5.10)$$

lo cual permite describir (5.8) en la forma

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\nabla \cdot \mathbf{P} + \rho \mathbf{f} \quad (5.11)$$

Al sustituir en esta última ecuación $\nabla \cdot \mathbf{P}$ por el segundo miembro de (5.6b), se llega al resultado

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\nabla P + \eta \nabla^2 \mathbf{v} + \beta \eta \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v}) + \rho \mathbf{f} \quad (5.12)$$

que se conoce como *ecuación de Navier-Stokes* y puede considerarse como la base de la hidrodinámica de los fluidos viscosos [Landau y Lifshitz (1986)].

Conviene resaltar que (5.12) constituye un sistema de ecuaciones diferenciales de carácter *parabólico*, lo cual implica que cualquier perturbación se propaga a velocidad infinita en el seno del fluido; desde el punto de vista físico esto constituye una objeción seria, aunque no se manifiesta si se consideran *tiempos característicos* que sea mucho mayores que el tiempo de tránsito de las señales que soporte de la información. Para profundizar en el estudio de la ecuación de Navier-Stokes, se sugiere los lectores consultar la referencia [Brenner (2005)].

Para un fluido incompresible, la ecuación de la continuidad permite establecer que $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ y la ecuación de Navier-Stokes adopta la forma

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\nabla P + \eta \nabla^2 \mathbf{v} + \rho \mathbf{f} \quad (5.13)$$

Asimismo, cuando se desprecia el término de inercia $\rho \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}$, la ecuación anterior se simplifica dando lugar a

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\nabla P + \eta \nabla^2 \mathbf{v} + \rho \mathbf{f} \quad (5.14)$$

que recibe el nombre de *ecuación de Stokes*.