

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN	1
CAPÍTULO 1. NOCIONES BÁSICAS DE ÁLGEBRA DE MATRICES	
1. Conceptos previos	9
2. Operaciones con matrices	11
2.1. Cálculo de la traspuesta de una matriz	11
2.2. Suma de matrices	11
2.3. Multiplicación por un escalar	12
2.4. Producto de dos matrices	12
2.5. Cálculo del determinante de una matriz	14
2.6. Cálculo de la matriz inversa	15
3. Usos de matrices y determinantes	15
3.1. Sistema de ecuaciones lineales	15
3.2. Rango de una matriz	17
3.3. Autovalores	17
3.4. Autovectores	18
3.5. Ejemplo resuelto	19
3.6. Formas cuadráticas	20
4. Vectores y estadísticos	21
5. Combinaciones lineales	23
6. El álgebra de matrices y el lenguaje MATRIX del SPSS	24
7. Ejercicios	30
CAPÍTULO 2. LA DISTRIBUCIÓN NORMAL MULTIVARIANTE	
1. Concepto de distribución multivariante, marginal y condicional	33
2. La distribución normal multivariante	39
3. La distribución normal bivariante	42
4. Ejercicios	48
CAPÍTULO 3. ANÁLISIS DE REGRESIÓN LINEAL MÚLTIPLE	
1. Introducción	49
2. El modelo lineal general	49
3. Estimación de parámetros	51
3.1. Método de estimación de mínimos cuadrados	52
3.2. Método de estimación de máxima verosimilitud	56
4. Verificación del modelo	57
4.1. Medidas de bondad de ajuste	57
4.2. Contraste de hipótesis	59
5. Análisis del cumplimiento de los supuestos	61
5.1. Linealidad de la relación	62
5.2. Independencia	62
5.3. Homocedasticidad	63
5.4. Normalidad	63

5.5. Ausencia de colinealidad	64
6. Simplificación de modelos	66
6.1. Backward (método hacia atrás)	67
6.2. Forward (método hacia delante)	67
6.3. Stepwise (método por pasos sucesivos)	68
7. El análisis de regresión múltiple y el lenguaje MATRIX del SPSS	72
8. Ejercicios	81
CAPÍTULO 4. ANÁLISIS DE COMPONENTES PRINCIPALES	
1. Introducción	83
2. Cálculo de los componentes	84
2.1. Cálculo a partir de la matriz S	85
2.2. Cálculo a partir de la matriz R	85
2.3. Ejemplo	86
3. Geometría de los componentes	90
4. El análisis de componentes principales y el lenguaje MATRIX del SPSS	91
5. Ejercicios	95
CAPÍTULO 5. ANÁLISIS FACTORIAL	
1. Introducción	97
2. Métodos de extracción de factores	102
2.1. Método de componentes principales	102
2.2. Método de ejes principales	104
2.3. Método de máxima verosimilitud	106
2.4. Método de mínimos cuadrados generalizados	106
3. Contrastes sobre la adecuación del análisis factorial	107
4. Reglas para la selección de factores	108
5. La rotación de factores	109
5.1. La rotación ortogonal	110
5.2. La rotación oblicua	112
6. Estimación de las puntuaciones factoriales	112
6.1. Método de Bartlett	113
6.2. Método de regresión	113
7. Ejemplo	114
8. El análisis factorial y el lenguaje MATRIX del SPSS	118
9. Ejercicios	126
REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS	127
ANEXOS	131
Tabla 1. Distribución de probabilidad normal tipificada $N(0, 1)$	133
Tabla 2. Distribución de probabilidad t de Student	134
Tabla 3: Distribución de probabilidad de χ^2 de Pearson	135
Tabla 4: Distribución de probabilidad F de Snedecor	136

3.6. Formas cuadráticas

Siendo \mathbf{A} una matriz cuadrada y simétrica y \mathbf{x} un vector de p elementos no nulos, se llama forma cuadrática a la expresión:

$$Q = \mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{bmatrix} = \sum a_{11}x_1x_1 + \sum a_{12}x_1x_2 + \dots + \sum a_{pp}x_px_p =$$

$$= \sum_i \sum_j a_{ij}x_ix_j = \sum_i a_{ii}x_i^2 + \sum_{i \neq j} a_{ij}x_ix_j = \sum_i a_{ii}x_i^2 + \sum_{i < j} (a_{ij} + a_{ji})x_ix_j \quad (1.14)$$

Ejemplo para $\mathbf{A}_{2 \times 2}$: $Q = \mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = a_{11}x_1^2 + (a_{12} + a_{21})x_1x_2 + a_{22}x_2^2$

Como se observa, $\mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x}$ es una función cuadrática de las \mathbf{x} e incluye todos los elementos posibles de segundo orden.

Propiedades:

1. Para $\mathbf{x} = 0$ todas las formas cuadráticas Q son 0.
2. Si $Q > 0$ para todo $\mathbf{x} \neq 0$, entonces $\mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x}$ (y por tanto \mathbf{A}) es *definida positiva*. Donde \mathbf{A} es *regular*, $r(\mathbf{A}) = p$ y todos sus *autovalores* son positivos.
3. Si $Q \geq 0$ para todo \mathbf{x} , entonces \mathbf{A} es *semidefinida positiva*. Donde \mathbf{A} es *singular*, $r(\mathbf{A}) < p$ y sus *autovalores* son positivos con uno al menos nulo.
4. \mathbf{A} sería *definida negativa* ($r(\mathbf{A}) = p$ y sus $\lambda_j < 0$) si $-Q$ es definida positiva y *semidefinida negativa* ($r(\mathbf{A}) < p$ y sus $\lambda_j \leq 0$) si $-Q$ es semidefinida positiva.
5. Si \mathbf{A} es definida positiva con autovalores $\lambda_1 \geq \lambda_2 \dots \geq \lambda_p \geq 0$ y autovectores a_1, a_2, \dots, a_p , entonces Q es máxima para el máximo valor de λ con la restricción $\mathbf{x}'\mathbf{x} = 1$. Es decir:

$$Q = \mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{x}'\lambda_i\mathbf{x} = \lambda_i\mathbf{x}'\mathbf{x} = \lambda_i \quad (1.15)$$

Ejemplo 23: $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$; $Q = \mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x} = x_1^2 + x_2^2$; $Q > 0$: *definida positiva*

Obsérvese que: $|\mathbf{A}| = 1$; $r(\mathbf{A}) = p = 2$.

$$|\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(1-\lambda) = 0; \quad \lambda_1 = \lambda_2 = 1$$

Ejemplo 24: $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$; $Q = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 = (x_1 - x_2)^2$; $Q \geq 0$: *semidefinida positiva*

Obsérvese que: $|\mathbf{B}| = 0$; $r(\mathbf{B}) = 1$.

$$|\mathbf{B} - \lambda \mathbf{I}| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(1-\lambda) - 1 = \lambda(\lambda - 2) = 0; \quad \lambda_1 = 2; \quad \lambda_2 = 0.$$

Las formas cuadráticas tienen muchos usos en el análisis multivariante.

4. Vectores y estadísticos

Los estadísticos descriptivos pueden expresarse mediante vectores. La siguiente tabla resume la forma matricial de algunos estadísticos y de las matrices que facilitan su cálculo:

	Estadístico	Forma matricial
Media	$\bar{\mathbf{x}} = \frac{1}{n} \sum X_i$	$\bar{\mathbf{x}}' = \frac{1}{n} \mathbf{1}' \mathbf{X}^*$
Puntuaciones diferenciales	$x_i = X_i - \bar{X}$	$\mathbf{X} = \mathbf{X}^* - \mathbf{1}\bar{\mathbf{x}}'$
Varianza	$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum x_i^2$	$\mathbf{s}^2 = \frac{1}{n-1} \mathbf{x}'\mathbf{x} = \frac{1}{n-1} \mathbf{x} $
Desviación típica	$s^2 = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum x_i^2}$	$\mathbf{s} = \left(\frac{1}{n-1} \right)^{1/2} \ \mathbf{x}\ $
Covarianza	$s_{xy} = \frac{1}{n-1} \sum x_i y_i$	$\mathbf{s}_{xy} = \frac{1}{n-1} \mathbf{x}'\mathbf{y} = \frac{1}{n-1} \mathbf{xy} $
Correlación	$r_{xy} = \frac{\sum x_i y_i}{\sqrt{\sum x_i^2 \sum y_i^2}}$	$r_{xy} = \frac{\mathbf{x}'\mathbf{y}}{\sqrt{(\mathbf{x}'\mathbf{x})(\mathbf{y}'\mathbf{y})}} = \frac{ \mathbf{xy} }{\ \mathbf{x}\ \ \mathbf{y}\ } = \cos\theta_{xy}$
Matriz de covarianzas		$\mathbf{S} = \frac{1}{n-1} \mathbf{X}' \mathbf{X}$
Matriz de varianzas		$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} s_1^2 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & s_p^2 \end{bmatrix}$
Matriz de puntuaciones típicas		$\mathbf{Z} = \mathbf{X}\mathbf{D}^{-1/2} = \mathbf{X} \begin{bmatrix} 1/s_1 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 1/s_p \end{bmatrix}$
Matriz de correlaciones		$\mathbf{R} = \frac{1}{n-1} \mathbf{Z}'\mathbf{Z} = \mathbf{D}^{-1/2} \mathbf{S}\mathbf{D}^{-1/2}$

\mathbf{S} y \mathbf{R} son matrices gramianas pues se basan en sumas de cuadrados y productos cruzados.

Las matrices \mathbf{S} y \mathbf{R} se relacionan mediante las siguientes fórmulas:

$$\begin{aligned}\mathbf{R} &= \mathbf{D}^{-1/2} \mathbf{S} \mathbf{D}^{-1/2} \\ \mathbf{S} &= \mathbf{D}^{1/2} \mathbf{R} \mathbf{D}^{1/2}\end{aligned}\quad (1.16)$$

Como \mathbf{S} y \mathbf{R} son cuadradas y simétricas y $\mathbf{D}^{1/2}$ es una matriz regular, las matrices \mathbf{S} y \mathbf{R} son *equivalentes*. Ello implica que $r(\mathbf{S}) = r(\mathbf{R})$.

Ejemplo 25: A continuación se presenta un ejemplo del cálculo de la covarianza y la correlación para dos variables medidas en tres sujetos:

Sujeto	X_1	X_2
1	3	6
2	5	6
3	10	12

Matriz de datos (en puntuaciones directas): $\mathbf{X}^* = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 5 & 6 \\ 10 & 12 \end{bmatrix}$

Medias: $\bar{\mathbf{x}}' = \frac{1}{n} \mathbf{1}' \mathbf{X}^* = \frac{1}{3} [1 \quad 1 \quad 1] \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 5 & 6 \\ 10 & 12 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} [18 \quad 24] = [6 \quad 8]$

Puntuaciones diferenciales: $\mathbf{X} = \mathbf{X}^* - \mathbf{1}\bar{\mathbf{x}}' = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 5 & 6 \\ 10 & 12 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 6 & 8 \\ 6 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ -1 & -2 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$

Varianzas: $s_1^2 = \frac{1}{n-1} |\mathbf{x}_1| = \frac{1}{2} [-3 \quad -1 \quad 4] \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix} = 13$

$s_2^2 = \frac{1}{n-1} |\mathbf{x}_2| = \frac{1}{2} [-2 \quad -2 \quad 4] \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix} = 12$

Covarianza: $s_{xy} = \frac{1}{n-1} |\mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2| = \frac{1}{2} [-3 \quad -1 \quad 4] \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix} = 12$

Matriz de covarianzas: $\mathbf{S} = \frac{1}{n-1} \mathbf{X}' \mathbf{X} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -3 & -1 & 4 \\ -2 & -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ -1 & -2 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & 12 \\ 12 & 12 \end{bmatrix}$

Correlación: $r_{xy} = \frac{|\mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2|}{\|\mathbf{x}_1\| \|\mathbf{x}_2\|} = \frac{24}{(5.10)(4.90)} = 0.96$

Matriz de correlaciones:

$$\mathbf{R} = \mathbf{D}^{-1/2} \mathbf{SD}^{-1/2} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{13} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 13 & 12 \\ 12 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{13} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0.96 \\ 0.96 & 1 \end{bmatrix}$$

5. Combinaciones lineales

Las técnicas multivariantes se formulan mediante combinaciones lineales por lo que es necesario comprender su definición y propiedades.

Considérese la siguiente combinación lineal:

$$\mathbf{y} = \mathbf{X} \mathbf{a}$$

La variable aleatoria \mathbf{y} es una transformación o combinación lineal de \mathbf{X} mediante \mathbf{a} . Donde $\mathbf{a}' = [a_1, \dots, a_p]$ es un vector de constantes, \mathbf{X} una matriz de puntuaciones de n sujetos en p variables (siendo $\boldsymbol{\mu}'$ su vector de medias). La media y varianza de \mathbf{y} es:

$$\begin{aligned} E(\mathbf{y}) &= \boldsymbol{\mu}' \mathbf{a} \\ \text{Var}(\mathbf{y}) &= \frac{1}{n-1} \mathbf{y}' \mathbf{y} = \frac{1}{n-1} (\mathbf{Xa})' (\mathbf{Xa}) = \frac{1}{n-1} \mathbf{a}' \mathbf{X}' \mathbf{Xa} = \\ &= \mathbf{a}' \frac{1}{n-1} \mathbf{X}' \mathbf{Xa} = \mathbf{a}' \mathbf{S} \mathbf{a} \end{aligned} \quad (1.17)$$

A continuación se presenta un ejemplo para ilustrar la fórmula (1.17) en el caso en que $p=2$:

$$\begin{aligned} \text{Var}(X_1 a_1 + X_2 a_2) &= \text{Var}(X_1 a_1) + \text{Var}(X_2 a_2) + 2 \text{Cov}(X_1 a_1, X_2 a_2) = \\ &= a_1^2 \text{Var}(X_1) + a_2^2 \text{Var}(X_2) + 2 a_1 a_2 \text{Cov}(X_1, X_2) \end{aligned}$$

Como se observa, la varianza de una combinación lineal es una forma cuadrática. En el caso en que \mathbf{a} fuese un vector normalizado (donde $\mathbf{a}' \mathbf{a} = 1$), la varianza de \mathbf{y} queda como:

$$\text{Var}(\mathbf{y}) = \mathbf{a}' \mathbf{S} \mathbf{a} = \mathbf{a}' \boldsymbol{\lambda} \mathbf{a} = \lambda$$

Las ecuaciones de (1.17) pueden generalizarse al caso $\mathbf{Y} = \mathbf{X} \mathbf{A}$. Donde \mathbf{A} es una matriz de constantes de orden $n \times p$, y la media y varianza de \mathbf{Y} es:

$$\begin{aligned} E(\mathbf{Y}) &= \boldsymbol{\mu}' \mathbf{A} \\ \text{Var}(\mathbf{Y}) &= \mathbf{A}' \mathbf{S} \mathbf{A} \end{aligned} \quad (1.18)$$

A continuación se comentan algunas propiedades de las matrices \mathbf{S} y \mathbf{R} . En primer lugar ambas son *semidefinidas positivas*. Puesto que toda varianza ha de ser no negativa:

$$\text{Var}(\mathbf{X} \mathbf{a}) \geq 0 \quad \text{para todo } \mathbf{a}$$

Como $\text{Var}(\mathbf{X}\mathbf{a}) = \mathbf{a}'\mathbf{S}\mathbf{a}$, entonces \mathbf{S} tiene que ser, al menos, *semidefinida positiva*. \mathbf{S} y \mathbf{R} son matrices equivalentes pues en las fórmulas que las relacionan en (1.16) la matriz $\mathbf{D}^{1/2}$ es regular. Por tanto, \mathbf{R} también es *semidefinida positiva*.

En segundo lugar, puesto que las matrices \mathbf{S} y \mathbf{R} son equivalentes, el rango de \mathbf{S} es el mismo que el de \mathbf{R} . Este rango puede ser menor o igual que p . Si $r(\mathbf{S}) = p$, entonces \mathbf{S} y \mathbf{R} serán *definidas positivas* pues $\text{Var}(\mathbf{X}\mathbf{a}) = \mathbf{a}'\mathbf{S}\mathbf{a}$ es mayor que cero para todo $\mathbf{a} \neq 0$. Sin embargo, si $r(\mathbf{S}) < p$ entonces \mathbf{S} y \mathbf{R} serán singulares y ello indicará una restricción de linealidad en los componentes de \mathbf{X} . Esto implica que existe un vector $\mathbf{a} \neq 0$ tal que $\mathbf{X}\mathbf{a}$ es igual a una constante. Entonces, $\text{Var}(\mathbf{X}\mathbf{a}) = \mathbf{a}'\mathbf{S}\mathbf{a}$ será cero, indicando que la matriz \mathbf{S} es *semidefinida positiva* en lugar de definida positiva.

Para ilustrar este último punto, supóngase que $p = 3$ y que existe una restricción de linealidad en las tres variables tal que $X_1 = X_2 + X_3$. Entonces, $\text{Var}(X_1 - X_2 - X_3) = 0$ y el vector $\mathbf{a}' = [1, -1, -1]$. En este caso, una de las tres variables es redundante y por tanto la dimensionalidad es 2 en lugar de 3. Esto se refleja en el rango de \mathbf{S} que también será 2. Según esta propiedad, el rango de \mathbf{S} es un indicador útil para establecer la dimensionalidad del problema, siendo $[p - r(\mathbf{S})]$ el número de restricciones lineales independientes en los componentes de \mathbf{X} . De este modo, cuando $r(\mathbf{S}) < p$ se dice que los componentes de \mathbf{X} son linealmente dependientes.

Ejemplo 26: Sean las variables X_1 y X_2 y su matriz de covarianzas $\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 9 \end{bmatrix}$.

Si se forman las combinaciones lineales $Y_1 = X_1 + X_2$, $Y_2 = X_1 - X_2$, la matriz de covarianzas para \mathbf{Y} es:

$$\text{Var}(\mathbf{Y}) = \mathbf{A}'\mathbf{S}\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 & -5 \\ -5 & 7 \end{bmatrix}$$

Y la matriz de correlaciones:

$$\mathbf{R} = \mathbf{D}^{-1/2}\mathbf{S}\mathbf{D}^{-1/2} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{19} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{7} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 19 & -5 \\ -5 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{19} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{7} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -0.43 \\ -0.43 & 1 \end{bmatrix}$$

6. El álgebra de matrices y el lenguaje MATRIX del SPSS

Las operaciones con matrices son complejas. Existen diversos paquetes informáticos que evitan su cálculo a mano. A continuación se introduce *el lenguaje MATRIX* del programa SPSS, uno de los más empleados en las ciencias sociales.

El lenguaje MATRIX no se encuentra en los menús desplegables del programa SPSS. Para utilizarlo es necesario acudir a ventanas de sintaxis desde donde se escribe la operación que se desea realizar y se ejecuta.