

Índice

	<u>Pág.</u>
INTRODUCCIÓN	9

UNIDAD DIDÁCTICA 1

Espacios Métricos

CAPÍTULO 1. ESPACIOS MÉTRICOS	13
1. Espacios métricos	17
2. Adherencia y acumulación de un conjunto	23
3. Conjuntos compactos. Propiedades	27
4. Espacios completos	31
CAPÍTULO 2. CONTINUIDAD	35
1. Aplicaciones continuas	39
2. Continuidad uniforme	47
3. Aplicaciones contractivas. Teorema del punto fijo	51
4. Conjuntos conexos	55
CAPÍTULO 3. ESPACIOS NORMADOS	59
1. Espacios normados	63
2. Aplicaciones lineales continuas	67
3. Espacios con producto interior. Espacios de Hilbert	75
4. Espacios de dimensión finita	79

UNIDAD DIDÁCTICA 2**Cálculo Diferencial**

CAPÍTULO 4. FUNCIONES DIFERENCIABLES	85
1. Funciones diferenciables. Propiedades	89
2. Condiciones de diferenciabilidad. Aplicaciones	97
3. Derivadas de orden superior	105
4. Teorema de Taylor	109
5. Extremos relativos	115
CAPÍTULO 5. TEOREMAS DE LA FUNCIÓN INVERSA Y DE LA FUNCIÓN IMPLÍCITA	121
1. El Teorema de la función inversa	123
2. Cambios de variable	127
3. El teorema de la función implícita	131
4. Variedades diferenciables	137
CAPÍTULO 6. DEPENDENCIA FUNCIONAL	143
1. El Teorema del rango constante	147
2. Dependencia funcional	151
3. Dependencia lineal	155
4. Extremos condicionados	161

UNIDAD DIDÁCTICA 3**Geometría Diferencial**

CAPÍTULO 7. EL CONCEPTO DE CURVA. PROPIEDADES	173
1. Curvas simples	177
2. Curvas generales	181
3. Curvas regulares	185
4. Curvas rectificables. Longitud de un arco	189
5. Orientación. El producto vectorial en $\mathbb{R}^3$	193
CAPÍTULO 8. ESTUDIO LOCAL DE UNA CURVA	197
1. Recta tangente y plano normal	201
2. Curvatura. Normal principal. Plano osculador	205

	<u>Pág.</u>
3. El triedro móvil. Torsión	211
4. Fórmulas de Frenet. Ecuaciones intrínsecas	215
CAPÍTULO 9. EL CONCEPTO DE SUPERFICIE	221
1. Superficies elementales, simples y generales	225
2. Superficies regulares	231
3. Plano tangente a una superficie en un punto	235
4. El concepto de contacto	239
5. Clasificación de los puntos de una superficie	247
CAPÍTULO 10. FORMAS FUNDAMENTALES	251
1. Primera forma fundamental	255
2. Segunda forma fundamental	259
3. Curvaturas normal, de Gauss y geodésica	263
4. Líneas de curvatura	273
CAPÍTULO 11. PROPIEDADES GLOBALES. ENVOLVENTES	277
1. Envolvente de una familia de curvas	279
2. Evoluta y evolvente	283
3. Superficies regladas	287
4. Superficies de revolución y de traslación	289
5. Envolvente de una familia de superficies	291
APÉNDICE 1. Caracterización de los conjuntos compactos	293
APÉNDICE 2. Complección de un espacio métrico	297
APÉNDICE 3. El teorema de la función inversa	301
APÉNDICE 4. Variedades en forma paramétrica	307
APÉNDICE 5. El teorema de rango constante	311
BIBLIOGRAFÍA RECOMENDADA	315
ÍNDICE TERMINOLÓGICO	317

CAPÍTULO 2

Continuidad

1. Aplicaciones continuas.
2. Continuidad uniforme.
3. Aplicaciones contractivas. Teorema del punto fijo.
4. Conjuntos conexos.

PRERREQUISITOS

- Topología de un espacio métrico: conjuntos abiertos, conjuntos cerrados, conjuntos acotados, ...
- Sucesiones en un espacio métrico. Espacio producto.
- Funciones reales de una y varias variables reales: definición de límite en un punto, propiedades de los límites, funciones continuas, propiedades de las funciones continuas.
- Sucesiones de Cauchy en $\mathbb{R}$. Propiedades. Criterio de convergencia de Cauchy en $\mathbb{R}$.
- Conjuntos compactos.
- Conjuntos completos.

ESQUEMA/RESUMEN

- Límite de una aplicación: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que si

$$d(x, a) < \delta \Rightarrow d(f(x), b) < \varepsilon$$

- Límite a través de subconjuntos: si $f: A \rightarrow F$ y $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ entonces, para cualquier subconjunto B de A , tal que a sea un punto de acumulación de B se tiene:

$$\lim_{x \rightarrow a, x \in B} f(x) = b$$

- Caracterización del límite por sucesiones: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \Leftrightarrow$ para toda sucesión (x_n) de puntos del dominio, $x_n \neq a$, $(x_n) \rightarrow a$, se tiene $(f(x_n)) \rightarrow b$.
- Aplicaciones continuas: f continua en a si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.
- Continuidad global: f continua en A si lo es en cada punto a de A .
- Continuidad uniforme: f de A en F es uniformemente continua en $A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x, y \in A ; d(x, y) < \delta \Rightarrow d'(f(x), f(y)) < \varepsilon$
- Conservación por funciones uniformemente continuas: $(x_n) \subset E$ sucesión de Cauchy, $f: E \rightarrow F$ uniformemente continua $\Rightarrow f(x_n)$ sucesión de Cauchy.
- Funciones continuas definidas en conjuntos compactos:
 1. K compacto, f continua $\Rightarrow f(K)$ compacto.
 2. K compacto, $f: K \rightarrow \mathbb{R}$ continua $\Rightarrow f$ alcanza al menos en un punto de K su máximo absoluto y al menos en un punto su mínimo absoluto.
 3. K compacto, f continua $\Rightarrow f$ uniformemente continua en K . (Teorema de la continuidad uniforme.)
- Aplicación lipschitziana: $\exists k > 0$:

$$d'(f(x), f(y)) < kd(x, y), \quad \forall x, y \in E$$

- Aplicación contractiva: aplicación lipschitziana tal que $0 < k < 1$.
- Teorema del punto fijo: E complejo, $f: E \rightarrow E$ contractiva $\exists a \in E: f(a) = a$.
- Conjunto conexo: no existe una partición del conjunto formada por dos subconjuntos abiertos (o cerrados).
- Caracterización de los conjuntos conexos: M es conexo si y sólo si toda función real continua en M que sólo toma los valores 0 y 1 es constante.
- Funciones continuas sobre conjuntos conexos: la imagen por una función continua de un conjunto conexo es un conjunto conexo.

-
- Conjunto conexo por arcos: dados dos puntos cualesquiera del conjunto existe un arco contenido en él que los une.
 - Conexo por arcos $\Rightarrow$ conexo.
 - Funciones continuas sobre conjuntos conexos por arcos: la imagen por una función continua de un conjunto conexo por arcos es un conjunto conexo por arcos.

1. Aplicaciones continuas

Los conceptos de límite y continuidad de funciones reales de una o varias variables reales se establecen en el marco general de los espacios métricos sin ninguna modificación.

Sea f una aplicación definida en un subconjunto A de un espacio métrico (E, d) con valores en otro espacio métrico (F, d') . La idea intuitiva del concepto de límite de f en un punto a de A es la aproximación de la imagen $f(x)$ a un punto fijo b de F a medida que $x \in A - \{a\}$ se aproxima al punto a . La aproximación se mide con las distancias $d(x, a)$ y $d'(f(x), b)$ y por lo tanto con los entornos (o las bolas) de los puntos a y b en los espacios E y F . Si el punto a es un punto aislado de A y su imagen $f(a)$ es b , entonces convenimos en que el límite de $f(x)$ es b . Por consiguiente, en lo sucesivo supondremos siempre que el punto a posee otros puntos del espacio E tan cercanos a él como se quiera, en otras palabras, supondremos que a es un punto de acumulación de A . En la figura 2.1 se muestran algunas situaciones posibles.

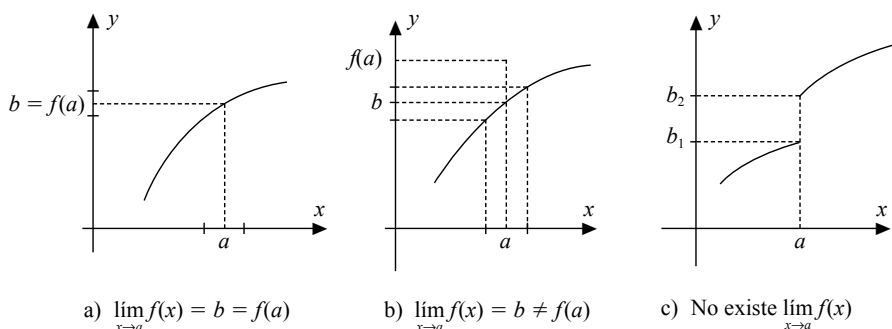


Figura 2.1. Límites de funciones

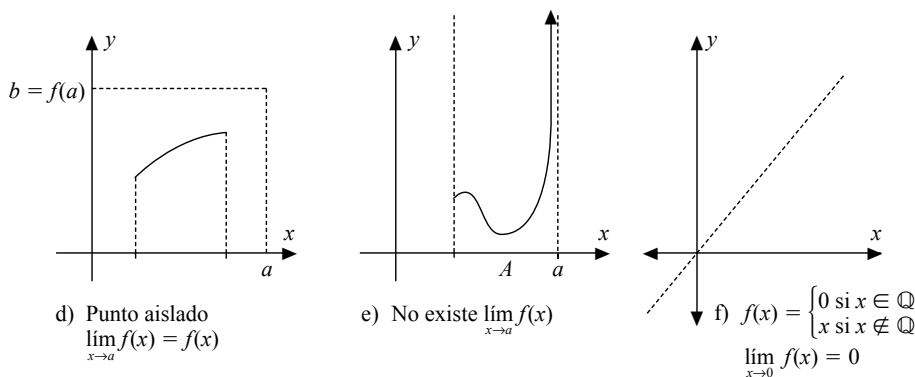


Figura 2.1 (continuación). Límites de funciones

2.1. Definición de límite

Sea $f: A \rightarrow F$, $a \in A'$. Se dice que el límite de $f(x)$ cuando x tiende hacia a es $b \in F$, y se escribe $\lim_{x \in A, x \rightarrow a} f(x) = b$, si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para todo $x \in A - \{a\}$ que cumpla $d(a, x) < \delta$ se tiene $d(b, f(x)) < \varepsilon$.

La definición anterior se puede formular también en término de bolas o de entornos de la siguiente manera:

1. $\lim_{x \in A, x \rightarrow a} f(x) = b$ si para toda $B(b, \varepsilon)$ existe $B(a, \delta)$, tal que para todo $x \in B(a, \delta) \cap (A - \{a\})$ se tiene $f(x) \in B(b, \varepsilon)$.

2. $\lim_{x \in A, x \rightarrow a} f(x) = b$ si para todo entorno V de b existe un entorno U de a , tal que para todo $x \in U \cap (A - \{a\})$ se tiene $f(x) \in V$.

En caso de no existir confusión con el dominio de f , notaremos el límite anterior por $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$.

Análogamente a lo que sucedía con las aplicaciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, se prueba que el límite de f , si existe, es único. Por otra parte, si f toma valores en un espacio métrico producto $F_1 \times F_2 \times \dots \times F_m$, determina unívocamente m aplicaciones $f_i: A \rightarrow F_i$, que se denominan **componentes** de f , definidas por $f_i = \pi_i \circ f$, en donde π_i es la proyección i -ésima del espacio producto. Recuérdese que la proyección j -ésima de una n -pla $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ es su coordenada x_j . Una demostración semejante a la efectuada en la Proposición 1.10 prueba que la condición necesaria y suficiente para que $\lim_{x \in A, x \rightarrow a} f(x) = b$ es que $\lim_{x \in A, x \rightarrow a} f_i(x) = b_i$ para cada $i = 1, 2, \dots, m$, en donde $b = (b_1, b_2, \dots, b_m)$.

Consideremos un subconjunto B de A tal que el punto a pertenece también a la acumulación de B . Si el límite de $f(x)$ cuando x tiene hacia a es b , el lími-

te de la restricción de f a B ha de ser necesariamente b . Esta sencilla propiedad, cuya demostración es evidente, nos permite en algunos casos probar la no existencia del límite de f determinando dos subconjuntos en los que la restricción de f da límites diferentes.

2.2. Ejemplos

a) La función de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \text{ si } (x, y) \neq (0, 0); f(0, 0) = 0$$

no tiene límite cuando (x, y) tiende a $(0, 0)$, ya que son diferentes los límites de la restricción de f a cada recta L_λ , de ecuación $y = \lambda x$. En efecto:

$$\lim_{\substack{(x, y) \rightarrow (0, 0) \\ (x, y) \in L_\lambda}} f(x, y) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} f(x, \lambda x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} \frac{x^2(1 - \lambda^2)}{x^2(1 + \lambda^2)} = \frac{1 - \lambda^2}{1 + \lambda^2}$$

b) La función de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y) = \frac{y^2 + 2x^4 \cos y^2}{y^2 x^4 + y^2} \text{ si } (x, y) \neq (0, 0); f(0, 0) = 0$$

no tiene límite cuando (x, y) tiende a $(0, 0)$, ya que son diferentes los límites de la restricción de f a cada parábola C_λ , de ecuación $y = \lambda x^2$, $\lambda \neq 0$

$$\lim_{\substack{(x, y) \rightarrow (0, 0) \\ (x, y) \in C_\lambda}} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x, \lambda x^2) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4(\lambda^2 + 2 \cos \lambda^2 x^4)}{x^4(\lambda^2 x^4 + \lambda^2)} = 1 + \frac{2}{\lambda^2}$$

Las sucesiones convergentes hacia a constituyen un importante caso particular de subconjuntos de A . El teorema siguiente caracteriza el límite de f por medio de estas sucesiones.

2.3. Teorema de caracterización del límite por sucesiones

Sea $a \in A'$ y $f: A \rightarrow F$. Una condición necesaria y suficiente para que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ es que para toda sucesión (x_n) de puntos de A , $x_n \neq a$, tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ se tenga $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = b$.

Demostración. La condición es necesaria. Sea (x_n) una sucesión de $A - \{a\}$ convergente hacia a , probemos que $(f(x_n))$ converge hacia b . Consideremos un entorno arbitrario V de b . Como por hipótesis $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$, existe un entorno

U de a tal que si $x \in U \cap (A - \{a\})$ se tiene $f(x) \in V$. Por otro lado como $(x_n) \rightarrow a$, dado U existe $n_0 \in \mathbb{N}$ de modo que si $n > n_0$ se tiene $x_n \in U$. Entonces $f(x_n) \in V$ para todo $n > n_0$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = b$.

La condición es suficiente. Demostremoslo por reducción al absurdo. Supongamos que no existe $\lim_{x \rightarrow a, x \in A} f(x)$ o bien que existe pero es distinto de b .

En cualquiera de los dos casos, existe un entorno V de b de modo que todo entorno U de a posee un elemento $x \in U \cap (A - \{a\})$ tal que $f(x) \notin V$. Si en particular consideramos las bolas de centro a y radio $1/n$, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $x_n \in B(a, 1/n) \cap (A - \{a\})$ y $f(x_n) \notin V$. Encontramos así una sucesión (x_n) contenida en $A - \{a\}$, convergente hacia a , cuya sucesión imagen $(f(x_n))$ no converge hacia b . ■

2.4. Ejemplo

La función $f(t) = \sin \frac{1}{t} + \cos \frac{1}{t}$, $t \neq 0$ no posee límites en $t = 0$, ya que los límites de $f(t_n)$ y $f(t'_n)$, en donde

$$t_n = \frac{1}{2n\pi} \quad ; \quad t'_n = \frac{1}{2n\pi + (\pi/4)}$$

son 1 y $\sqrt{2}$ respectivamente.

Si a es un punto del dominio A de f , está definida su imagen $f(a)$. En caso de que exista $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ y coincida con $f(a)$, decimos que f es continua en a (Figura 2.1.a)). Sin embargo, puede existir $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ y no coincidir con $f(a)$.

La aplicación f no es continua en a (Figura 2.1.b)). También puede ocurrir que la función no sea continua por no existir $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ (Figura 2.1.c)). La continuidad es una propiedad local, es decir, una propiedad de f en cada punto. La función $f(x) = 0$ si $x \in \mathbb{Q}$, $f(x) = x$ si $x \notin \mathbb{Q}$ (Figura 2.1.f)), es continua únicamente en $x = 0$. Finalmente, en los puntos aislados del dominio de definición, de acuerdo con el convenio $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$, suponemos que f es continua (Figura 2.1.d)).

2.5. Definición de aplicación continua

Una aplicación f de A en F es continua en $a \in A$ si existe $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ y es igual a $f(a)$.

Los diferentes enunciados de límite se trasladan al caso $a \in A$ y $b = f(a)$, obteniéndose las versiones correspondientes de continuidad. Una formulación

muy útil es la siguiente: «*f es continua en a si la imagen inversa $f^{-1}(V)$ de cualquier entorno V de $f(a)$ es un entorno de a*».

La restricción de una función continua a un subconjunto de su dominio es evidentemente continua. Sin embargo, puede no ser f continua y sí serlo su restricción a un subconjunto. Por ejemplo, la aplicación de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = x^2/y$ si $y \neq 0$, $f(x, 0) = 0$, no es continua en $(0, 0)$ pero sí lo es su restricción a cualquier recta que pase por el punto.

Como consecuencia inmediata de las propiedades del límite se obtienen las propiedades análogas de la continuidad. Así, en el caso de que f tome valores en un espacio producto $F_1 \times F_2 \times \dots \times F_n$: «*una condición necesaria y suficiente para que f sea continua en un punto a de su dominio es que cada función componente f_i sea continua en a* ». El teorema de caracterización por sucesiones se enuncia de la siguiente manera: «*una condición necesaria y suficiente para que f sea continua en $a \in A$ es que para toda sucesión (x_n) de A que converja hacia a , la sucesión $(f(x_n))$ converja hacia $f(a)$* ».

2.6. Teorema de composición de funciones continuas

Sean E, F y G espacios métricos, $A \subset E$ y $B \subset F$. Si $f: A \rightarrow B$ es continua en $a \in A$ y $g: B \rightarrow G$ es continua en $b = f(a)$, entonces la aplicación compuesta $h = g \circ f$ es continua en a .

Demostración. Sea V un entorno de $h(a) = g(f(a)) = g(b)$. Por ser g continua en b existe un entorno W de b tal que si $y \in W \cap B$ se tiene $g(y) \in V$. Por otro lado, como f es continua en a , dado el entorno W de b existe un entorno U de a tal que si $x \in U \cap A$ se tiene $f(x) \in W$. Como consecuencia, para todo $x \in U \cap A$ se cumple $h(x) = g(f(x)) \in V$. ■

Una aplicación se dice que es **continua en un conjunto** si lo es en cada uno de sus puntos. Por lo tanto, f es continua en su dominio si su imagen inversa transforma los abiertos de la topología del segundo espacio en abiertos del dominio de f .

2.7. Teorema de continuidad global

Sea f una aplicación de E en F . Una condición necesaria y suficiente para que f sea continua en E es que la imagen inversa de cualquier abierto (cerrado) de F sea un abierto (cerrado) de E .

Demostración. La condición es necesaria. Sea G un abierto de F . Podemos suponer que $f^{-1}(G) \neq \emptyset$ ya que en caso contrario el resultado es obvio. Para cada $x \in f^{-1}(G)$ el abierto G es un entorno de $f(x)$, y por ser f continua en x existe V_x entorno abierto de x tal que $f(V_x) \subset G$. El conjunto $V = \bigcup \{V_x: x \in f^{-1}(G)\}$ es abierto por ser unión de abiertos e igual a $f^{-1}(G)$, luego $f^{-1}(G)$ es abierto.

La condición es suficiente. Sea x un punto arbitrario de E . Dado un entorno cualquiera W de $f(x)$, que podemos considerar abierto, por hipótesis, su imagen inversa $f^{-1}(W) = V$ es un conjunto abierto de E que contiene a x , y por lo tanto un entorno de x . Evidentemente $f(V) \subset W$, y f es continua en x . ■

En general una función continua no transforma conjuntos abiertos en conjuntos abiertos, ni conjuntos cerrados en conjuntos cerrados. Por ejemplo, $f(x) = x^2$ transforma el intervalo abierto $(-1, 1)$ en el intervalo $[0, 1)$ que no es abierto ni cerrado. La función $g(x) = 1/x$, definida en el intervalo $[1, \infty)$, transforma el cerrado $[1, \infty)$ en el intervalo $(0, 1]$ que no es abierto ni cerrado. Otra caracterización de la continuidad global de una función es la siguiente:

2.8. Teorema de caracterización de la continuidad

Una aplicación f de E en F es continua en E si y sólo si para cualquier subconjunto M de E se tiene $f(\overline{M}) \subset \overline{f(M)}$.

Demostración. Supongamos que f es continua en E . Sea $a \in \overline{M}$. Existe una sucesión (x_n) de M tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$. Por la continuidad de f , la sucesión $(f(x_n))$ converge a $f(a)$ y como consecuencia $f(a) \in \overline{f(M)}$.

Recíprocamente, supongamos que la imagen de la adherencia de un conjunto está contenida en la adherencia de la imagen y probemos que la imagen inversa $f^{-1}(H)$ de un cerrado H de F es un cerrado de E . En efecto, aplicando la hipótesis

$$f(\overline{f^{-1}(H)}) \subset \overline{f(f^{-1}(H))} \subset H$$

con lo que $\overline{f^{-1}(H)} \subset f^{-1}(H)$ y $f^{-1}(H)$ es cerrado por contener a su adherencia. ■

2.9. Ejemplos

a) La función de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y) = \frac{x^3}{x^2 + y^2} \quad \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \quad f(0, 0) = 0$$

es continua en todo $\mathbb{R}^2$. En efecto, para cada $(a, b) \neq (0, 0)$ la función es continua por ser cociente de dos funciones continuas y no anularse el denominador. Para $(a, b) = (0, 0)$, se tiene

$$0 \leq \left| \frac{x^3}{x^2 + y^2} \right| \leq |x|$$

luego

$$0 \leq \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \left| \frac{x^3}{x^2 + y^2} \right| \leq \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} |x| = 0$$

por lo tanto

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$$

Véanse los Ejercicios de autocomprobación.

b) Aplicando el teorema de caracterización de la continuidad, comprobamos que la función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \\ x & \text{si } x \in \mathbb{Q} \end{cases}$$

no es continua en $\mathbb{R}$. En efecto, sea $M = \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ el conjunto de los números irracionales, se tiene

$$\begin{aligned} f(\overline{M}) &= f(\mathbb{R}) = \mathbb{Q} \\ f(M) &= \{0\} \end{aligned} \Rightarrow f(\overline{M}) = \mathbb{Q} \not\subset \overline{f(M)} = \{0\}$$

Nótese que f sólo es continua en $x = 0$.

2.10. Definición de homeomorfismo

Una aplicación f entre dos espacios métricos E y F se dice que es un homeomorfismo si f es biyectiva y tanto f como f^{-1} son continuas. Dos espacios métricos se llaman homeomorfos si existe un homeomorfismo entre ellos.

Los homeomorfismos también se denominan **aplicaciones bicontinuas**. Entre las topologías de dos espacios homeomorfos existe una correspondencia biunívoca: cada conjunto abierto del primer espacio se identifica con un único conjunto abierto del segundo espacio. Como consecuencia las propiedades topológicas de ambos espacios son las mismas. En la clase de espacios topológicos, y en particular en la de espacios métricos, la relación « E es homeomorfo a F » es una relación de equivalencia y los espacios pertenecientes a cada elemento de la partición que define se comportan topológicamente igual. Un ejemplo de homeomorfismo es la identidad entre (E, d_1) y (E, d_2) si d_1 y d_2 son distancias equivalentes.

Una aplicación f entre dos espacios métricos E y F se dice que es un **homeomorfismo local** si para cada punto x de E existe un entorno V de modo que la restricción de f a V es un homeomorfismo entre V y $f(V)$. Más adelante utilizaremos este concepto en la definición de curva general.

2.11. Ejemplos

a) Cualquier aplicación continua estrictamente creciente o estrictamente decreciente es un homeomorfismo de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$.

b) $f(x) = \tan x$ es un homeomorfismo del intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$ en $\mathbb{R}$.

c) La aplicación continua $f(t) = (t^2 - t, t^3 - t)$ de $\mathbb{R}$ en el subespacio de $\mathbb{R}^2$ determinado por su imagen

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x = t^2 - t, y = t^3 - t, t \in (-\infty, \infty)\}$$

no es un homeomorfismo ya que no es inyectiva pues $f(1) = f(0)$.

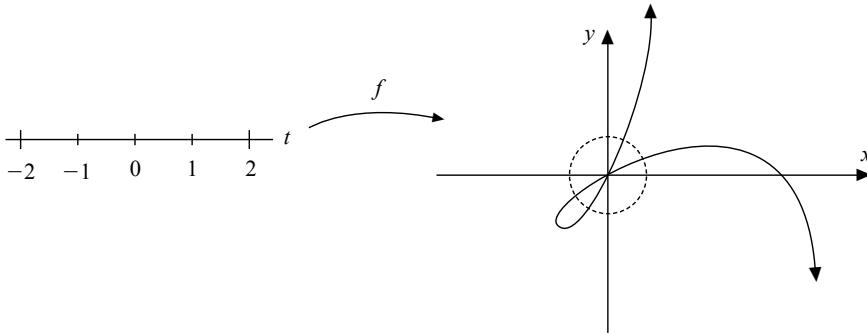


Figura 2.3. Aplicación $x = t^2 - t, y = t^3 - t$.

Sin embargo f es un homeomorfismo local. La imagen de un entorno V de $t = 0$, por ejemplo $V = (-1/4, 1/4)$ es un arco de curva que pasa una sola vez por el punto $(0, 0)$. Es claro que

$$f: V = (-1/4, 1/4) \rightarrow f(V)$$

es un homeomorfismo. Análogamente para $t = 1$, podemos considerar el entorno $W = (1/2, 3/2)$ y f es un homeomorfismo entre W y $f(W)$. Figura 2.4.

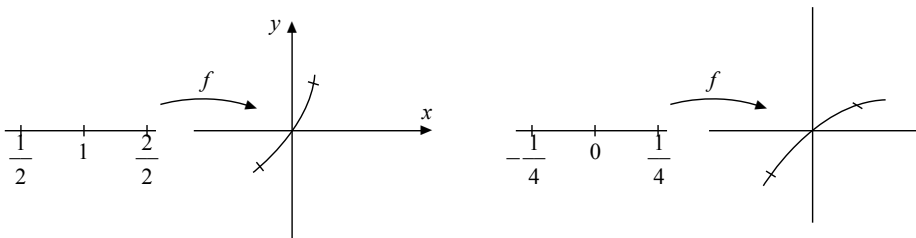


Figura 2.4. Imágenes de f en un entorno de $t = 0$ y en un entorno de $t = 1$.