

ÍNDICE

13 PRÓLOGO

17 PREFACIO

23 PRIMERA PARTE

Historia previa

1. Introducción: el problema del cálculo manual	25
2. Primer obstáculo: cifras y notaciones	27
2.1. Introducción	27
2.2. La complicación: un ejemplo “real”	28
2.3. <i>Modus operandi</i>	30
3. Numeración y notación	40
3.1. Introducción	40
3.2. Historia	40
3.3. Recapitulación	47
3.4. Otras numeraciones en la historia	48

53 SEGUNDA PARTE

Llegan los logaritmos

4. El pionero: Arquímedes de Siracusa	55
4.1. Planteamiento previo	55
4.2. Una simplificación...	56
4.3. ... Y la primera generalización	57
5. Los acontecimientos se precipitan: dos pioneros	59
5.1. Stifel	59
5.2. Bürgi	60
6. Llega Neper	66
7. Los “logaritmos” de Neper	68
7.1. Construcción	68
7.2. Propiedades	69
7.3. Utilización de los logaritmos de Neper	71
7.4. Los logaritmos de Neper no son neperianos	73
7.5. El nombre	76
7.6. Volvamos con Bürgi	76
8. Otro paso adelante: los logaritmos de Briggs	79
8.1. Los problemas del sistema neperiano	79

8.2. Un intento fallido	80
8.3. Los logaritmos “vulgares”	81
9. Viniéndonos arriba: logaritmos en otras bases	84
9.1. Definición	84
9.2. Relación entre los logaritmos en dos bases diferentes	85
9.3. El cero	85
9.4. El uno	86
9.5. Los números negativos	86
10. La curva logaritmo	88

89 TERCERA PARTE

El uso de los logaritmos para el cálculo manual

11. Las tablas de logaritmos	91
11.1. Neper	91
11.2. Briggs	92
11.3. Otros	93
11.4. Utilización de las tablas	95
11.5. ¿Cómo construyó Briggs sus tablas?	101

109 CUARTA PARTE

La función logaritmo y el análisis

12. El número e	111
12.1. Entrada en la historia	111
12.2. La primera estimación	113
12.3. El número e comienza a destacar en sociedad	114
12.4. Un paréntesis: los números complejos	118
12.5. El logaritmo neperiano, natural o hiperbólico	123
13. Euler, los números complejos, los logaritmos y las series armónicas	135
13.1. El logaritmo complejo	135
13.2. Irracionalidad y trascendencia de π	137
13.3. En desagravio de Saint-Vincent: cuadratura del círculo	138
13.4. La trigonometría	141
13.5. Más series armónicas	143
13.6. Las series armónicas y los logaritmos: más números raros	154
14. Más primos y más logaritmos: el teorema de los números primos	160

14.1. Objetivo	160
14.2. Historia	160
14.3. El teorema de los números primos	161
14.4. Otras aproximaciones asintóticas	162
14.5. Relación entre el teorema de los números primos y la conjetura de Riemann	163
14.6. El n -simo número primo	164
15. Los logaritmos y la energía nuclear	165
15.1. El decaimiento exponencial	165
15.2. El uranio 235	166
15.3. Hablemos ahora de crecimiento	167
15.4. Las bacterias y los virus, esos bichos desagradables	167

169 QUINTA PARTE

Herramientas manuales para el cálculo

16. <i>Ars addendi</i> : el modesto ábaco	171
16.1. El abuelo	171
16.2. Su historia primitiva	171
16.3. Nos quedamos en occidente: S.P.Q.R. Y la gran contradicción	174
16.4. ¿Cómo trabajaban los romanos?	176
16.5. Los huesos de Neper (<i>Napier's bones</i>)	176
16.6. Tipos de ábacos	180
16.7. Utilización del ábaco Soroban	180
16.8. <i>The king is dead, long live the king</i>	187
16.9. Un pensamiento	189
17. La regla de cálculo	190
17.1. ¿Qué es?	190
17.2. Recapitulemos	193
17.3. Historia	194
17.4. Las reglas de cálculo modernas. Difusión	199
17.5. La precisión	204
17.6. El final de una época	210
17.7. ¿Dónde podemos seguir saciando nuestra sed?	210

213 SEXTA PARTE

Las calculadoras de bolsillo

18. Después de la regla de cálculo: se levanta la bandera	215
19. La calculadora HP-35	217
19.1. Historia	217

	19.2. Algoritmo <i>CORDIC</i>	218
	19.3. Los sorprendentes casos de la división y del producto	222
	19.4. Utilización	223
	20. El ingenio al poder. La calculadora Sinclair Scientific	224
	20.1. Presentación	224
	20.2. Distribución	224
	20.3. Las operaciones elementales	226
	20.4. El ingenio prometido: funciones	228
241	EPÍLOGO	
	21. <i>Nanos, gigantium humeris insidentes</i>	243
249	BIBLIOGRAFÍA	
	22. Lecturas recomendadas	251
	22.1. Propósito	251
	22.2. Lista de textos	251
255	APÉNDICE A	
	Programación del algoritmo <i>CORDIC</i>	
	23. Explicación	257
	24. Programación	259
273	APÉNDICE B	
	Programación de la Sinclair Scientific	
	25. Explicación	275
	26. Programación	276
	26.1. Trigonometría circular	276
	26.2. Logaritmo y antilogaritmo	284
	26.3. Trigonometría hiperbólica	287
	26.4. Trigonometría elíptica	288



Columna de Trajano (Roma, 113).

1. INTRODUCCIÓN: EL PROBLEMA DEL CÁLCULO MANUAL

En la actualidad todos disponemos de pequeñas calculadoras, muy sencillas de manejar, que nos permiten realizar cualquier operación, por compleja que sea, de forma rápida y precisa. Sin embargo, esto no siempre fue así, pues su presencia en el mercado data de no más de 50 años.

Ya antes hubo máquinas calculadoras mecánicas que podían realizar incluso multiplicaciones y divisiones, aunque eran complejas y lentas de usar. Se debe a Leibniz (1671) la calculadora más antigua de este tipo que se tiene certeza de que fuera realmente construida, y fue una evolución de la “pascalina” de Blas Pascal (1642), que sólo era capaz de sumar y restar, y de las máquinas aritméticas del inventor inglés Samuel Morland, que datan de la década de 1660.



Pascalina (1642).

Pero la calculadora de Leibniz y otras posteriores que se basaron en ella y funcionaban de forma similar, realizaban las multiplicaciones y divisiones mediante una sucesión de sumas y restas, respectivamente. En el año 1878 el periodista e inventor español Ramón Vereá presentó su máquina (*Vereá Direct Multiplier*, 26 kg de peso), capaz de realizar las multiplicaciones de forma directa mediante el mecanismo que había patentado seis años antes el inventor norteamericano Edmund D. Barbour. La máquina de Vereá podía operar con



Blas Pascal (1623-1662).



Gottfried Wilhelm Leibniz
(1646-1716).
Retratado por
Christoph Bernhard Francke.



Ramón Verea (1833-1899).

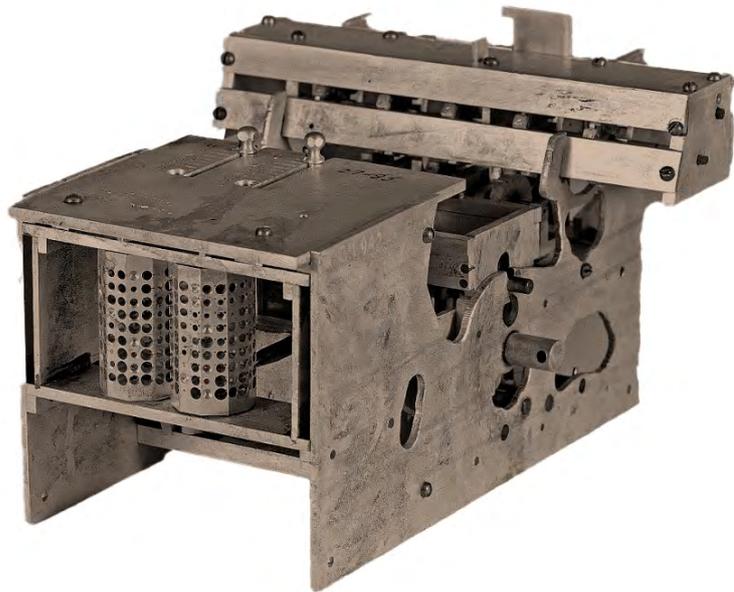
números de hasta nueve cifras y era capaz de hacer, por ejemplo, el cálculo $698.543.721 \times 807.689$ ¡en sólo 20 segundos!, resultando la más veloz de la época.

Podríamos seguir hablando de estas máquinas y su evolución, primero como calculadoras mecánicas (hasta los años 60 del siglo XX) y después como calculadoras electrónicas, pasando por uno de los inventos más geniales del hombre: la regla de cálculo, pero lo dejamos aquí, de momento, porque nos interesa más volver a una época en la que nada de esto existía, pero sí se conocían ya materias como el interés compuesto, la navegación, o el estudio de las órbitas planetarias, que tenían en común dos cosas: requerían realizar cálculos complejos, y exigían una gran precisión.

Desgraciadamente, la persona encargada de tal tarea no disponía, en general, de este tipo de ayudas. El problema que había que resolver era nada menos que ¡multiplicar y dividir!

Verea Direct Multiplier

Museo de la sede central de IBM. Armonk, Nueva York.



Calculadora mecánica Olivetti (1948).

Museoscienza.org. Museo nazionale della scienza e della tecnologia Leonardo da Vinci, Milano.

2. PRIMER OBSTÁCULO: CIFRAS Y NOTACIONES

2.1. Introducción

Para no irnos muy lejos vamos a comenzar situándonos en plena época imperial romana, en torno al año 100 de nuestra era. Nuestros antepasados de aquellos tiempos manejaban un sistema de numeración, que todos conocemos desde la escuela y del que hablaremos a continuación⁴:



Comenzaremos con intentar entender su origen. Para ello acudiremos al libro *The River Mathematics*⁵ en el que se presenta una interpretación curiosa de la grafía de los números pequeños del sistema de numeración romano. Su autor afirma que los dígitos corresponden a signos hechos con la mano. Por ejemplo, los números *I*, *II*, *III* y *IIII* corresponden a los números de dedos alzados a la vista de otra persona. Entonces, la *V* representa la mano alzada con el pulgar separado de los demás dedos juntos. Los números del 6 a 10 se representan con dos manos, como sigue (mano izquierda, mano derecha): 6 = (*V*, *I*), 7 = (*V*, *II*), 8 = (*V*, *III*), 9 = (*V*, *IIII*), 10 = (*V*, *V*), y el símbolo *X* resulta de cruzar los pulgares o de alzar ambas manos formando una cruz.

Con respecto a los demás símbolos que podemos ver en el sistema de numeración romano, *C* era la inicial de *Centum* y *M* la de *Mille*, aunque, según parece, originalmente se utilizó la letra griega digamma (Φ , como Phi), para representar el millar. De esta última notación, parece que se obtiene la *D* como símbolo para el 500, ya que *D* podría interpretarse como la mitad derecha de Φ . El 50 (*L*) se escribía de modos distintos: *N*, *И*, *K*, Ψ , \mathfrak{h} , etc., pero tal vez la más frecuente era con forma de flecha apuntada hacia abajo, como una *V* y una *I* superpuestas: Ψ . Esta se había achatado hasta formar una \perp (una *T* invertida), en la época de Augusto, y poco después se había identificado con la letra *L*, que se le parecía gráficamente. Los

Letra	Valor
<i>I</i>	1
<i>V</i>	5
<i>X</i>	10
<i>L</i>	50
<i>C</i>	100
<i>D</i>	500
<i>M</i>	1.000

⁴ El siguiente texto está tomado de nuestro libro *Ríos de la Península Ibérica. Un paseo por la historia de España*.

⁵ Hooper. *The River Mathematics*. 1945.

romanos no reconocían el cero como número, por lo que no existe un símbolo o letra para representarlo.

Hemos dicho anteriormente que expresaban el número 4 mediante cuatro palitos, y esta afirmación puede confundir a algún lector familiarizado con los números romanos “actuales”, y acostumbrado a escribir cantidades como *IV*, *XL* o *CD*. Para aclarar esta contradicción diremos que los romanos nunca tuvieron problema en repetir cuatro veces un símbolo y los números anteriores los escribían *IIII*, *XXXX* y *CCCC*. La norma de restar poniendo un símbolo a la izquierda es medieval (se conoce como “notación sustractiva”) y tuvo como única misión ahorrar en la representación de caracteres, creándose las siguientes reglas:

- Sólo se puede utilizar un número para restar (*XXL* no representaría el valor 30, sino que sería erróneo).
- A *V* y a *X* sólo se les puede restar *I* (*VX* no tendría sentido).
- A *L* y a *C* sólo les puede restar *X* (*VC* no sería correcto para representar el número 95, que se escribiría *XCV*).
- A *D* y a *M* sólo les puede restar *C* (*LD* no sería 450, que se escribiría *CDL*).

Para representar múltiplos de 1000 los romanos ponían una raya horizontal encima del número, que quedaba así multiplicado por 1000 ($\overline{XC} = 90.000$), y dos barras rodeando un número lo multiplicaban por cien. Así, por ejemplo:

$$\overline{\overline{XXXI}}\overline{MDCCXV} = 3.101.715$$

2.2. La complicación: un ejemplo “real”

Volvamos al día complicado que tuvo nuestro ya amigo Georges, y que hemos comentado en el Prefacio, y supongamos que uno de sus alumnos, que llamaremos Gastón, quizás como castigo divino, se ha visto envuelto en una anomalía temporal que le ha ocasionado un desplazamiento en el espacio-tiempo llevándolo hasta el siglo II, concretamente al año 106 de nuestra era, o más propiamente hablando, al año 279



Columna de Trajano (Roma, 113). Monumento realizado para conmemorar las victorias de Trajano en las dos guerras dacias y para servir de sepulcro de las cenizas del emperador tras su muerte.

a.u.c.⁶ y a la ciudad de Itálica⁷, en plena provincia Bética.

Las noticias de la reciente victoria de su paisano Marco Ulpio Trajano en la segunda guerra dacia⁸ han llegado ya a la ciudad y uno de sus habitantes Mario Zúlio Procopión, de clase senatorial y terrateniente de la ciudad, antiguo compañero de Marco en la *schola* y militar como él, pues había servido como tribuno latí-clavio en la legión IX Hispana, allá por las frías tierras britanas, está feliz.

No sólo se alegra sinceramente del éxito de su amigo, sino que sabe que el enorme botín conseguido hará que sus exportaciones de aceite de oliva a la metrópoli se disparen. Lleno de euforia, pide a su esclavo de cámara que le traiga un punzón y tablillas enceradas, pues quiere hacer una evaluación de los beneficios que espera obtener.

Vamos a ver cómo plantea el problema, tenemos:

- \overline{XIII} *olivae*, cada uno de los cuales proporciona:
- *CLII* *librae*⁹ de *olivae*¹⁰, y cada *C* *librae*, al ser frutos de gran calidad, se convierten en:
- *XXXVIII* *quartarii*¹¹ de *oleum*.

Por otra parte, el senador Mario estima que el precio de esta temporada estará en el entorno de *I sestertius* por cada *C quartarii*, por lo que, teniendo en cuenta que *IV sestertii* equivalen

IMP. CAESARI. DIVI. NERVAE. F. NERVAE
TRAIANO. AUG. GER. DACIO. PONTIF. MAX.
TRIB. POTEST; VIII IMP. V.COS V. P.P.

Inscripción en el puente de Alcántara que nos cuenta que fue construido por orden de:

- El emperador César Nerva Trajano Augusto.
- Hijo del divino Nerva (adoptivo).
- Germánico y dacio (títulos por haber vencido a estos pueblos).
- Pontífice máximo (responsable de los puentes).
- Potestad tribunicia por octava vez.
- Quinto año de su imperio.
- Cónsul por quinta vez.
- Padre de la patria.

⁶ *Ad urbe condita*, es decir, "Desde la fundación de la ciudad (Roma)", fechada generalmente en el año 173 a.C.

⁷ Hoy Santiponce, ciudad próxima a Sevilla y pegada a la ruta de la Plata (prolongación de la calzada que unía *Augusta Emerita* con *Asturica Augusta*), que la separa del río Rivera de Huelva, cuando éste está ya próximo a verter sus aguas en el gran Betis.

⁸ En esta segunda guerra, que tuvo lugar entre los años 105 y 106, el emperador Trajano derrotó por segunda vez al rey dacio Decéballo, que se suicidó, e incorporó su reino al Imperio.

⁹ *Libra*: Unidad de peso equivalente a 328,9 gramos.

¹⁰ Sí, los romanos, en este caso, llamaban con el mismo nombre al árbol y a su fruto.

¹¹ *Quartarium*: unidad de capacidad equivalente a 0,135 litros.

a un *denarius* y que hacen falta *XXV denarii* para lograr un *aureus* de oro, este año podrá vender su producción por¹²:

$$\overline{XIII} \times CLII \times \frac{XXXVIII}{C} \times \frac{I}{C} \times \frac{I}{IV} \times \frac{I}{XXV} \text{ aurei}$$

Tras llegar a este resultado Mario mira al horizonte, vuelve a mirar la tablilla y rápidamente encuentra la solución: llama a su liberto personal, el griego Filemón, que es su contable, le cede los trastos y pide que le preparen el *balneum*. Ha sido un trabajo agotador y sólo quiere ya introducir su cuerpo en el *caldarium*¹³. Decididamente la adquisición de Filemón había sido una buena compra y el, ya maduro, griego se merecía con creces la manumisión que le había regalado.

2.3. Modus Operandi

La forma en la que los romanos escribían sus cantidades se prestaba muy mal a operar con ellos; los algoritmos son siempre complejos, como veremos en dos ejemplos:

2.3.1. La suma



Este caso no es complicado; basta con dar unos sencillos pasos, que iremos siguiendo con un ejemplo:

$$MDCCVII + CCCLVIII$$

Pero antes quisiéramos hacer notar que la notación romana clásica es una mera yuxtaposición de “cifras” y que la cantidad coincide con la suma de éstas, es decir:

$$MDCCVII = M + D + C + C + V + I + I$$

Hecho que nos da la base para poder sumar dos cantidades, utilizando un algoritmo que tiene tres pasos:

¹² Rogamos al lector que nos perdone el anacronismo en la notación de las operaciones, pues esto se ha hecho por su bien.

¹³ Como es bien sabido, el típico baño romano (*balneum*) constaba de tres piscinas en las que el agua iba bajando de temperatura: *caldarium*, *tepidarium* y *frigidarium*.

1	Concatenamos los dos números que vamos a sumar.	<i>MDCCVII CCCLVIII</i>
2	Ordenamos los números de forma decreciente en función de su valor.	<i>MDCCCCCLVVIIIIII</i>
3	Agrupamos las letras que sean iguales, siguiendo las reglas de la numeración romana (esto puede requerir más de un paso).	<i>MDDLXVI = MMLXVI</i>

Si estuviésemos en la Edad Media (notación sustractiva), la operación se habría escrito:

$$MDCCVII + CCCLIX$$

Y habríamos tenido que dar dos pasos adicionales:

Uno previo, consistente en pasar a notación clásica no sustractiva:

$$CCCLIX \rightarrow CCCLVIII$$

Y otro final, en el que pasaríamos el resultado a notación sustractiva, que en este caso no habría sido necesario.

El algoritmo no es complicado, pero obviamente es muy poco eficiente, y eso llevaba a la necesidad práctica de utilizar ábacos para hacer las sumas (ver capítulo 16). Su manejo era ya una profesión, o, mejor dicho, varias, pues estaba el *librarius* que era el maestro, que enseñaba a usarlos, el *tabularius* o *calculator*, que hacía los cálculos y el *rationarius* que venía ser el que hoy llamaríamos contable. Filemón “el liberto griego” fue el *rationarius* de la hacienda del senador Mario.

2.3.2. La resta

La idea viene a ser la misma, agrupar y desagrupar según convenga, pero ahora la práctica es algo más compleja; veamos un ejemplo:

$$MDCCVII - CCCLVIII$$

