

## ÍNDICE

<i>Introducción</i> . . . . .	9
<i>Capítulo 1.</i> LUCA PACIOLI. <i>Resumen de Aritmética, Geometría, Proporción y Proporcionalidad</i> . . . . .	21
<i>Capítulo 2.</i> GIROLAMO CARDANO. <i>El libro de los juegos de azar</i> . . . . .	27
<i>Capítulo 3.</i> GALILEO GALILEI. <i>Sobre las tiradas de dados</i> . . . . .	95
<i>Capítulo 4.</i> PIERRE FERMAT y BLAISE PASCAL. <i>Correspondencia</i> . . . . .	101
<i>Capítulo 5.</i> BLAISE PASCAL. <i>El Pari</i> . . . . .	147
<i>Capítulo 6.</i> CHRISTIAAN HUYGENS. <i>Del cálculo en los juegos de azar</i> . . . . .	157
<i>Capítulo 7.</i> JAKOB, DANIEL y NICOLÁS BERNOULLI. <i>Las probabilidades directas</i> . . . . .	187
<i>Capítulo 8.</i> GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ. <i>Algunas citas</i> . . . . .	229
<i>Capítulo 9.</i> JOHN GRAUNT. <i>Observaciones naturales y políticas</i> . . . . .	277
<i>Capítulo 10.</i> ABRAHAM DE MOIVRE. <i>La doctrina del azar</i> . . . . .	383
<i>Capítulo 11.</i> THOMAS BAYES. <i>Un ensayo tendente a la resolución de un problema en la doctrina de las probabilidades</i> . . . . .	389
<i>Capítulo 12.</i> PIERRE LAPLACE. <i>La equiprobabilidad y las probabilidades inversas</i> . . . . .	437
<i>Capítulo 13.</i> MARQUÉS DE CONDORCET y ADOLPHE QUETELET. <i>La aplicación a la Aritmética Social</i> . . . . .	443
<i>Bibliografía</i> . . . . .	449
<i>Índice analítico</i> . . . . .	455

CAPÍTULO 2  
GIROLAMO CARDANO  
*EL LIBRO DE LOS JUEGOS DE AZAR*



Girolamo Cardano (1501-1576)

Girolamo Cardano tuvo una vida tumultuosa. Se le puede considerar como un típico hombre del Renacimiento. Nació el 24 de septiembre de 1501 en Pavía, ducado de Milán, y murió en Roma el 21 de septiembre de 1576. Era hijo ilegítimo de Fazio Cardano y Chiara Micheria. Su padre era abogado en Milán, y su habilidad para las matemáticas hizo que Leonardo da Vinci lo consultara en temas de geometría.

Cardano comenzó como asistente de su padre, que le enseñó matemáticas. Aunque su padre quería que estudiara derecho, Cardano ingresó en la Universidad de Pavía en 1520 para estudiar medicina, estudios que luego debió continuar en la Universidad de Padua por la guerra, consiguiendo excelentes calificaciones. Finalmente, obtuvo una considerable reputación como médico en Saccolongo (cerca de Padua) y sus servicios

fueron altamente valorados en las cortes europeas (atendió al Papa y al arzobispo escocés de *St. Andrew's*). No obstante, con algunos obstáculos, fue aceptado en 1539 en el Colegio Médico de Milán, llegando a la cúspide de su profesión. Publicó ese mismo año la *Aritmética Práctica y Medidas Singulares (Practica Arithmetice et Mensurandi Singularis)*. En 1545 publica su obra matemática más importante, *Arte Magna (Ars Magna)*. En esta obra expone los métodos de resolución de las ecuaciones de tercer y cuarto grado, traicionando la confianza de Tartaglia, que le había revelado sus métodos de resolución de las de tercer grado. Su *Ars Magna*, sin embargo, tuvo una gran influencia en todos los matemáticos posteriores. En esta obra, además, se expresan diversos teoremas que relacionan raíces y coeficientes, así como la divisibilidad de un polinomio por factores  $(x-x_i)$ , donde  $x_i$  es raíz del polinomio. El *Ars Magna* presenta una explicación completa de la ecuación cúbica, incluyendo el tratamiento de números imaginarios. En este libro, también se publica la resolución de la ecuación general de cuarto grado, debida a su alumno, Ferrari.

Se puede consultar su propia versión de una vida llena de vicisitudes en su célebre autobiografía, *Mi Vida (De vita Propia)*<sup>1</sup>.

En cuanto al libro que aquí nos ocupa, el manuscrito, *El Libro de los Juegos de Azar (Liber de Ludo Aleae)*<sup>2</sup>, que circuló por Francia antes de ser publicado póstumamente en 1663, en la *Opera Omnia*, editada por Jean Antoine Huguetau & Marc Antoine Ravaud en Lyon, nos ofrece la privilegiada posibilidad de observar una investigación en su desarrollo. No es un texto acabado y corrige los errores a medida que avanza y sin retroceder nunca, de forma que aparecen errores que después son eliminados, debido a su carácter de obra póstuma y no preparada para su publicación. Aunque hay que decir que sus errores son pocos y provienen, en su práctica totalidad, del método empleado y del modelo elegido, el dado. Cardano carecía todavía de una simbología adecuada y tenía que recurrir constantemente a los ejemplos concretos. En particular no utilizaba, salvo inconscientemente, los teoremas de la probabilidad de la unión e intersección de sucesos que llamamos teoremas de la probabilidad total

<sup>1</sup> Existe traducción española de Francisco Socas (1991).

<sup>2</sup> Parece haber sido escrito en la década de 1560, pero no fue publicado hasta la edición de *Opera Omnia* de París, en 1663. Curiosamente solo fue traducido al inglés, en una versión modernizada, en *Cardano: The Gambling Scholar. Liber de Ludo Aleae. «The book on games of chance», by Girolamo Cardano*. Trad. Sydney Henry Gould. Ed. de Oystein Ore. Princeton U. Press, (1953).

o compuesta. Intenta resolver los problemas que se han llamado de los *dados*, en primer lugar, y de la *división* o de los *lotes* o los *partis* en segundo lugar. Utiliza dos métodos: el recuento directo de las diferentes posibilidades y el razonamiento a partir de la ganancia media, cuando el recuento le resulta demasiado largo o complicado. Este último método le proporciona solo una aproximación, que no le pasa inadvertida, pero es incapaz de dar razón de las discrepancias. El interés de su análisis radica en parte en el método que sigue para obtener sus conclusiones: la comparación con la igualdad o probabilidad  $\frac{1}{2}$ , lo que él llama «la mitad del circuito», que resulta un punto de vista original y que después sería abandonado. Busca las condiciones para un juego justo o equitativo, donde los jugadores podrían apostar la misma cantidad sin desventaja. Estudia los juegos de dados y de cartas.

Su tratado comienza como una especie de autobiografía en la que se mezclan consejos moralizantes sobre los peligros del juego, con anécdotas de jugador que muestran hasta qué punto Cardano no seguía sus propios consejos; la obra incluye también algunas recomendaciones técnicas en cuanto a los trucos que todo jugador honesto debería evitar y por otra parte tiene que conocer, para no ser a su vez víctima de ellos. Ofrecemos a continuación la versión castellana del texto de Cardano.

## *LIBRO DE LOS JUEGOS DE AZAR*

### CAPÍTULO PRIMERO

#### *De los géneros de los juegos*

Los juegos se basan, o bien en la agilidad del cuerpo, como la Pelota; o en la fuerza, como el Disco y la Lucha; o en la habilidad, como el *Latrunculi*<sup>3</sup>; o en la fortuna, como los dados<sup>4</sup> propiamente dichos o las tabas; o en ambas, como el *Fritillo*<sup>5</sup>. La habilidad adquirida es por su parte de dos clases, o para los juegos o para la lucha, como en el caso de la

---

<sup>3</sup> Ladrones, o peones del ajedrez.

<sup>4</sup> Aquí utiliza *Aleae*, aunque después utilizará sobre todo *tesserae*, hasta el final en que introduce el término *dadi*.

<sup>5</sup> Forma de juego que se explicará en el capítulo VII.

*Primera*<sup>6</sup>; pues también los juegos de cartas reciben el nombre de Juegos de Azar, ya que en los tiempos antiguos las cartas eran desconocidas, e incluso lo era la misma materia con la que están confeccionadas. Es indicio de ello que los antiguos escribían en piel de pergamino, seguramente de cabritilla, sobre papiros egipcios, sobre tablillas, sobre cera y sobre cortezas de tilo. Se le llama *Primera* porque ocupa el primer lugar entre los juegos de azar, ya sea por su belleza, ya porque consta por así decir de un cuarteto de asociaciones primarias que es el número de los elementos con los que nosotros, ya que no el mundo entero, estamos compuestos. Posee además diferentes variantes.

Mientras *alea* en latín significaba para los romanos el dado de seis caras, numeradas del 1 al 6, luego se tomará en el sentido más amplio de juego de dados en general, y finalmente en el de cualquier juego de azar; en italiano esta palabra servirá para significar un juego en el que se utilizan peones y dados sobre un tablero. Esto también se llama *ludus tabularum*. Las palabras *alea* y *tabula* se convierten en sinónimos. Las tablas se asocian sobre todo al tablero de ajedrez. Al perder *alea* el sentido de dado, se utiliza una nueva palabra en italiano, el *taxillus*, un diminutivo de *talus*, que significa taba (astrágalo), pero los humanistas como Calcagnini y Cardano desharían esta confusión y hablarían de *talorum* y *tesserarum*, es decir, tabas y dados. No obstante, tradicionalmente se traduce el título del libro de Cardano como de juegos de azar, puesto que no habla solo de dados sino también de astrágalos y de cartas. Y de hecho la palabra aleatorio significa hoy en día azaroso o dependiente del azar y ha abandonado la alusión al dado.

## CAPÍTULO SEGUNDO

### *De las condiciones de los juegos*

También son a considerar las condiciones de los que juegan, los contendientes, el juego mismo, el dinero, el lugar de la contienda y la ocasión; tan es así que estaba permitido jugar en los banquetes mortuorios. Entre los jurisconsultos existe el epígrafe: «De gastos funerarios y juegos de azar». En otros tiempos estaban prohibidos por la ley, como es el caso

---

<sup>6</sup> Juego de cartas.

de los *Ticios* y *Cornelios*. Y en caso de graves preocupaciones y aflicciones no solo es lícito jugar, sino útil. Y les está permitido a los cautivos y a los condenados a muerte y a los enfermos, y por ello la ley los permite en situaciones luctuosas. Pues si existe alguna ocasión adecuada, ninguna tan digna de excusa como ésta. En cuanto a mí, cuando tras larga consunción me parecía que la muerte se acercaba, el jugar asiduamente a los dados me produjo no poco consuelo. Se impone no obstante la moderación en lo que respecta a la cantidad de las apuestas, pues si no, ciertamente nunca debería permitirse jugar; pues si se pone como excusa que alivia los momentos de tedio, más útiles para ese caso serían las lecturas espirituales, o la narración de fábulas e historias, o alguna de las bellas artes no fatigosas; entre las cuales sería más útil tocar la lira, o la espineta, o cantar, o componer versos y ello por tres razones: la primera porque este modo de interrumpir las acciones serias es más laudable que el juego, ya que, o bien se produce alguna cosa, como en la pintura, o se procede de acuerdo con la naturaleza, como en la música, o porque el hombre aprende algo, como al leer o escuchar fábulas o historias. La segunda, porque no es sin una cierta fatiga y por ello no nos arranca más tiempo del que conviene contra nuestra voluntad, pues el tiempo (como dijo Séneca con razón, hablando de la longitud y la brevedad de la vida) es la cosa más valiosa. La tercera porque este ocio es más honesto y no un mal ejemplo, como sucede con el juego, sobre todo respecto a los hijos y a los criados. A esto se añade que el juego provoca la ira, turba la mente y a veces el hombre se lanza a reñir por el dinero, lo que es vergonzoso y peligroso y prohibido por la ley. Por último, no podemos jugar solos, mientras que los otros placeres podemos disfrutarlos en soledad.

### CAPÍTULO TERCERO

#### *Con quiénes y cuándo conviene más jugar*

Así, a una persona que sea sabia, anciana, y ocupe una magistratura y lleve la toga o bien las enseñas del sacerdocio, le conviene menos jugar, mientras por el contrario no les está vedado a los niños y adolescentes y a los soldados. Cuanto mayor es la apuesta, mayor es el deshonor, así *fue vituperado alguien que ocupaba un sumo sacerdocio [un cardenal]* porque jugó por una apuesta de 5.000 coronas después de cenar con el Duque de Milán; pues este vicio es detestable en los

príncipes, y no pueden defenderlo más que los cortesanos y aduladores de los mismos, ya sea por temor o por recibir un regalo si la suerte es favorable. Entretanto los súbditos son expoliados y los pobres son defraudados de los auxilios que les han sido asignados y que se les deben. Si alguien gana, derrocha el dinero ganado en el juego, y o bien queda reducido a la pobreza, si es pobre y honesto, o al robo, si es poderoso y deshonesto, o a la horca, si es pobre y deshonesto. Si el contrincante tiene mala reputación o es de humilde condición y tiene el vicio del juego, es tanto más peligroso, pues si juegas asiduamente con hombres de este tipo, llegarás a ser un jugador y, si no, serás expoliado a causa de tu menor experiencia, habilidad y astucia.

Las condiciones para jugar deben ser: jugar en raras ocasiones, durante breves espacios de tiempo, en lugar apropiado, con pequeñas apuestas y en ocasiones apropiadas, como un banquete festivo. La persona con la que se juegue debe ser el rey, o un sacerdote de noble virtud<sup>7</sup>, o un pariente por la sangre o por el matrimonio. Jugar con jugadores profesionales es lo más vergonzoso y (como he dicho) es peligroso, el lugar más decente es la casa propia, o la de algún amigo, donde no pueda entrar el público. Los juristas juegan en desventaja, lo mismo que los médicos, pues por una parte parecería que disponen de demasiados ocios y por otra, si ganan, son vistos como jugadores y, si son vencidos se considera que sabrán de su arte tanto como del juego. El mismo juicio se les aplica si quieren practicar la música.

#### CAPÍTULO CUARTO

##### *Utilidad y perjuicios del juego*

Las ventajas del juego bien utilizado son la relajación de las preocupaciones y un placer del cual emergemos dispuestos y más entusiastas para las cosas serias y el conocimiento de las costumbres de los ciudadanos, pues el juego es un potro de tortura en el que se muestran la ira, la avaricia, la honestidad o la deshonestidad. Gran revelación y tortura es el juego si se apuestan grandes cantidades. Concilia amistades, pues

---

<sup>7</sup> Cardano conoció en el juego al Duque de Milán y contaba entre sus amigos a un buen número de cardenales. Nota de Oysten Ore (1953).

muchos prosperaron gracias a la amistad trabada en el juego con los príncipes; pues esto quería decir Cicerón en la *Fillípica*<sup>8</sup>: «tus contrincantes condenados a causa del juego». El verdadero perjuicio es la pérdida de la estimación, y tanto mayor cuanto mayor es el prestigio; y la pérdida de tiempo, las palabras vanas, a veces las imprecaciones a los dioses, el abandono de los asuntos propios, el peligro de que se convierta en costumbre, las meditaciones después del juego recordando la victoria y las malas jugadas, las disputas y a menudo la provocación por la ira: pues el hombre irritado se lanza a elevadas apuestas o a la enemistad y no controla su mente, por eso arroja el dinero y más bien lo tira que lo juega. La prueba más importante de la paciencia de los hombres o de su impaciencia es el juego. La mayor ventaja del juego de azar está en no jugar. Pero es de la máxima utilidad como prueba de paciencia, pues un hombre bueno acabará el juego sin ira, aunque hubiera sido vencido.

#### CAPÍTULO QUINTO

##### *Por qué me ocupo del juego*

Hay dos causas por las que consideré oportuno tratar de los juegos de azar. La primera, por la utilidad de los mismos, pues no será inútil comprender cuándo y perfeccionar cuánto sean útiles. Incluso aunque todos los juegos de azar fuesen malos, teniendo en cuenta las multitudes que los juegan, serían un mal casi natural; por eso mismo debería ser tratado por un médico como uno de los males incurables; y puesto que en todo mal hay un mal menor y en toda infamia una infamia menor, y en toda desgracia una desgracia menor, igualmente en la pérdida del tiempo y de las cosas. Ha sido costumbre de los filósofos tratar los vicios de modo que se pueda extraer de ellos una ventaja, como en el caso de la ira, por lo tanto, no sería absurdo que yo tratase de los juegos de azar, no para alabarlos (pues sé de algunos que con ello han trabajado en vano, y dando mal ejemplo y argumentos a la ley contra los libelos), sino para enseñar las ventajas que en ellos se encuentran y sus desventajas, para que éstas se reduzcan al mínimo posible.

---

<sup>8</sup> Discursos contra Marco Antonio en el año 44 a. C. y que provocaron su ejecución. Cicerón, muy admirador de Demóstenes, utilizó el título de los discursos que este orador pronunció contra Filipo de Macedonia.



## CAPÍTULO SEXTO

*Principales fundamentos de los juegos de azar*

En todos los juegos de azar hay un principio muy importante, la igualdad<sup>9</sup>: de los contrincantes, de los mirones, de las apuestas, del lugar, del cubilete y del juego mismo. Y en la medida en que te apartes de esa cualidad, si es en tu contra, eres un tonto, si es a tu favor, eres injusto. Así pues, con respecto a tu oponente, si es más poderoso que tú, o sin escrúpulos, o si es de temer que sea violento, o tal que quiera ganar siempre provocando retrasos, quejoso, litigioso, escandaloso, trapacero, si puede perturbar tu ánimo, ya sea por el temor o por la ira, es ése el oponente pésimo, y sería perder el dinero, no jugarlo. Mayor peligro hay en los mirones, si son adictos a tu contrincante; por eso, si juegas en medio de un gran grupo de hombres, difícilmente podrás evitar ser tonto o injusto: tonto si están contra ti, injusto si están a tu favor, pues pueden perjudicar de muchos modos, dando abiertamente su opinión e información, lo cual es doblemente malo, porque además de mejorar la situación del contrincante, provocan en ti la ira y te perturban; una persona dominada por la ira, mientras está iracunda está completamente loca; otros perturbarán tu ánimo con su inconsiderada conversación, aunque no den información; otros te interrogarán a propósito sobre asuntos serios; algunos serán tan impúdicos como para provocar tu ira discutiendo contigo, otros se reirán para enfadarte; otros más discretos indicarán con el pie o con la mano que lo que está haciendo el otro no es correcto; otros todavía, que se encuentran alejados, harán algún gesto, más que para ayudar al otro, para introducir en tu ánimo la sospecha; otros anunciarán un falso resultado, otros te abrumarán acusándote a su vez; por todo esto, para ganar injustamente, cuantos más partidarios mejor: de otro modo jugar en presencia de una multitud es prodigar el dinero, no jugarlo; pues, aunque no se haga ninguna trampa, solo la sospecha desconcierta a un hombre y le impulsa a errar, de modo que una persona propicia a la sospecha no debe jugar. El mismo peligro hay, cuando el contrincante lanza el dado muy rápidamente, o mueve sus tablas de manera que no puedas ver lo que hace o lo que el dado muestra. E igualmente si juega con monedas adulteradas o cortadas, o disminuidas con agua, o si el

---

<sup>9</sup> Lo que más tarde se llamará un juego honesto. Esta idea de la igualdad la aplicará a la probabilidad, lo que él llamará «la mitad del circuito», es decir la mitad de los casos posibles.

lugar te causa miedo, o vergüenza; o si los dados están trucados, o si el *fritillo* tiene inclinación.

En este texto Cardano insiste mucho en su preocupación, que es la de los jugadores de todos los tiempos, por impedir las trampas, en particular al lanzar los dados. Desde muy antiguo se renuncia a tirar los dados con la mano y se comienzan a utilizar algunosartilugios muy ingeniosos que luego se transformarán en lo que lo que ahora llamamos cubiletes, unos pequeños vasos redondos. Con ellos se solía jugar a dados y tabas y adquirirían diversos nombres y formas. Los griegos hablaban de *ψηφοβόλω* (lanzador de piedrecillas para jugar), o *πυργός* (torre)<sup>10</sup>, que en el mundo latino se transformaría en *turricula* o torrecilla, orca o tonel, *fimus* (objeto de barro), *pyxis*, córnea, o cajita (*bossoli*) de cuerno y sobre todo *fritillus*<sup>11</sup>, como en la figura 2.1., y *turricula*, figura 2.2.



Figura 2.1. Fritillus

<sup>10</sup> Hofmann (1698).

<sup>11</sup> «Están muy difundidos en Ostia ciertos vasitos en cerámica, de cuerpo ovoide en forma de pera, dotados generalmente de un cuello estrecho y de una embocadura amplia. Entre las múltiples interpretaciones de los arqueólogos (que han visto en ellos tapones de ánfora, o de frascos de bálsamo, etc.), la más verosímil parecía la que identificaba el enigmático objeto con el fritillo o *bossolo* para el juego de dados. La reciente excavación de una necrópolis en Bevagna, Umbría, ha proporcionado una confirmación: entre el ajuar funerario había algunos vasos de este género con dados en el interior. El fritillo y la torrecilla ordinariamente no tenían fondo, eran más anchos en la parte de abajo que en la superior y dentro tenían una serie de escalones inclinados que obligaban a los dados a caer de uno en otro antes de llegar a la mesa, de forma que su caída pudiera considerarse aleatoria y no provocada por un impulso voluntario del jugador. Existen numerosas citas de la antigüedad clásica en las que se menciona el fritillo y su funcionamiento: Séneca, Marcial, Juvenal, Horacio, Ausonio y otros». (Nota de Stefano Costa, en <https://www.zotero.org>. 18/06/2011).

Pero el destino del término *fritillus* sería mucho más complicado, debido a algunas coincidencias azarosas. Como el propio Cardano nos asegura, los dados se solían tirar, no sobre una mesa, sino sobre un tablero que garantizaba mejor la estabilidad y nivelación del terreno de juego y en tiempos de Cardano ya se había llegado a la conclusión de que era ese tablero lo que se llamaba *fritillus* y no sólo el tablero, también un juego de características especiales que luego explicará y que se jugaba con dicho tablero, se llamaba asimismo *fritillus*.

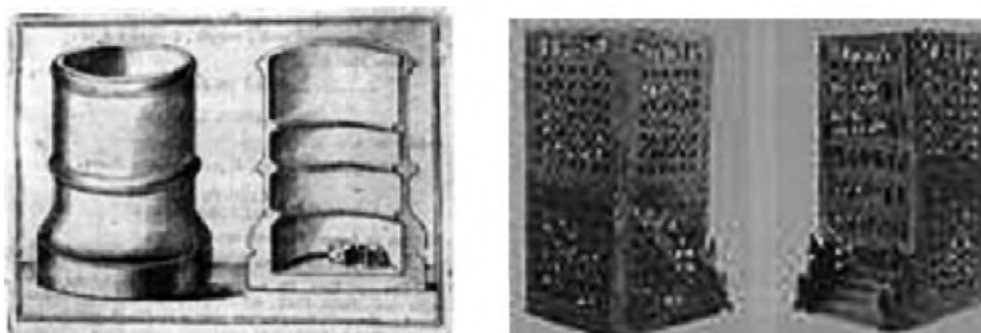


Figura 2.2. Turracula

Por supuesto no era en absoluto necesario que el tablero fuera de ajedrez o damas, es decir que tuviera un dibujo de cuadros o ajedrezado, pero debía ser frecuente el uso de tales tableros, porque la historia natural se inmiscuyó en el asunto y podemos encontrar deslizamientos del significado que no se detienen ahí, sino que llegan a la biología: flores llamadas fritillarias y también determinadas mariposas (que para mayor confusión se llaman *pyrgus*), cuyo aspecto parece ajedrezado o a cuadros, aunque no en todos los ejemplares. En cuanto a las flores, al menos se parecen bastante en la forma a nuestro *fritillus* de la figura 2.3.



Figura 2.3. Flor Fritillaria



Figura 2.4. Mariposa Pyrgus bellier

## CAPÍTULO SÉPTIMO

*De los Fritillos con inclinación y los dados adulterados*

Coloca el tablero (*tabulas*) exactamente en el centro, si oscila hacia la parte adversa, favorece al oponente y por lo tanto está contra ti; igualmente si se inclina hacia ti y está desplomado en tu favor; si el **Fritillo** completo permanece inmóvil, la cosa está igualada. Lo mismo sucede si el **Fritillo** recibe luz de la parte opuesta, eso es perjudicial, pues perturba la mente; por el contrario, es mejor que esté contra algo oscuro. También se dice que es beneficioso si se toma posición frente a la Luna en máximo ascenso. En cuanto al dado, existen dos clases de peligro, pues todo dado, aunque sea un dado permitido, tiene un punto favorecido, ya sea por su forma o por otra causa o por casualidad, y por ello si se cambia un número grande por uno pequeño o viceversa, se comprende que la diferencia será grande. Hay otra manera, cuando el dado está adulterado porque se ha hecho su forma más redonda o más estrecha, lo cual es fácilmente apreciable, o cuando se ha dilatado en una dirección estrechándolo en los vértices contrapuestos. Por tanto, se debe hacer una prueba triple, puesto que hay tres combinaciones de vértices opuestos y eso hace que la superficie sobresalga. De modo que estos aspectos deben considerarse cuidadosamente. Mayores aún son los fraudes que se pueden hacer con las cartas, como veremos más adelante. En todo debemos poner mirada atenta y tomar nota de las condiciones dispares.

## CAPÍTULO OCTAVO

*De las condiciones del jugador*

Es estúpido jugar, aunque sean pequeñas cantidades, cuando no se presta atención; y también el dedicarlo todo al juego para vencer, pues es necesario que quien juega más raramente sea quien menos sepa. ¿Pero abandonarás el estudio de las artes para vencer en el juego, y muy poco? ¿O para ser vencido, y enfadarte contigo mismo y que se rían de ti? Y si pierdes una gran cantidad, nunca es tan grande la ganancia del victorioso como la pérdida del vencido, pues éste generalmente suele dar mucho. El hombre despilfarra y pierde su tiempo y cuando una sola vez el dado cae contra él su pérdida es más infeliz que su lucro al ganar varias veces. Por eso es que debes ser más hábil y experimentado que el otro, o si no, jugar de forma que no importe de qué modo cae el dado, como será el caso si juegas pequeñas cantidades y con tus personas queridas, en tu casa, durante poco tiempo, después de la cena. Pero si estás decidido a jugar grandes cantidades, juega asiduamente con alguien que no sea más hábil que tú, ni más afortunado, ni de inicua condición. Pues en esto la fortuna vale mucho.



Figura 2.5. Dados antiguos

## CAPÍTULO NOVENO

*Del lanzamiento de un dado*

La taba tiene cuatro caras, y así también cuatro puntos<sup>12</sup>. El verdadero dado<sup>13</sup>, seis; dándole seis revoluciones debe aparecer cada punto, pero si alguno se repite, es necesario que los otros no aparezcan; los puntos son representados sobre planos, de manera que se puede ver y por tanto dibujar [la taba] apoyada sobre cualquiera de los lados; aunque no está ahora en uso como tal y los niños juegan con ella haciéndola girar como una peonza y como si no tuviera forma de dado. Por otra parte, la igualdad se encuentra siempre en la mitad de los números, y así un punto saldrá [en el dado] en tres tiradas, pues en seis se completa la revolución, o bien saldrá uno de tres puntos en una tirada; por ejemplo, se puede obtener uno, tres o cinco de igual manera que dos, cuatro o seis.

La igualdad se produce cuando la probabilidad es  $\frac{1}{2}$ . En el caso de un dado, la probabilidad de cualquiera de sus caras, supuesto el dado perfecto, es  $\frac{1}{6}$ , luego la igualdad estará en tres tiradas:  $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ .

Es cierto que uno de tres puntos saldrá con igualdad en una tirada, por ejemplo  $p(\text{número par}) = p(2) + p(4) + p(6) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6}$ . Pero para que un punto determinado salga en tres tiradas, solo tiene razón Cardano si no fuera posible que ese punto saliese dos o tres veces en las tres tiradas, como si, habiendo salido una sola vez, desapareciera ya del dado y no pudiera volver a salir. Cabe también otra interpretación menos clásica, y es que Cardano considera las tiradas (*iactum*) no como debidas al azar, sino como las diferentes posiciones en que podemos colocar (hacer yacer) el dado, por ejemplo con la mano, y siguiendo un determinado orden. En ese sentido abundaría la frase que dice en el capítulo siguiente: «la sucesión es según un orden y sin orden falla» También parece corroborar esta interpretación el hecho

---

<sup>12</sup> Es decir, cuatro valores diferentes, pues las caras del astrágalo o taba son todas distinguibles, aun cuando no se les marque con números, como a los dados.

<sup>13</sup> *Alea*.

de que considere el azar o la fortuna, como un factor adicional, cuando dice en el mismo capítulo: «en cuanto al 1 y 2, pueden salir de dos maneras, por tanto en 9 tiradas tienen la igualdad y que salgan más frecuentemente o más raramente es debido a la fortuna. La fórmula que debería aplicarse aquí y que Cardano no conocía, pues no utilizaba ninguna fórmula es:

$$p(A \cup B \cup C) = p(A) + p(B) + p(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C) = \\ = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{36} - \frac{1}{36} - \frac{1}{36} + \frac{1}{216} = \frac{91}{216}$$

y no  $\frac{108}{216} = \frac{1}{2}$ . Para obtener 108 habría que suponer que las intersecciones son imposibles y por lo tanto su probabilidad es cero.

Por tanto, se pactará con seguridad de acuerdo con esta propiedad, si el dado es justo, y tanto más o menos cuanto más difiera de la verdadera igualdad. Como dije, esto contribuye verdaderamente para comprender mejor, pero apenas nada para la práctica.

Cardano se refiere aquí a que, al no disponer todavía de una teoría contrastada, aun en los casos en que tenían la razón, los matemáticos se veían en dificultades para convencer de ello a los jugadores, que llegaban a sus acuerdos privados sin escucharles, e incluso los mismos matemáticos no estaban muy seguros de sus cálculos.

## CAPÍTULO DÉCIMO

### *Por qué fue condenado el juego por Aristóteles*

Por tanto, si descendemos a hablar del juego, y del mismo juego de azar, del que hablaremos más adelante, no excusaré a nadie, especialmente a aquellos que, para el gran perjuicio del ánimo, apuestan dinero, y declaro infame al juego de azar, pues el hombre se lucra a costa de su amigo y contra la voluntad de éste. Pues lo óptimo es el lucro de aquellos que lo quieren y lo saben; en segundo lugar, de los que lo saben pero no lo quieren. En el primero de estos géneros están los juristas y los médicos, en el