ÍNDICE

CAPÍTULO V
EL FLUIDO NEWTONIANO

5.1. ECUACIÓN DE NAVIER-STOKES

El estudio hidrodinámico de un fluido tiene por objeto conocer en cada uno de sus puntos la densidad y la temperatura en un instante dado, así como la velocidad $\boldsymbol{v}$ considerada en el apartado 4.1.1. Esas variables de campo están asociadas con alguna de las ecuaciones de balance (4.31), (4.34) y (4.38), aunque, expresándonos en un lenguaje coloquial, no puede atribuírseles un carácter estrictamente «termodinámico». Por otra parte, además de basarse en las ecuaciones de balance, la teoría clásica de la Termodinámica de no equilibrio se construye en el ámbito de ecuaciones fenomenológicas lineales, de las que las *ecuaciones de transporte* (4.57), (4.59) y (4.60) son un buen ejemplo.

El modelo lineal desarrollado en el Capítulo IV permite llevar a cabo el estudio *hidrodinámico* de fluidos [Lebon, Jou y Casas-Vázquez (2008), pág. 60], aunque exige que éstos se encuentren sometido a un regimen laminar, de tal modo que se excluye cualquier consideración acerca de la turbulencia y adolece, además, del inconveniente de utilizar unas ecuaciones de transporte que implican la respuesta instantánea del fluido ante cualquier efecto [tales serían ∇T, $\nabla\cdot\boldsymbol{v}$ y $\hat{\mathbf{V}}$, de acuerdo con (4.57), (4.59) y (4.60)]. Uno de los primeros sistemas que pueden estudiarse en el contexto de las restricciones anteriores anterior es el fluido newtoniano, para lo que se adopta como punto de partida la ecuación de balance de momento. En lo que sigue se exponen con detalle los pasos que conducen a la ecuación que rige el comportamiento hidrodinámico de tal fluido.

5.1.1. Divergencia del tensor P de un fluido newtoniano

Según lo expuesto en el Capítulo III, la expresión explícita del tensor presión de un fluido newtoniano puede establecerse a partir de las ecuaciones (3.83) y (3.94), de las cuales se obtiene

$$\mathbf{P} = P\mathbf{I} - 2\eta\mathbf{V} + \left(\frac{2}{3}\eta - \zeta\right)(\nabla\cdot\boldsymbol{v})\mathbf{I} \tag{5.1}$$

Por consiguiente, al efectuar sobre **P** la operación ∇ se llega al resultado

$$\nabla\cdot\mathbf{P} = \nabla P - 2\eta\nabla\cdot\mathbf{V} + \left(\frac{2}{3}\eta - \zeta\right)\nabla\cdot\left[(\nabla\cdot\boldsymbol{v})\mathbf{I}\right] \tag{5.2}$$

de tal modo que han de considerarse las contribuciones siguientes:

1) ***Término*** $\nabla\cdot[(\nabla\cdot\boldsymbol{v})\mathbf{I}]$

$$\nabla\cdot\left[(\nabla\cdot\boldsymbol{v})\mathbf{I}\right] = \left(\frac{\partial}{\partial x_1},\frac{\partial}{\partial x_2},\frac{\partial}{\partial x_3},\right)\cdot\begin{pmatrix}\nabla\cdot\boldsymbol{v} & 0 & 0\\ 0 & \nabla\cdot\boldsymbol{v} & 0\\ 0 & 0 & \nabla\cdot\boldsymbol{v}\end{pmatrix} = \nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{v}) \tag{5.3}$$

2) ***Término*** $\nabla\cdot\mathbf{V}$

Tal y como establece (3.87), el tensor **V** es la parte simétrica del gradiente de velocidad ($\mathbf{V} = [\nabla\boldsymbol{v} + (\nabla\boldsymbol{v})^T]/2$), de tal modo que al aplicar ∇· es preciso considerar las relaciones siguientes

$$\nabla\cdot\nabla\boldsymbol{v} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1},\frac{\partial}{\partial x_2},\frac{\partial}{\partial x_3},\right)\cdot\begin{pmatrix}\partial v_1/\partial x_1 & \partial v_2/\partial x_1 & \partial v_3/\partial x_1\\ \partial v_1/\partial x_2 & \partial v_2/\partial x_2 & \partial v_3/\partial x_2\\ \partial v_1/\partial x_3 & \partial v_2/\partial x_3 & \partial v_3/\partial x_3\end{pmatrix} = \nabla^2\boldsymbol{v} \tag{5.4}$$

$$\nabla\cdot(\nabla\boldsymbol{v})^T = \left(\frac{\partial}{\partial x_1},\frac{\partial}{\partial x_2},\frac{\partial}{\partial x_3},\right)\cdot\begin{pmatrix}\partial v_1/\partial x_1 & \partial v_1/\partial x_2 & \partial v_1/\partial x_3\\ \partial v_2/\partial x_1 & \partial v_2/\partial x_2 & \partial v_2/\partial x_3\\ \partial v_3/\partial x_1 & \partial v_3/\partial x_2 & \partial v_3/\partial x_3\end{pmatrix} = \nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{v}) \tag{5.5}$$

Al sustituir (5.3)-(5.5) en (5.2), se llega al resultado

$$\nabla\cdot\mathbf{P} = \nabla P - \eta\nabla^2\boldsymbol{v} - \left(\frac{1}{3}\eta + \zeta\right)\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{v}) \tag{5.6a}$$

que puede escribirse en la forma equivalente

$$\nabla \cdot \mathbf{P} = \nabla P - \eta \nabla^2 \boldsymbol{v} - \left(\frac{1}{3} \eta + \zeta \right) \nabla (\nabla \cdot \boldsymbol{v}) \tag{5.6b}$$

donde se ha introducido el parámetro

$$\beta = \frac{1}{3} + \frac{\zeta}{\eta} \tag{5.7}$$

5.1.2. Ecuación de balance de momento

Al sustituir la ecuación de la continuidad (4.6) en la expresión del balance de momento (4.12), es posible escribir

$$\rho \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} - \nabla \cdot (\rho \boldsymbol{v}) \boldsymbol{v} = -\nabla \cdot (\rho \boldsymbol{v} \boldsymbol{v} + \mathbf{P}) + \rho \boldsymbol{f} \tag{5.8}$$

Por otra parte, al desarrollar (4.A.1) se obtiene el resultado

$$\begin{aligned} \left[\nabla \cdot (\rho \boldsymbol{v} \boldsymbol{v}) \right]_i &= \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho v_i v_j) = \\ &= v_i \sum_{j=1}^{3} v_j \frac{\partial \rho}{\partial x_j} + \rho \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} v_j + \rho v_i \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial v_j}{\partial x_j} = \\ &= v_i (\boldsymbol{v} \cdot \nabla \rho) + \rho \left[(\nabla \boldsymbol{v})^T \cdot \boldsymbol{v} \right]_i + \rho v_i \nabla \cdot \boldsymbol{v} \end{aligned} \tag{5.9}$$

que, en forma compacta, puede expresarse

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\rho \boldsymbol{v} \boldsymbol{v}) &= \boldsymbol{v} (\boldsymbol{v} \cdot \nabla \rho) + \rho \boldsymbol{v} \cdot \nabla \boldsymbol{v} + \rho \boldsymbol{v} \nabla \cdot \boldsymbol{v} = \\ &= \boldsymbol{v} \nabla \cdot (\rho \boldsymbol{v}) + \rho \boldsymbol{v} \cdot \nabla \boldsymbol{v} \end{aligned} \tag{5.10}$$

lo cual permite rescribir (5.8) en la forma

$$\rho \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \rho \boldsymbol{v} \cdot \nabla \boldsymbol{v} = -\nabla \cdot \mathbf{P} + \rho \boldsymbol{f} \tag{5.11}$$

Al sustituir en esta última ecuación $\nabla \cdot \mathbf{P}$ por el segundo miembro de (5.6b), se llega al resultado

$$\rho \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \rho \boldsymbol{v} \cdot \nabla \boldsymbol{v} = -\nabla P + \eta \nabla^2 \boldsymbol{v} + \beta \eta \nabla (\nabla \cdot \boldsymbol{v}) + \rho \boldsymbol{f} \tag{5.12}$$

que se conoce como *ecuación de Navier-Stokes* y puede considerarse como la base de la hidrodinámica de los fluidos viscosos [Landau y Lifshitz (1986)].

Conviene resaltar que (5.12) constituye un sistema de ecuaciones diferenciales de carácter *parabólico*, lo cual implica que cualquier perturbación se propaga a velocidad infinita en el seno del fluido; desde el punto de vista físico esto constituye una objeción seria, aunque no se manifiesta si se consideran *tiempos característicos* que sea mucho mayores que el tiempo de tránsito de las señales que soporte de la información. Para profundizar en el estudio de la ecuación de Navier-Stokes, se sugiere los lectores consultar la referencia [Brenner (2005)].

Para un fluido incompresible, la ecuación de la continuidad permite establecer que $\nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0$ y la ecuación de Navier-Stokes adopta la forma

$$\rho \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \rho \boldsymbol{v} \cdot \nabla \boldsymbol{v} = -\nabla P + \eta \nabla^2 \boldsymbol{v} + \rho \boldsymbol{f} \tag{5.13}$$

Asimismo, cuando se desprecia el término de inercia $\rho \boldsymbol{v} \cdot \nabla \boldsymbol{v}$, la ecuación anterior se simplifica dando lugar a

$$\rho \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} = -\nabla P + \eta \nabla^2 \boldsymbol{v} + \rho \boldsymbol{f} \tag{5.14}$$

que recibe el nombre de *ecuación de Stokes*.