

ÍNDICE

Presentación	9
Capítulo 1. Cinemática del punto y de los sistemas	19
1.1. Conceptos fundamentales	23
1.2. Velocidad	25
1.3. Expresión de la velocidad en algunos sistemas particulares de coordenadas	28
1.4. Aceleración	30
1.5. Expresión de la aceleración en algunos sistemas particulares de coordenadas	31
1.6. Componentes intrínsecas de la aceleración	35
1.7. Velocidad areolar	36
1.8. Cinemática de los sistemas indeformables	37
1.9. Movimientos de traslación y de rotación	39
1.10. Equiproyectividad del campo de velocidades	43
1.11. Distribución de velocidades	44
1.12. Grupo cinemático	48
1.13. Distribución de aceleraciones	50
1.14. Reducción del movimiento general de un sistema a rotaciones	51
1.15. Eje instantáneo de rotación y deslizamiento mínimo. Axoides	52
1.16. Movimiento relativo de dos superficies en contacto	53
Ejercicios	55
Soluciones de los ejercicios	57

Capítulo 2. Cinemática del movimiento relativo	69
2.1. Sistemas de referencia fijo y móvil	73
2.2. Velocidad en el movimiento relativo	74
2.3. Aceleración de un punto en el movimiento relativo	75
2.4. Aceleración de Coriolis. Efecto geostrófico	77
2.5. Velocidad y aceleración en coordenadas polares planas como aplicación del movimiento relativo	79
Ejercicios	81
Soluciones de los ejercicios	83
Capítulo 3. Cinemática del movimiento plano y esférico	93
3.1. Movimiento plano	97
3.2. Centro instantáneo de rotación. Base y ruleta	100
3.3. Velocidad de sucesión del centro instantáneo. Aceleración del centro instantáneo	102
3.4. Trazado de la trayectoria de un punto conocida la base y la ruleta	105
3.5. Trazado de la base y la ruleta conocidas las trayectorias de dos puntos	107
3.6. Método de Hartman para calcular la velocidad de sucesión del centro instantáneo	108
3.7. Perfiles conjugados	110
3.8. Métodos gráficos para el trazado de perfiles conjugados	111
3.9. Fórmula de Euler-Savary	116
3.10. Polo de aceleraciones. Circunferencias de las inflexiones y de las inversiones	118
3.11. Cinemas de velocidades y aceleraciones	121
3.12. Cinemática del movimiento esférico	125
3.13. Velocidades y aceleraciones en el movimiento esférico	127
3.14. Ángulos y rotaciones de Euler	128
3.15. Movimiento de precesión	132
Ejercicios	134
Soluciones de los ejercicios	136
Capítulo 4. Estática del punto y de los sistemas	145
4.1. Estática. Axiomas fundamentales	149
4.2. Ligaduras: postulado de liberación	150
4.3. Equilibrio del punto material libre	151

4.4.	Equilibrio del punto material ligado a una superficie sin rozamiento	152
4.5.	Equilibrio del punto material ligado a una línea sin rozamiento	156
4.6.	Rozamiento: leyes	159
4.7.	Equilibrio del punto material ligado a una superficie con rozamiento	162
4.8.	Equilibrio del punto material ligado a una línea con rozamiento	164
4.9.	Estática de los sistemas. Introducción	166
4.10.	Equilibrio del cuerpo rígido libre y ligado en general	167
4.11.	Cuerpo rígido bajo la acción de dos o tres fuerzas	169
4.12.	Equilibrio de un cuerpo rígido con un punto fijo	171
4.13.	Equilibrio de un cuerpo rígido con una recta fija	172
4.14.	Equilibrio de un cuerpo rígido apoyado sobre un plano horizontal sin rozamiento	174
4.15.	Cuerpo suspendido de uno o más puntos	176
4.16.	Resistencia a la rodadura y al pivotamiento	178
4.17.	Otros problemas de equilibrio de sólidos	181
	Ejercicios	187
	Soluciones de los ejercicios	189

Capítulo 5. Estática de hilos 201

5.1.	Sistemas deformables: hilos	205
5.2.	Hilo sometido a un sistema discreto de fuerzas coplanarias .	206
5.3.	Hilo sometido a un sistema continuo de fuerzas: integrales generales	208
5.4.	Ecuaciones intrínsecas de equilibrio	210
5.5.	Equilibrio de hilos en el caso de que exista una función potencial de fuerzas	211
5.6.	Hilo bajo la acción de su propio peso. Catenaria	212
5.7.	Puente colgante	216
5.8.	Hilo sobre una superficie sin rozamiento	219
5.9.	Hilo sobre una superficie con rozamiento	222
	Ejercicios	226
	Soluciones de los ejercicios	227

Capítulo 6. Dinámica del punto libre 239

6.1.	Introducción	243
6.2.	Leyes fundamentales de la mecánica	244

6.3.	Ecuaciones del movimiento del punto material libre	249
6.4.	Ecuaciones intrínsecas	250
6.5.	Teorema de la cantidad de movimiento	251
6.6.	Teorema del momento cinético	253
6.7.	Teorema de la energía cinética	255
6.8.	Movimiento rectilíneo: casos en que la fuerza motriz depende sólo del tiempo, de la posición o de la velocidad	257
6.9.	Movimiento rectilíneo de un punto en un medio resistente: velocidad límite	261
6.10.	Movimiento curvilíneo de un punto pesado en el vacío. Parábola de seguridad	265
6.11.	Movimiento curvilíneo de un punto material en medio resistente	268
	Ejercicios	272
	Soluciones de los ejercicios	273

Capítulo 7. Movimiento en un campo de fuerzas centrales 281

7.1.	Ecuaciones del movimiento	285
7.2.	Movimiento bajo la acción de una fuerza central que sólo depende de la distancia	291
7.3.	Determinación de la fuerza central conociendo la trayectoria	295
7.4.	Movimiento de los planetas: leyes de Kepler	299
7.5.	Atracción universal. Problema de los dos cuerpos	307
	Ejercicios	313
	Soluciones de los ejercicios	314

Capítulo 8. Dinámica del punto ligado 325

8.1.	Movimiento de un punto material ligado a una curva sin rozamiento	329
8.2.	Movimiento de un punto material pesado sobre una curva lisa y fija	333
8.3.	Movimiento de un punto material ligado a una superficie lisa: ecuaciones generales	337
8.4.	Ecuaciones intrínsecas del movimiento	340
8.5.	Caso de que no existan fuerzas exteriores: geodésicas	343
	Ejercicios	345
	Soluciones de los ejercicios	347

Capítulo 9. Dinámica del movimiento relativo	361
9.1. Dinámica del movimiento relativo del punto material libre ..	365
9.2. Dinámica del movimiento relativo del punto material ligado.	369
9.3. Equilibrio relativo en la superficie de la Tierra	372
9.4. Movimiento relativo en la superficie de la Tierra	373
9.5. Caída libre de un punto pesado sobre la superficie de la Tierra	376
9.6. Péndulo de Foucault	379
Ejercicios	385
Soluciones de los ejercicios	386
Capítulo 10. Geometría de masas	395
10.1. Momentos estáticos de una distribución de masas	399
10.2. Centro de masas de una distribución	403
10.3. Teoremas de Guldin	413
10.4. Momentos de inercia centrales, áxicos y planarios	416
10.5. Productos de inercia	417
10.6. Relaciones entre momentos de inercia	418
10.7. Teorema de Steiner	420
10.8. Relación entre los momentos de inercia respecto a ejes con- currentes	424
10.9. Matriz de inercia	426
10.10. Elipsoide y elipse de inercia	428
10.11. Radio de giro	432
Ejercicios	433
Soluciones de los ejercicios	435
Capítulo 11. Dinámica de los sistemas. Teoremas fundamen- tales	445
11.1. Introducción	449
11.2. Cantidad de movimiento de un sistema: Teorema de la canti- dad de movimiento	452
11.3. Teorema del centro de masas	454
11.4. Momento cinético total de un sistema: Teorema del momen- to cinético	455
11.5. Energía cinética total de un sistema: Teorema de la energía cinética	457
11.6. Ecuaciones universales del movimiento de un sistema	462
11.7. Movimiento de un sistema alrededor de su centro de masas.	463

Ejercicios	469
Soluciones de los ejercicios	471
Capítulo 12. Dinámica del sólido con un eje fijo	485
12.1. Movimiento de un sólido rígido alrededor de un eje fijo	489
12.2. Ejes permanentes y espontáneos de rotación	497
12.3. Péndulo compuesto	499
12.4. Equilibrado estático y dinámico	503
Ejercicios	505
Soluciones de los ejercicios	507
Capítulo 13. Dinámica del sólido con un punto fijo	517
13.1. Dinámica del sólido con un punto fijo	521
13.2. Ecuaciones de Euler	526
13.3. Reacción del punto fijo	528
13.4. Solución general del problema del sólido con un punto fijo	529
13.5. Caso de Euler-Poinsot	529
13.6. Estabilidad de la rotación alrededor de un eje principal de inercia	544
13.7. Caso de Lagrange-Poisson	545
13.8. Movimiento giroscópico	557
Ejercicios	567
Soluciones de los ejercicios	568
Capítulo 14. Percusiones	579
14.1. Percusiones aplicadas a un punto material	583
14.2. Percusiones aplicadas a un sistema	587
14.3. Sólido con un eje fijo sometido a percusiones	589
14.4. Sólido móvil con un punto fijo sometido a percusiones	594
14.5. Sólido libre sometido a percusiones	595
14.6. Choques. Estudio general de la pérdida de energía cinética en el choque. Teorema de Carnot	596
Ejercicios	599
Soluciones de los ejercicios	600

Capítulo 15. Mecánica analítica	611
15.1. Introducción	615
15.2. Estática analítica	615
15.3. Principio de los trabajos virtuales	617
15.4. Dinámica analítica. Principio de D'Alembert	618
15.5. Formulación lagrangiana	623
15.6. Formulación hamiltoniana	628
15.7. Principios variacionales	638
15.8. Formulación de Hamilton-Jacobi	650
Ejercicios	656
Soluciones de los ejercicios	657
Capítulo 16. Vibraciones	665
16.1. Introducción	669
16.2. Pequeñas vibraciones alrededor de una posición de equilibrio estable	670
16.3. Vibraciones en sistemas con un grado de libertad	678
16.4. Vibraciones libres en sistemas con dos grados de libertad	693
16.5. Análisis armónico	696
Ejercicios	698
Soluciones de los ejercicios	700
Bibliografía	715
Índice analítico	717

Capítulo 12

DINÁMICA DEL SÓLIDO CON UN EJE FIJO

OBJETIVOS

1. *Describir el movimiento de un sólido rígido alrededor de un eje fijo.*
2. *Calcular el momento cinético y la energía cinética del sólido.*
3. *Obtener la ecuación del movimiento.*
4. *Calcular las reacciones en los apoyos del eje.*
5. *Determinar los ejes permanentes y espontáneos de rotación.*
6. *Describir el péndulo compuesto y calcular el periodo de oscilación.*
7. *Calcular la longitud del péndulo simple síncrono.*
8. *Enunciar y demostrar el teorema de Huygens.*
9. *Establecer el método para equilibrar estática y dinámicamente un eje.*

ESQUEMA-RESUMEN

- 12.1. Movimiento de un sólido rígido alrededor de un eje fijo
 - Momento cinético
 - Energía cinética
 - Ecuación del movimiento
 - Reacciones en los apoyos

- 12.2. Ejes permanentes y espontáneos de rotación
 - Ejes permanentes
 - Ejes espontáneos

- 12.3. Péndulo compuesto
 - Péndulo simple síncrono
 - Teorema de Huygens

- 12.4. Equilibrado estático y dinámico

12. DINÁMICA DEL SÓLIDO CON UN EJE FIJO

12.1. MOVIMIENTO DE UN SÓLIDO RÍGIDO ALREDEDOR DE UN EJE FIJO

Sea un sólido rígido en rotación alrededor de un eje fijo, que se supondrá coincidente con el eje OZ de un sistema de referencia inercial $OXYZ$, con una rotación instantánea $\vec{\omega}$ y estando solicitado por un conjunto de n fuerzas \vec{F}_i , aplicadas en los puntos \vec{r}_i . Se trata de obtener la ecuación del movimiento, así como las reacciones de O y O' .

Para ello se calcularán previamente el momento cinético áxico y la energía cinética de un sólido rígido en rotación alrededor de un eje fijo OZ .

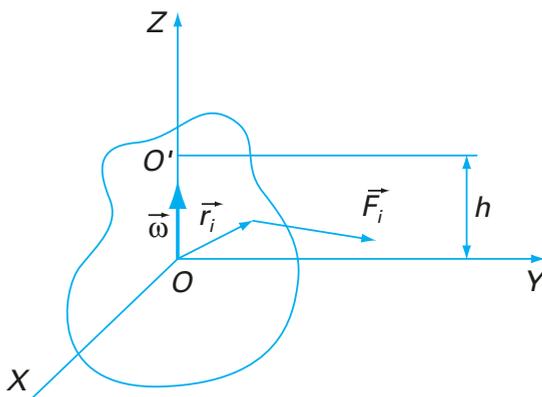


FIGURA 12.1

12.1.1. Momento cinético respecto al eje

El momento cinético de un sólido rígido, respecto a un eje δ definido por el vector unitario \vec{u} , viene dado por:

$$L_{\delta} = \int_D (\vec{r} \times \vec{v}) \cdot \vec{u} \, dm = \int_D (\vec{r}, \vec{v}, \vec{u}) \, dm$$

siendo D el dominio en el que está definido el sólido. Puesto que

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

se puede escribir

$$L_{\delta} = \int_D \{\vec{r}, (\vec{\omega} \times \vec{r}), \vec{u}\} \, dm$$

o sea

$$L_{\delta} = \omega \int_D \{\vec{r}, (\vec{u} \times \vec{r}), \vec{u}\} \, dm$$

Teniendo en cuenta que el producto mixto es circularmente conmutativo resulta:

$$L_{\delta} = \omega \int_D \{(\vec{u} \times \vec{r}), \vec{u}, \vec{r}\} \, dm = \omega \int_D \{(\vec{u} \times \vec{r}) \times \vec{u}\} \cdot \vec{r} \, dm$$

y desarrollando el doble producto vectorial:

$$L_{\delta} = \omega \int_D \{(\text{nor } \vec{u}) \vec{r}\} - (\vec{u} \cdot \vec{r}) \vec{u}\} \cdot \vec{r} \, dm$$

de donde

$$L_{\delta} = \omega \int_D \{(\text{nor } \vec{u} \text{ nor } \vec{r} - (\vec{u} \cdot \vec{r})^2)\} \, dm$$

Recordando la relación de Lagrange que da la norma de un producto vectorial y la definición del momento de inercia respecto a una recta, resulta finalmente:

$$L_{\delta} = \omega \int_D \text{nor } (\vec{u} \times \vec{r}) \, dm$$

o sea,

$$L_{\delta} = \omega I_{\delta}$$

[12.1]

12.1.2. Energía cinética

La energía cinética del sistema es:

$$E_c = \frac{1}{2} \int_D \text{nor } \vec{v} \, dm$$

y como

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

resulta

$$E_c = \frac{1}{2} \int_D \text{nor } (\vec{\omega} \times \vec{r}) \, dm$$

Desarrollando la norma del producto vectorial queda:

$$E_c = \frac{1}{2} \int_D [\text{nor } \vec{\omega} \text{ nor } \vec{r} - (\vec{\omega} \cdot \vec{r})^2] \, dm$$

y puesto que $\vec{\omega} = \omega \vec{u}$,

$$E_c = \frac{1}{2} \omega^2 \int_D [\text{nor } \vec{u} \text{ nor } \vec{r} - (\vec{u} \cdot \vec{r})^2] \, dm$$

o sea,

$$E_c = \frac{1}{2} \omega^2 \int_D \text{nor } \vec{r} \, dm - \frac{1}{2} \omega^2 \int_D (\vec{u} \cdot \vec{r})^2 \, dm$$

y de aquí

$$E_c = \frac{1}{2} \omega^2 (I_o - I_{xy})$$

Si tenemos en cuenta que $I_o = I_{xy} + I_\delta$ resulta finalmente:

$$E_c = \frac{1}{2} \omega^2 I_\delta$$

[12.2]

12.1.3. Ecuación del movimiento

El teorema del momento cinético permite escribir:

$$\frac{dL_{\delta}}{dt} = \vec{\Gamma} \cdot \vec{k}$$

siendo $\vec{\Gamma}$ el momento resultante de las fuerzas exteriores respecto a un punto del eje fijo $OO' = OZ$.

Por lo tanto,

$$\frac{dL_{\delta}}{dt} = \sum_{i=1}^n (\vec{r}_i \times \vec{F}_i) \cdot \vec{k}$$

Teniendo en cuenta la expresión [12.1] que da el momento cinético queda:

$$I_{\delta} \frac{d\omega}{dt} = \sum_{i=1}^n (\vec{r}_i, \vec{F}_i, \vec{k})$$

o lo que es lo mismo:

$$I_{\delta} \frac{d\omega}{dt} = \Gamma_z \quad [12.3]$$

Se observará que en esta expresión no aparecen las reacciones \vec{R} y \vec{R}' , en O y O' , ya que por cortar al eje OZ no producen momento.

Al mismo resultado puede llegarse a partir del teorema de la energía cinética. En efecto,

$$d\left(\frac{1}{2} I_{\delta} \omega^2\right) = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \cdot d\vec{r}_i$$

y puesto que

$$d\vec{r}_i = \vec{v}_i dt \quad \text{y} \quad \vec{v}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_i$$

queda

$$d\left(\frac{1}{2} I_{\delta} \omega^2\right) = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \cdot \vec{v}_i dt$$

o sea

$$d\left(\frac{1}{2}I_{\delta}\omega^2\right) = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}_i) dt$$

y como $\vec{\omega} = \omega \vec{k}$ resulta

$$d\left(\frac{1}{2}I_{\delta}\omega^2\right) = \omega \sum_{i=1}^n (\vec{F}_i, \vec{k}, \vec{r}_i) dt$$

de donde

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}I_{\delta}\omega^2\right) = \omega \sum_{i=1}^n (\vec{r}_i, \vec{F}_i, \vec{k})$$

y finalmente

$$I_{\delta} \frac{d\omega}{dt} = \sum_{i=1}^n (\vec{r}_i, \vec{F}_i, \vec{k})$$

o lo que es igual:

$$I_{\delta} \frac{d\omega}{dt} = \Gamma_z$$

que es la misma expresión [12.3] obtenida a partir del teorema del momento cinético.

En el caso en que no hubiese fuerzas exteriores o las que hubiera diesen un momento resultante áxico, respecto a δ , nulo, resultará $\omega = \text{cte}$.

12.1.4. Cálculo de las reacciones

Para calcular las reacciones supondremos que el eje δ (OZ) permanece fijo porque lo están dos de sus puntos O y O' . Sean \vec{R} y \vec{R}' las reacciones en O y O' , respectivamente. Se puede, por tanto, prescindir de las ligaduras y considerar el cuerpo rígido como libre bajo la acción del sistema de fuerzas aplicadas \vec{F}_i y de las reacciones \vec{R} y \vec{R}' .

Consideraremos otro sistema de ejes, $Oxyz$, móviles, ligados al sólido, de modo que lo acompañan siempre en su movimiento y tales que Oz coincide en todo instante con OZ .

Aplicando el teorema del momento cinético se puede escribir:

$$\left(\frac{d\vec{L}_O}{dt}\right)_{\text{inercial}} = \vec{\Gamma}_O + O\vec{O}' \times \vec{R}'$$

y en los ejes móviles:

$$\left(\frac{d\vec{L}_O}{dt}\right)_{\text{móvil}} + \vec{\omega} \times \vec{L}_O = \vec{\Gamma}_O + O\vec{O}' \times \vec{R}' \quad [12.4]$$

Ahora bien, si $\vec{\omega} = \omega\vec{k}$:

$$\vec{L}_O = \int_{\tau} \vec{r} \times \vec{v} dm = \int_{\tau} \vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) dm$$

ya que $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$, de donde:

$$\vec{L}_O = \int_{\tau} \vec{\omega} \text{ nor } \vec{r} dm - \int_{\tau} (\vec{r} \cdot \vec{\omega}) \vec{r} dm$$

y de aquí:

$$\vec{L}_O = \omega\vec{k} I_O - \omega \int_{\tau} (\vec{r} \cdot \vec{k}) \vec{r} dm$$

y multiplicando escalarmente por \vec{i} , \vec{j} y \vec{k} , respectivamente, resulta:

$$L_x = -\omega \int_{\tau} (\vec{r} \cdot \vec{k})(\vec{r} \cdot \vec{i}) dm = -\omega P_{xz}$$

$$L_y = -\omega \int_{\tau} (\vec{r} \cdot \vec{k})(\vec{r} \cdot \vec{j}) dm = -\omega P_{yz}$$

$$L_z = \omega I_O - \omega \int_{\tau} (\vec{r} \cdot \vec{k})^2 dm = \omega(I_O - I_{xy}) = \omega I_z$$

por lo que:

$$\vec{L}_O = -\omega P_{xz} \vec{i} - \omega P_{yz} \vec{j} + \omega I_z \vec{k}$$

y

$$\vec{\omega} \times \vec{L}_O = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ -\omega P_{xz} & -\omega P_{yz} & \omega I_z \end{vmatrix} = \omega^2 P_{yz} \vec{i} - \omega^2 P_{xz} \vec{j}$$

Con lo que el primer miembro de [12.4] queda:

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\vec{L}_O}{dt}\right)_{\text{móvil}} + \vec{\omega} \times \vec{L}_O &= -\left(\frac{d\omega}{dt} P_{xz} - \omega^2 P_{yz}\right)\vec{i} - \\ &- \left(\frac{d\omega}{dt} P_{yz} + \omega^2 P_{xz}\right)\vec{j} + \frac{d\omega}{dt} I_z \vec{k} \end{aligned} \quad [12.5]$$

Por otro lado:

$$\vec{OO}' \times \vec{R}' = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & h \\ R'_x & R'_y & R'_z \end{vmatrix} = -hR'_y \vec{i} + hR'_x \vec{j}$$

Con lo que el segundo miembro de [12.4] puede escribirse como:

$$\vec{\Gamma}_O + \vec{OO}' \times \vec{R}' = (\Gamma_x - hR'_y)\vec{i} + (\Gamma_y + hR'_x)\vec{j} + \Gamma_z \vec{k} \quad [12.6]$$

Teniendo en cuenta [12.5] y [12.6], la ecuación vectorial [12.4] equivale a las tres escalares:

$$\left. \begin{aligned} -\left(\frac{d\omega}{dt} P_{xz} - \omega^2 P_{yz}\right) &= \Gamma_x - hR'_y \\ -\left(\frac{d\omega}{dt} P_{yz} + \omega^2 P_{xz}\right) &= \Gamma_y + hR'_x \\ I_z \frac{d\omega}{dt} &= \Gamma_z \end{aligned} \right\} \quad [12.7]$$

La tercera de las [12.7] coincide con la ecuación movimiento ya obtenida. Una vez integrada, las dos primeras ecuaciones permiten calcular R'_x y R'_y .

Aplicando a continuación el teorema del centro de masas quedará:

$$M \vec{a}_G = \vec{F} + \vec{R} + \vec{R}' \quad [12.8]$$

Recordando la expresión del vector aceleración de un punto se tiene:

$$\vec{a}_G = \frac{d\vec{v}_O}{dt} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{OG} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{OG})$$

es decir:

$$\vec{a}_G = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{OG} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{OG})$$

Desarrollando ambos productos vectoriales, queda:

$$\frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{OG} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \frac{d\omega}{dt} \\ x_G & y_G & z_G \end{vmatrix} = -y_G \frac{d\omega}{dt} \vec{i} + x_G \frac{d\omega}{dt} \vec{j} \quad [12.9]$$

y por otro lado

$$\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{OG}) = (\vec{\omega} \cdot \vec{OG}) \vec{\omega} - \omega^2 \vec{OG}$$

queda

$$\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{OG}) = (\omega z_G) \vec{\omega} - \omega^2 \vec{OG}$$

o sea

$$\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{OG}) = -\omega^2 x_G \vec{i} - \omega^2 y_G \vec{j} \quad [12.10]$$

Teniendo en cuenta [12.9] y [12.10], se puede descomponer a continuación la ecuación vectorial [12.8] en las tres escalares:

$$\left. \begin{aligned} -M \left(\frac{d\omega}{dt} y_G + \omega^2 x_G \right) &= F_x + R_x + R'_x \\ M \left(\frac{d\omega}{dt} x_G - \omega^2 y_G \right) &= F_y + R_y + R'_y \\ 0 &= F_z + R_z + R'_z \end{aligned} \right\} \quad [12.11]$$

Las dos primeras ecuaciones permiten calcular R_x y R_y , una vez resueltas las [12.7]. La tercera permite conocer la suma $R_z + R'_z$, pero para determinar cada una de éstas por separado hay que acudir, en general, al análisis de la deformación del eje de rotación. Puede eliminarse la indeterminación, sin suprimir la condición de indeformabilidad, disponiendo los apoyos en O y O' de forma adecuada. Por ejemplo, situando un cojinete radial en O' (que solo absorbe esfuerzos radiales) y una quionera en O , destinada a absorber toda la componente F_z de las fuerzas exteriores, resultaría:

$$R'_z = 0 \quad [12.12]$$

En adelante se supondrá que el eje se ha fijado de acuerdo con esta disposición y que, por tanto, las reacciones \vec{R} y \vec{R}^1 y quedan determinadas mediante las ecuaciones:

$$\left. \begin{aligned} -\left(\frac{d\omega}{dt} P_{xz} - \omega^2 P_{yz}\right) &= \Gamma_x - hR_y^1 \\ -\left(\frac{d\omega}{dt} P_{yz} + \omega^2 P_{xz}\right) &= \Gamma_y + hR_x^1 \\ -M\left(\frac{d\omega}{dt} y_G + \omega^2 x_G\right) &= F_x + R_x + R_x^1 \\ M\left(\frac{d\omega}{dt} x_G - \omega^2 y_G\right) &= F_y + R_y + R_y^1 \\ 0 &= F_z + R_z + R_z^1 \\ 0 &= R_z^1 \end{aligned} \right\} \quad [12.13]$$

12.2. EJES PERMANENTES Y ESPONTÁNEOS DE ROTACIÓN

12.2.1. Ejes permanentes de rotación

Si el sistema de fuerzas activas aplicadas al sólido es tal que $\vec{\Gamma}_o = 0$. Es decir:

$$\Gamma_x = \Gamma_y = \Gamma_z = 0$$

de la ecuación del movimiento [12.3] se deduce:

$$\frac{d\omega}{dt} = 0, \quad \text{y} \quad \omega = \text{cte.}$$

Por otra parte de las dos primeras [12.13] se obtiene:

$$R_x^1 = -\frac{\omega^2 P_{xz}}{h} \quad \text{y} \quad R_y^1 = -\frac{\omega^2 P_{yz}}{h}$$

Si además, el eje de rotación δ (OZ) es una dirección principal de inercia en O , se verifica:

$$P_{xz} = P_{yz} = 0$$

En este caso $R'_x = R'_y = 0$ y el apoyo O' no transmite ninguna acción al sólido. Si se suprimiese el cojinete radial en O' , una vez que el cuerpo ha comenzado a girar con ω constante, permanecerá girando indefinidamente sin variar el eje de rotación.

Se puede decir, por tanto, que si un sólido rígido con un punto fijo está libre de pares exteriores y adquiere un movimiento de rotación alrededor de una de las direcciones principales de inercia relativas al punto fijo, permanecerá girando indefinidamente alrededor de ella. Es por esto por lo que las direcciones principales de inercia relativas al punto fijo reciben el nombre de *ejes permanentes* de rotación del sólido.

12.2.2. Ejes espontáneos de rotación

Si el sistema de fuerzas exteriores aplicadas al sólido rígido es equivalente a cero, es decir:

$$\begin{aligned}\vec{F} &= 0 \\ \vec{\Gamma}_O &= 0\end{aligned}$$

de la ecuación del movimiento [12.3] se obtiene:

$$\frac{d\omega}{dt} = 0, \quad \text{y} \quad \omega = \text{cte}$$

Por otro lado de las [12.13] se deduce:

$$\begin{aligned}R'_x &= -\frac{\omega^2 P_{xz}}{h} \\ R'_y &= -\frac{\omega^2 P_{yz}}{h} \\ R_x &= -M\omega^2 x_G - R'_x = \frac{\omega^2}{h} (P_{xz} - Mx_G h) \\ R_y &= -M\omega^2 y_G - R'_y = \frac{\omega^2}{h} (P_{yz} - My_G h)\end{aligned}$$

Si, además, el eje de rotación coincide con una de las direcciones principales de inercia relativas al punto O , y el centro de gravedad del sólido se encuentra sobre el eje de rotación, resultará:

$$\vec{R} = \vec{R}' = 0$$

En este caso, una vez que el sólido ha comenzado a girar con ω constante alrededor de OO' ninguno de los dos apoyos O y O' transmite acción alguna al sólido, por lo que podrían eliminarse ambos cojinetes sin que se alterase el movimiento.

Esto permite afirmar que si un sólido rígido libre adquiere un movimiento de rotación alrededor de una dirección principal de su elipsoide central de inercia, continuará girando indefinidamente alrededor de ella. Por este motivo las direcciones principales del elipsoide central de inercia reciben el nombre de *ejes espontáneos* de rotación.

12.3. PÉNDULO COMPUESTO

Recibe este nombre todo sólido rígido móvil alrededor de un eje fijo horizontal y sometido únicamente a la acción de la gravedad (fig. 12.2). Sin pérdida de generalidad podemos suponer que el plano OXY contiene al centro de gravedad (fig. 12.3).

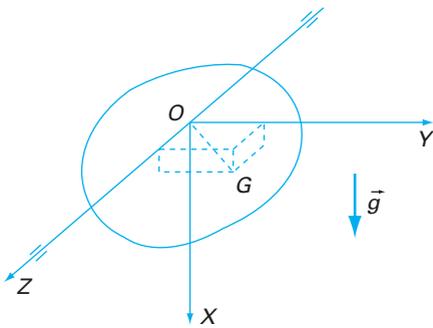


FIGURA 12.2

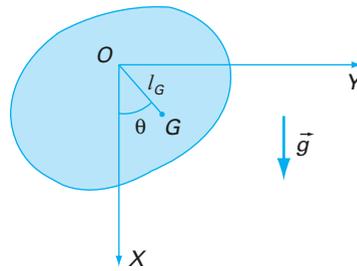


FIGURA 12.3

Aplicando el teorema del momento cinético respecto al eje OZ resulta:

$$I_z \ddot{\theta} = \Gamma_z \tag{12.14}$$

Como

$$\Gamma_z = \vec{\Gamma}_O \cdot \vec{k}$$

se puede escribir:

$$\Gamma_z = \vec{k} \cdot \int_{\tau} \vec{r} \times \vec{g} \, dm = \vec{k} \cdot \left[\left(\int_{\tau} \vec{r} \, dm \right) \times \vec{g} \right]$$

es decir:

$$\Gamma_z = \vec{k} \cdot (M \vec{r}_G \times \vec{g})$$

que desarrollada queda:

$$\Gamma_z = -Mgy_G$$

Sustituyendo en la ecuación [12.14] resulta:

$$I_z \ddot{\theta} = -Mgy_G = -Mgl_G \text{ sen } \theta$$

Como por otro lado, $I_z = Mk_z^2$, siendo k_z el radio de giro queda:

$$M k_z^2 \ddot{\theta} = -Mgl_G \text{ sen } \theta$$

o sea

$$\ddot{\theta} + \frac{gl_G}{k_z^2} \text{ sen } \theta = 0 \quad [12.15]$$

que es la ecuación diferencial del movimiento del péndulo compuesto.

12.3.1. Péndulo simple síncrono

Se llama así a un péndulo simple cuyo periodo de oscilación coincide con el del péndulo compuesto.

Recordemos que la ecuación diferencial del movimiento un péndulo simple era:

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \text{ sen } \theta = 0 \quad [12.16]$$

siendo l la longitud de dicho péndulo simple.

Comparando las ecuaciones [12.15] y [12.16] resulta que para que el péndulo simple sea síncrono se ha de verificar:

$$\frac{gl_G}{k_z^2} = \frac{g}{l}$$

o lo que es igual:

$$l_G l = k_z^2 \tag{12.17}$$

12.3.2. Teorema de Huygens

Si a partir del eje OZ , se traza una superficie cilíndrica CC' de radio igual a la longitud el péndulo simple síncrono, es decir, $OO' = l$, dicha superficie divide al péndulo en dos regiones: una formada por todos aquellos puntos del sólido tales que su distancia, r , al eje OZ es $r < l$ (puntos interiores a CC'), que oscilan más despacio que el péndulo simple síncrono (es decir, más lentamente que si estuviesen libres), y otra, formada por los puntos tales que $r > l$, que oscilan más deprisa que si estuviesen libres.

Los únicos puntos que oscilan como si estuviesen libres (péndulo simple síncrono) son los que se encuentran sobre la superficie cilíndrica $r = l$ (superficie CC').

Huygens llamó al eje OZ , *eje de suspensión*, y al eje $O'Z'$, paralelo a él y que pasa por O' , *eje de oscilación*. El plano que ambos ejes determinan contiene al centro de masas G del sólido.

El teorema de Huygens establece que los periodos de oscilación alrededor del eje OZ y alrededor del eje $O'Z'$ son iguales.

En efecto, aplicando el teorema de Steiner para ejes paralelos, resulta:

$$I_z = I_{zG} + Ml_G^2$$

siendo M la masa total del péndulo, que en función de los radios de giro puede escribirse como:

$$k_z^2 = k_{zG}^2 + l_G^2 \tag{12.18}$$

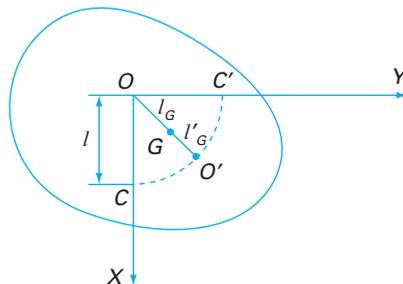


FIGURA 12.4

De la [12.17] resulta:

$$l_G l = k_z^2$$

y sustituyendo en [12.18] queda:

$$l_G l = k_{zG}^2 + l_G^2$$

o sea:

$$l = \frac{k_{zG}^2}{l_G} + l_G > l_G \quad [12.19]$$

y como además

$$l = l_G + l'_G$$

resulta al sustituir en el primer miembros de [12.19]:

$$\frac{k_{zG}^2}{l'_G} = l_G \quad [12.20]$$

Cuando oscila alrededor de OZ' la longitud del nuevo péndulo simple síncrono será l' y se verificará:

$$l'_G l' = k_z^2$$

Aplicando Steiner:

$$l'_G l' = k_{zG}^2 + (l'_G)^2$$

de donde resulta:

$$l' = \frac{k_{zG}^2}{l'_G} + l'_G$$

y como además de [12.20]:

$$\frac{k_{zG}^2}{l'_G} = l_G$$

queda:

$$l' = l_G + l'_G = l$$

Como ambas longitudes son iguales ambos periodos también lo son, con lo que queda demostrado el **teorema de Huygens** que puede enunciarse como sigue: «Si en un plano que pasa por el centro de masas del péndulo compuesto se tienen dos ejes paralelos y horizontales, a distancias desiguales del centro de masas, y para los cuales la longitud del péndulo simple síncrono es la misma, se verifica que dicha longitud es igual a la distancia que separa ambos ejes».

12.4. EQUILIBRADO ESTÁTICO Y DINÁMICO

Interesa examinar las condiciones que deben verificarse para que las reacciones de los apoyos sean las mismas que si el sólido estuviera en equilibrio.

Bastará para ello que en las ecuaciones [12.13] hagamos:

$$x_G = y_G = 0$$

es decir, que el centro de gravedad del cuerpo esté en el eje de rotación, lo cual se expresa diciendo que el cuerpo está *equilibrado estáticamente*.

Y, además, deberá verificarse en dichas ecuaciones [12.13] que:

$$P_{xz} = P_{yz} = 0$$

es decir, que el eje de rotación sea principal de inercia, lo cual se expresa diciendo que el sólido está *dinámicamente equilibrado*.

Vamos a estudiar a continuación la posibilidad de equilibrar estática y dinámicamente un sólido móvil alrededor de OZ , con dos masas m_1 y m_2 situadas en dos planos de cotas z_1 y z_2 conocidas.

Sean x_G, y_G, z_G las coordenadas del centro de masas,

P_{yz}, P_{xz}, P_{xy} , los productos de inercia,

x_1, y_1, z_1 , las coordenadas de m_1 , y

x_2, y_2, z_2 , las coordenadas de m_2 .

Para que el sistema esté estáticamente equilibrado debe verificarse la nulidad de los momentos estáticos:

$$\begin{aligned} Mx_G + m_1x_1 + m_2x_2 &= 0 \\ My_G + m_1y_1 + m_2y_2 &= 0 \end{aligned} \quad [12.21]$$

Y para que esté equilibrado dinámicamente expresamos la nulidad de los productos de inercia:

$$\begin{aligned} P_{yz} + m_1 y_1 z_1 + m_2 y_2 z_2 &= 0 \\ P_{xz} + m_1 x_1 z_1 + m_2 x_2 z_2 &= 0 \end{aligned} \quad [12.22]$$

Resolviendo los sistemas [12.21] y [12.22] se obtienen las coordenadas x_1, y_1, x_2 e y_2 (puesto que z_1 y z_2 eran los planos dados):

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{P_{xz} - M x_G z_2}{m_1 (z_2 - z_1)} & y_1 &= \frac{P_{yz} - M y_G z_2}{m_1 (z_2 - z_1)} \\ x_2 &= \frac{M x_G z_1 - P_{xz}}{m_2 (z_2 - z_1)} & y_2 &= \frac{M y_G z_1 - P_{yz}}{m_2 (z_2 - z_1)} \end{aligned}$$

Si el cuerpo estuviera estáticamente equilibrado, se verificaría:

$$x_G = y_G = 0$$

y las coordenadas $(x_1 y_1)$ y $(x_2 y_2)$ pasarían a ser:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{P_{xz}}{m_1 (z_2 - z_1)}; & y_1 &= \frac{P_{yz}}{m_1 (z_2 - z_1)} \\ x_2 &= \frac{-P_{xz}}{m_2 (z_2 - z_1)}; & y_2 &= \frac{-P_{yz}}{m_2 (z_2 - z_1)} \end{aligned}$$

que resuelven el problema propuesto.

EJERCICIOS

- 12.1** Un disco circular de radio R , masa M y espesor despreciable gira con velocidad angular ω constante alrededor de un eje vertical con el que forma un ángulo α . Los extremos del eje se encuentran a una distancia d del centro del disco. Determinar las reacciones en los apoyos situados en los extremos del eje.
- 12.2** Se tiene una varilla AB de longitud L y masa M . Dicha varilla se mueve con una rotación uniforme, de módulo ω , alrededor de un eje OZ , paralelo a AB y situado a una distancia R de la varilla, de manera que en todo instante OA y OZ son perpendiculares. Calcular:
- Momento cinético de la varilla respecto a su centro de masa G .
 - Momento cinético de la varilla respecto al punto O .
- 12.3** En un plano vertical se encuentra situado un alambre que tiene la forma de una semicircunferencia, de masa M y radio R , y que gira con velocidad angular ω alrededor de su diámetro OO' . Se tomará como origen de coordenadas de un sistema de referencia $OXYZ$ el extremo O del diámetro, estando situado el otro extremo O' sobre el eje OZ . Se supondrá que el plano vertical es el OYZ . El centro de masas del alambre se encuentra en el punto de coordenadas $(0, 2R/\pi, R)$ y la reacción en el apoyo O' no tiene componente según OZ . Calcular:
- Productos de inercia del alambre respecto a dichos ejes.
 - Reacciones en los apoyos O y O' .
- 12.4** Una esfera rígida, homogénea, maciza, de radio R , puede girar alrededor de uno de sus ejes de simetría AB . Sobre el meridiano cuyo diámetro coincide con AB , se encuentra situado el origen de una fuerza de módulo constante f y cuya dirección es perpendicular al plano que contiene a dicho círculo máximo. El punto origen de dicha fuerza se desplaza sobre el meridiano con movimiento circular uniforme de velocidad angular Ω . Suponiendo que en el instante inicial la esfera está en reposo y el origen de la fuerza se encuentra en el punto A , calcular:
- Momento ejercido por la fuerza respecto al eje AB .
 - Velocidad angular de la esfera al cabo de un tiempo t .

12.5 Una varilla AB , de longitud $2L$ y masa M , gira en un plano vertical alrededor de un apoyo situado en su extremo A . Calcular:

- 1.º La aceleración angular de la varilla, cuando está en posición horizontal, para que no exista reacción vertical en el extremo A .
- 2.º El momento que hay que aplicar a la varilla para que adquiera dicha aceleración.

SOLUCIONES DE LOS EJERCICIOS

12.1

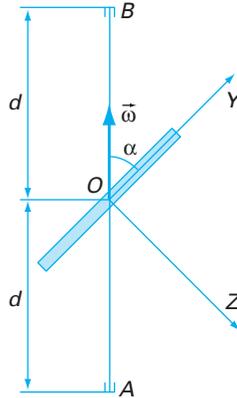


FIGURA 12.5

Por estar el centro de masas del disco sobre el eje, su velocidad es nula y por tanto la cantidad de movimiento del disco es nula.

Para calcular el momento cinético respecto a O se elige el sistema de ejes principales $Oxyz$. Resulta

$$\begin{aligned} \omega_x &= 0 \\ \omega_y &= \omega \cos \alpha \\ \omega_z &= -\omega \operatorname{sen} \alpha \\ I_x &= I_y = \frac{1}{4} MR^2 \\ I_z &= \frac{1}{2} MR^2 \end{aligned}$$

El momento cinético vale

$$\begin{aligned} \vec{L}_O &= M \frac{R^2}{4} \omega \cos \alpha \vec{j} - M \frac{R^2}{2} \omega \operatorname{sen} \alpha \vec{k} \\ \vec{\Gamma}_O &= \left(\frac{d\vec{L}_O}{dt} \right)_{\text{móvil}} + \vec{\omega} \times \vec{L}_O = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & \omega \cos \alpha & -\omega \operatorname{sen} \alpha \\ 0 & M \frac{R^2}{4} \omega \cos \alpha & -M \frac{R^2}{2} \omega \operatorname{sen} \alpha \end{vmatrix} = \\ &= -\vec{i} M \frac{R^2}{4} \omega^2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha \end{aligned}$$