ÍNDICE

NOCIONES DE TEORÍA DE LA MEDIDA

1. Métrica y Espacios Métricos

1.1. Introducción

En esta primera parte se trata de introducir las nociones más básicas de la Teoría de la Medida, pues su conocimiento es necesario para toda aproximación a la investigación de cualquier fenómeno, desde una aproximación con enfoque probabilista y estadístico, así como al de la validez de los resultados.

La Teoría de la Medida abarca muchos campos, desde el filosófico, hasta operaciones matemáticas de naturaleza compleja, como pueden ser las integrales iteradas y los espacios producto infinitos.

Al estar esta obra dirigida fundamentalmente a quienes realizan estudios de investigación en Psicología, en Ciencias Sociales y en Ciencias de la Salud, lo que se pretende es introducir las nociones y los conceptos básicos, tratándolos de forma general, sin utilizar instrumentos matemáticos avanzados. El objetivo es que el investigador adquiera las nociones y el lenguaje propios de esta materia, para buscarle el significado en su campo, sin entrar en demostraciones tediosas, incluso tan complicadas o abstractas que, en lugar de llevarle a un mayor conocimiento, lo pueden llevar a confusión. Puesto que muchas veces esto no es posible en un tema tan complejo y el propósito primordial de esta obra es didáctico y esta dirigido a los que inician su andadura en la investigación, por una parte, tratamos de no repetir la estructura y algunos de los contenidos que están bien tratados en los manuales, por otra, antes de trivializar o de perder rigurosidad, remitimos al lector a los textos y/u otras fuentes donde se trate el tema o problema concreto con la debida extensión, rigurosidad y profundidad.

En la Teoría de la Medida y, por ende, en la medición psicológica de los atributos, todos los conceptos que se utilizan en el quehacer científico se pueden incluir en dos clases muy amplias, los que se han dado en llamar *cualitativos* y los *cuantitativos*. Los conceptos cualitativos son aquellos que son comparativos, o simplemente clasificatorios. Los conceptos cuantitativos son los *mensurales* y/o *métricos*. Es decir, que al menos sean susceptibles de medida, siendo métricos cuando entre esas medidas se puedan establecer un cierto tipo de red de relaciones.

La clasificación de los conceptos científicos en una u otra clase, es casi siempre un problema epistemológico, si bien, no podemos negar que en la naturaleza o en la realidad que estemos investigando, existen propiedades que hacen que el fenómeno sujeto de estudio, haya que considerarlo esencialmente cualitativo, o bien, esencialmente cuantitativo. Hay que tener en cuenta, que hacer esa clasificación depende tanto de la naturaleza del fenómeno, esto es, del fenómeno del mundo real que se está investigando, como de la atribución de cualitativo o cuantitativo que le hace el investigador, basándose en la estructura conceptual desde la que aborda el problema. Es decir, consideramos que al no ser el mundo real, ni cualquier fenómeno en particular, de naturaleza puramente cualitativa o cuantitativa; al no ser ningún fenómeno cualitativo o cuantitativo *per se*, es el investigador quien tiene una gran responsabilidad de incluirlo en una u otra clase, al hacer su aproximación al estudio de ese fenómeno (Santisteban, 2003). Obviamente, no estamos aquí considerando las opiniones, ni de aquellos que consideran que los atributos no físicos, y menos aún las variables psicológicas, sean susceptibles de medida y, por ende, adecuadas para hacer análisis cuantitativos de los fenómenos de los que parecen dar cuenta, ni las de aquellos otros que no rechazan la posibilidad de que se pudieran obtener medidas cuantitativas de los atributos psicológicos, pero que dudan de su significado y de su utilidad. Precisamente la disipación de estas dudas y la solución de estos problemas se abordan desde la teoría de la medición, pues ha sido en el ámbito más controvertido, en el de la Psicología, desde donde más esfuerzos se han hecho en este sentido en la segunda mitad del pasado siglo (Stevens, 1951; Suppes y Zinnes, 1963; Pfanzagl, 1968, 1971; Ellis, 1968; Krantz, Luce, Suppes y Tversky, 1971; Roberts, 1979), abriendo el debate y formalizando algunos de los conceptos básicos que se habían aceptado de forma natural y sin mayores exigencias en las denominadas ciencias físicas.

1.2. Clases y funciones

Las primeras nociones que es necesario comprender y dominar con agilidad son los conceptos ligados a la Medición y a la Teoría de la Medida. Estos conceptos son básicos y tan elementales como los de conjuntos y las operaciones que se pueden hacer con ellos.

Un conjunto, no es más que una colección arbitraria de elementos. A los elementos muchas veces se les denomina objetos, o bien, puntos. Se considera además que todos los conjuntos lo son de un espacio prefijado no vacío, al que denotaremos por la letra griega mayúscula Ω, para distinguirlo de sus elementos, que denotamos por la minúscula ω. Generalmente, todos los elementos del espacio Ω se denominan puntos y el conjunto de ellos se designa mediante $\{\omega\}$. Si los elementos ω son distinguibles, se les suele asignar un afijo, ya sea éste un apóstrofo (ω'), un subíndice (ω_i), un superíndice (ω^j), o ambos (ω_i^j) u otra notación cualquiera que se adopte para hacerlos distinguibles. A los conjuntos de puntos de Ω se les suele designar mediante letras mayúsculas: A, B, C, $\cdots$. Así, el conjunto Ω contiene a esos conjuntos y cuando un elemento particular pertenece a uno de ellos, por ejemplo al A, se dice que $\omega \in A$. Es posible que un elemento pertenezca a más de un conjunto. Un elemento ω puede pertenecer a A y a B, pero no pertenecer a C ($\omega \in A$; $\omega \in B$; $\omega \notin C$). Esto querría decir que los conjuntos A y B tienen al menos un elemento en común. Cuando dos conjuntos no tienen ningún elemento en común, esos conjuntos son "disjuntos". Si lo anteriormente dicho para un elemento, es cierto para todo elemento $\omega \in \Omega$, entonces el conjunto C sería disjunto con A y con B.

Conjuntos disjuntos darán intersecciones vacías. Es decir, al ser disjuntos no tendrán ningún elemento en común. Si, abusando del lenguaje, al conjunto que no contiene ningún elemento se le denomina conjunto vacío y se denota por $\varnothing$, entonces se puede decir que:

$A \cap C = \varnothing$ y que $B \cap C = \varnothing$

(Los símbolos $\cap$ y $\cup$ indican intersección y unión respectivamente).

En el caso en que el espacio Ω sólo tuviera los elementos de A, B y C, entonces se diría que:

$\Omega = A \cup B \cup C$

En cualquier caso, siempre se puede decir que el conjunto vacío está contenido en todos y cada uno de los conjuntos y se puede afirmar que:

$\varnothing \subset A \subset \Omega$

(Los símbolos $\subset$ y $\supset$ respectivamente indican "está contenido" y "contiene", y por $\not\subset$ no esta contenido)

Cuando todos los puntos de un conjunto A están contenidos en un conjunto B, entonces se dice que A es un subconjunto de B, y en tal caso se escribiría $A \subset B$, o bien $B \supset A$, o su equivalente: si $\forall \omega$, $\omega \in A$, $\omega \in B$, entonces $A \subset B$. Para cada conjunto A se dará la siguiente relación de inclusión citada: $\varnothing \subset A \subset \Omega$.

Estos conceptos elementales los introducimos, no porque no sean conocidos por el lector, sino a efectos didácticos, pues es preciso que el lector pase a definir, además de la unión y la intersección, la igualdad entre conjuntos, la diferencia A-B (conjunto que contiene todos los elementos de A que no pertenecen a B), manejando con soltura la simbología, por ejemplo:

i) Si se observa que las relaciones entre A y B están indicadas mediante los símbolos $A \subset B$ y $B \subset A$, entonces esto se identifica inmediatamente con que "todos los elementos de A están en B y viceversa", o sea, que $A = B$

ii) Si $\omega \in A$ y $\omega \notin B$, entonces es evidente que $\omega \in A\text{-}B$.

A la diferencia de Ω con cualquiera de sus subconjuntos, se le llama "conjunto complementario". Así Ω-A es el conjunto complementario de A y se designa por A^C.

Antes de continuar, el lector que no esté muy familiarizado en operar con conjuntos, debería de realizar algunos ejercicios, por ejemplo, realizar las operaciones que le lleven a comprobar que la relación de inclusión es reflexiva y transitiva, que la relación de igualdad es reflexiva, transitiva y simétrica y que las operaciones de unión y de intersección son asociativas, conmutativas y distributivas.

Se denomina *clase* a un conjunto particular de conjuntos de Ω y se les suele designar por A, B, C, ··· con o sin afijos.

La clase de todos los conjuntos de Ω se denomina espacio de conjuntos de Ω y se suele designar por $\mathcal{E}(\Omega)$ o bien por S(Ω). Una clase de conjuntos de Ω será un conjunto de $\mathcal{E}(\Omega)$ y todas las nociones y operaciones definidas en los conjuntos se aplican a las clases, consideradas ellas mismas como conjuntos. Las nociones de unión y de intersección, por tanto, se extienden de forma inmediata a clases arbitrarias, o sea, para conjuntos T no necesariamente de Ω. Ahora bien, si a cada $t \in T$ se le asigna un conjunto $A_t \subset \Omega$, la clase $\{A_t\}$ de todos esos conjuntos es una clase asignada al conjunto índice T.

1.3. Clases numerables

Se hace ya necesario introducir el concepto de *numerable* y pasar de las operaciones de unión y de intersección a la de adición y/o sustracción. Ello es debido a que las operaciones que se realizan sobre elementos de clases numerables tienen un papel relevante en el establecimiento de la noción de medida.

Un conjunto o una clase se dice *finito* cuando entre los elementos de ese conjunto o de esa clase y el conjunto de los n primeros números enteros y positivos {1, 2, ···, n} se puede establecer una correspondencia biyectiva para algún valor de n y viceversa. Se dice que el conjunto es *enumerable*, cuando esa correspondencia puede establecerse con todos los enteros positivos, sin límite en su número, es decir, infinitos enteros positivos $\{1, 2, \cdots\}$. El conjunto, o la clase, se denomina *numerabl*e si es finito o enumerable.

1.4. Métrica y Espacios métricos

Los conceptos métricos se introducen en Ciencia para que, aprehendiendo el significado de algunas propiedades de los elementos y objetos, poder estudiarlos de forma sistematizada y, a ser posible, generalizada. La conexión entre el concepto *métrico* y la operación de *medir*, ha inducido a que en muchas ocasiones se haya afirmado, y así aparece en muchos textos, que "medir es asignar números a las cosas", o bien, que "medir es asignar números a las propiedades de los objetos". Estas definiciones, resultan incorrectas por imprecisas, pues la simple asignación de números no garantiza que esos números expresen las propiedades específicas de los elementos que se quieren expresar, es decir sus *magnitudes*, permitiendo además de su representación inequívoca, la manipulación experimental, así como la comparación con otras mediciones o magnitudes. Esto es, las representaciones numéricas de las propiedades de los objetos o elementos, a lo que se llama magnitudes, deben de ser resistentes a la manipulación experimental y ser susceptibles de operar matemáticamente con ellas, conservando tras esas operaciones su sentido y propiedades, permitiendo además que se puedan hacer con ellas comparaciones y predicciones.

En cuanto a los *espacios métricos*, escapa a los objetivos de esta obra tratar en extensión y profundidad los distintos tipos de espacios. Sin embargo, no es difícil aceptar, pues se puede comprender casi intuitivamente, que esas distinciones se basarán en las diferentes propiedades que posean unos y otros. Concretamente, esos conceptos están enraizados en los conceptos de elementos o puntos y la distancia que los relaciona. Por ejemplo, en el campo de los números reales $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$, que es un conjunto medible en el que se pueden establecer los conceptos de límite, los distintos tipos de espacios a considerar están conectados con una métrica, que es la distancia euclídea que se puede establecer entre ellos. Entre dos puntos x, y de $\mathbb{R}$, se puede establecer una distancia, que se podría definir como d = $|y - x|$.

Si es E un conjunto, *una distancia en* E es una aplicación del producto cartesiano E x E en el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales, que tiene las propiedades siguientes:

(1) $d(x, y) \geq 0$ para cada par de elementos x, y de E
(2) la relación $d(x, y) = 0$ equivale a $x = y$
(3) $d(y, x) = d(x, y)$ para cada par de elementos de E
(4) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ para cualesquiera tres elementos x, y, z de E. O sea, se da lo que se denomina desigualdad triangular.

De (4) por inducción se deduce que $d(x_1, x_n) \leq d(x_1, x_2) + d(x_2, x_3) + \cdots + d(x_{n-1}, x_n)$ para cada $n > 2$.

Si d es una distancia en E, entonces para tres elementos x, y, z de E, se cumple que

$$|d(x, z) - d(y, z)| \leq d(x, y)$$

Un *espacio métrico* es un conjunto E junto con una distancia dada en E.

Dos espacios métricos E y E´ se dicen *isométricos* cuando entre ellos existe una isometría. Si son d y d´ las distancias en E y E´, una biyección f de E sobre E´ se denomina *isometría* si para cada par de elementos de E

$$d'(f(x), f(y)) = d(x,y)$$

y la aplicación inversa f^{-1} es también una isometría de E´ sobre E.

La ventaja de tener espacios isométricos es que cada teorema que se demuestra que se cumple en E, que se refiera solo a distancias entre elementos de E, conduce de forma inmediata al correspondiente teorema en cada espacio isométrico E´, relacionando así las distancias de los elementos de E´, que son las imágenes obtenidas al aplicar f a los elementos de E.

Las distancias se definen de forma análoga en los espacios producto (se definen a continuación), sea cual fuere el número de ellos. Para dos espacios métricos E_1 y E_2, siendo d_1 y d_2 las respectivas distancias definidas en esos espacios E_1 y E_2, para cada par de puntos $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$ en $E = E_1 \times E_2$, sea

$$d(x, y) = \text{Máx}\,(d_1(x_1, y_1); d_2(x_2, y_2))$$

Se comprueba de forma inmediata que esta función satisface las propiedades anteriores, de la (1) a la (4), lo que indica que, en efecto, d(x, y) es una distancia en E. A este espacio métrico obtenido tomando la distancia d, se le denomina *espacio producto* de los dos espacios métricos originales E_1 y E_2.

La aplicación $(x_1, x_2) \rightarrow (x_2, x_1)$ de $E_1 \times E_2$ sobre $E_2 \times E_1$ es una isometría.

Son también distancias en E las funciones d´ y d´´ definidas mediante las siguientes relaciones:

$$d'(x, y) = d_1(x_1, y_1) + d_2(x_2, y_2)$$

$$d''(x, y) = \sqrt{(d_1(x_1, y_1))^2 + (d_2(x_2, y_2))^2}$$

Es por lo tanto equivalente tomar en E cualquiera de las distancias d, d´, d´´, para todas las cuestiones que se refieran a las propiedades topológicas de ese espacio.

La función $(x, y) \rightarrow |y - x|$ es una distancia en el conjunto de los números reales; el espacio métrico correspondiente se llama *recta real*. Cuando $\mathbb{R}$ se considera como un espacio métrico sin dar explícitamente la distancia, se entiende que se trata de la distancia antes definida.

En el espacio tridimensional $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, la *distancia euclídea* usual, para dos elementos $x = (x_1, x_2, x_3)$ e $y = (y_1, y_2, y_3)$ está definida por

$$d(x,y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2}$$

y es trivial la verificación de los axiomas (1), (2) y (3) y el (4) se comprueba directamente mediante un simple cálculo.