

# Índice

	<u>Pág.</u>
<b>UNIDAD DIDÁCTICA 1</b>	
<b>Espacios métricos</b>	
<b>CAPÍTULO 1. ESPACIOS MÉTRICOS</b>	
1. Enunciados .....	11
2. Soluciones a los ejercicios .....	17
<b>CAPÍTULO 2. CONTINUIDAD</b>	
1. Enunciados .....	29
2. Soluciones a los ejercicios .....	35
<b>CAPÍTULO 3. ESPACIOS NORMADOS</b>	
1. Enunciados .....	51
2. Soluciones a los ejercicios .....	55
<b>UNIDAD DIDÁCTICA 2</b>	
<b>Cálculo diferencial</b>	
<b>CAPÍTULO 4. FUNCIONES DIFERENCIABLES</b>	
1. Enunciados .....	65
2. Soluciones a los ejercicios .....	69

	<u>Pág.</u>
<b>CAPÍTULO 5. FUNCIÓN INVERSA Y FUNCIÓN IMPLÍCITA</b>	
1. Enunciados .....	81
2. Soluciones a los ejercicios .....	85
<b>CAPÍTULO 6. DEPENDENCIA FUNCIONAL</b>	
1. Enunciados .....	99
2. Soluciones a los ejercicios .....	103
<b>UNIDAD DIDÁCTICA 3</b>	
<b>Geometría diferencial</b>	
<b>CAPÍTULO 7. EL CONCEPTO DE CURVA</b>	
1. Enunciados .....	119
2. Soluciones a los ejercicios .....	123
<b>CAPÍTULO 8. ESTUDIO LOCAL DE UNA CURVA</b>	
1. Enunciados .....	137
2. Soluciones a los ejercicios .....	141
<b>CAPÍTULO 9. EL CONCEPTO DE SUPERFICIE</b>	
1. Enunciados .....	153
2. Soluciones a los ejercicios .....	157
<b>CAPÍTULO 10. FORMAS FUNDAMENTALES</b>	
1. Enunciados .....	175
2. Soluciones a los ejercicios .....	179
<b>CAPÍTULO 11. PROPIEDADES GLOBALES. ENVOLVENTES</b>	
1. Enunciados .....	201
2. Soluciones a los ejercicios .....	205

**UNIDAD DIDÁCTICA 4****Cálculo integral****CAPÍTULO 12. LA INTEGRAL MÚLTIPLE DE RIEMANN**

- |                                      |     |
|--------------------------------------|-----|
| 1. Enunciados .....                  | 217 |
| 2. Soluciones a los ejercicios ..... | 221 |

**CAPÍTULO 13. INTEGRACIÓN SOBRE CONJUNTOS ACOTADOS**

- |                                      |     |
|--------------------------------------|-----|
| 1. Enunciados .....                  | 233 |
| 2. Soluciones a los ejercicios ..... | 237 |

**CAPÍTULO 14. CAMBIO DE VARIABLE Y APLICACIONES DE LA INTEGRAL**

- |                                      |     |
|--------------------------------------|-----|
| 1. Enunciados .....                  | 251 |
| 2. Soluciones a los ejercicios ..... | 255 |

**CAPÍTULO 15. INTEGRAL CURVILÍNEA**

- |                                      |     |
|--------------------------------------|-----|
| 1. Enunciados .....                  | 271 |
| 2. Soluciones a los ejercicios ..... | 275 |

**CAPÍTULO 16. LA INTEGRAL DE SUPERFICIE**

- |                                      |     |
|--------------------------------------|-----|
| 1. Enunciados .....                  | 289 |
| 2. Soluciones a los ejercicios ..... | 293 |

**UNIDAD DIDÁCTICA 5****Funciones de variable compleja****CAPÍTULO 17. LOS NÚMEROS COMPLEJOS**

- |                                      |     |
|--------------------------------------|-----|
| 1. Enunciados .....                  | 311 |
| 2. Soluciones a los ejercicios ..... | 315 |

	<u>Pág.</u>
<b>CAPÍTULO 18. DERIVACIÓN E INTEGRACIÓN DE FUNCIONES COMPLEJAS</b>	
1. Enunciados .....	327
2. Soluciones a los ejercicios .....	331
<b>CAPÍTULO 19. FUNCIONES ANALÍTICAS</b>	
1. Enunciados .....	345
2. Soluciones a los ejercicios .....	349
<b>CAPÍTULO 20. CEROS Y SINGULARIDADES AISLADAS</b>	
1. Enunciados .....	365
2. Soluciones a los ejercicios .....	369
<b>CAPÍTULO 21. EL TEOREMA DE CAUCHY Y SUS APLICACIONES</b>	
1. Enunciados .....	385
2. Soluciones a los ejercicios .....	389
<b>CAPÍTULO 22. TRANSFORMACIÓN CONFORME</b>	
1. Enunciados .....	411
2. Soluciones a los ejercicios .....	415

## CAPÍTULO 1

### *Espacios métricos*

#### 1. Enunciados

1. Sea  $R[0,1]$  el espacio de las funciones reales integrables Riemann en el intervalo  $[0,1]$ . Estúdiese si

$$d(f, g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx$$

es una distancia.

2. Sea  $C[0,1]$  el espacio de las funciones reales continuas en el intervalo  $[0,1]$ .

a) Pruébese que la aplicación  $d$  definida en el ejercicio anterior es una distancia.

b) Determínese la distancia entre  $f(x) = x^2$  y  $g(x) = 2x-1$ .

c) Determínese el diámetro de  $M = \{\cos f(x) : f \in C[0,1]\}$ .

3. Consideremos en  $\mathbb{R}^3$  la distancia del máximo

$$d_0((x, y, z), (x', y', z')) = \max \{|x-x'|, |y-y'|, |z-z'|\}$$

y el subconjunto

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2, (x-1)^2 + y^2 \leq 1\}$$

Interprétese geoméricamente el conjunto  $M$  y razónese que es acotado, pero que no está contenido en la bola abierta  $B_0((0, 0, 0), 4)$ . ¿Cuál es su diámetro para la distancia  $d_0$ ?, ¿y para la distancia euclídea?

4. Sean los intervalos  $A = [0, \pi/2]$  y  $B = [0, \pi]$  de  $\mathbb{R}$ .

a) Estúdiese si  $d_0(x, y) = |\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y|$  es una distancia en cada uno de ellos.

b) Estúdiese si  $f(x) = \operatorname{arcsen} x$  es una isometría entre  $[0, 1]$  con la distancia euclídea  $d$  y  $A$  con la distancia  $d_0$ .

5. Póngase un ejemplo de isometría entre  $\mathbb{R}$  con la distancia euclídea y  $\mathbb{R}$  con una distancia apropiada, diferente de la euclídea.

6. En  $\mathbb{R}^n$  con la distancia euclídea, dígase el interior, exterior, frontera, adherencia y acumulación de los siguientes conjuntos e indíquese si son abiertos, cerrados, acotados, compactos y completos.

a) El cilindro  $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: (y-1)^2 + z^2 = 4\}$ .

b) El cono  $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: z^2 \geq x^2 + y^2, z > 0\}$ .

c) El conjunto  $C$  intersección del paraboloido  $z = x^2 + y^2$  y el plano  $x + y + z = 1$ .

d) El conjunto  $D$  unión de las esferas

$$M_n = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: x^2 + y^2 + z^2 = 1/n, n \in \mathbb{N}\}.$$

7. Utilícese la sucesión  $f_n(t) = 0$  si  $1/n^2 \leq t \leq 1$ ,  $f_n(t) = n - n^3 t$  si  $0 \leq t \leq 1/n^2$  para probar que en  $C[0, 1]$

$$d(f, g) = \sup \{|f(t) - g(t)|: t \in [0, 1]\}$$

$$d'(f, g) = \int_0^1 |f(t) - g(t)| dt$$

son distancias no equivalentes.

8. Sea  $f$  una aplicación de  $\mathbb{R}$  en  $\mathbb{R}$  estrictamente monótona (por ejemplo creciente).

a) Pruébese que  $d'(x, y) = |f(x) - f(y)|$  es una distancia.

b) Pruébese que  $d'$  es equivalente a la distancia euclídea  $d$  si y sólo si  $f$  es continua.

c) Razónese que  $d'(x, y) = |e^x - e^y|$  es equivalente a  $d$ .

9. Sea  $\mathbb{R}^2$  con la distancia euclídea. Consideremos los subconjuntos  $H = [a, b] \times [c, d]$ , en donde  $a, b, c, d$  son números irracionales, y

$$M = \{(x, y) \in H: x, y \text{ son racionales}\}$$

- a) Determinése el interior, exterior, frontera, adherencia y acumulación de  $M$ .
- b) Estúdiense si  $M$  es abierto, cerrado, compacto y completo.
- c) Razónese que  $M$  es denso en  $H$ .

10. Sea  $\mathbb{Q}$  el conjunto de los números racionales. Consideremos el espacio  $\mathbb{Q}^2$  con la distancia euclídea y el subconjunto  $M$  definido en el ejercicio anterior.

- a) Determinése el interior, exterior, frontera, adherencia y acumulación de  $M$ .
- b) Estúdiense si  $M$  es abierto, cerrado, compacto y completo.

11. Razónese mediante el teorema de caracterización de la adherencia por sucesiones que el subconjunto

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: 4x^2 + y^2 < 4\}$$

no es cerrado.

12. En el espacio  $C[0,1]$  con la distancia del máximo, razónese mediante el teorema de caracterización por sucesiones que los siguientes conjuntos no son cerrados.

- a) La bola abierta de centro  $f(x) \equiv 0$  y radio 2.
- b) El espacio de los polinomios.

13. Sea  $C_{00}$  el espacio de todas las sucesiones de números reales tales que todos sus términos son cero salvo un número finito y consideremos la distancia

$$d(x, y) = \sup \{|x_n - y_n|: n \in \mathbb{N}\}$$

- a) Si  $x = (-1, 0, 2, 3, -1, 0, 0, \dots, 0, \dots)$   
 $y = (0, 2, -3, 1, 4, -2, 6, 0, 0, \dots, 0, \dots)$

dígase si  $y \in B(x, 2)$ .

b) Si  $M$  es el subconjunto de las sucesiones tales que  $x_n = 0$  para todo  $n \geq 4$ , estúdiense si  $M$  es abierto, cerrado, acotado, compacto y denso en  $C_{00}$ .

14. Sean  $(D, d')$  y  $(F, d'')$  espacios métricos.

a) Pruébese que  $(x_n, y_n)$  es una sucesión de Cauchy en  $(E \times F, d)$  si y sólo si  $(x_n)$  e  $(y_n)$  lo son en  $E$  y  $F$ .

b) Pruébese que  $E \times F$  es completo si y sólo si lo son  $E$  y  $F$ .

**15.** Sea  $M$  un subconjunto de  $\mathbb{R}^n$  con la distancia usual. Estúdiense la veracidad o falsedad de las siguientes propiedades.

a) Si  $M$  es cerrado, entonces es compacto.

b) Si  $M$  es cerrado, entonces es completo.

c) Si  $M$  es completo, entonces es cerrado.

d) Si  $M$  es compacto, entonces es completo.

e) Si  $M$  es completo, entonces es compacto.

**16.** Estúdiense si son completos los siguientes subconjuntos  $M$  de  $\mathbb{R}^2$ . En caso de no serlo, dese una sucesión de Cauchy contenida en el conjunto no convergente a un punto del conjunto.

a)  $(0,1) \times (0,1)$

d)  $\mathbb{R} \times \mathbb{Q}$

b)  $\{(x, y) : x^2 + y^2 < 1\}$

e)  $\left\{ \left( \frac{n^2}{n^2+1}, \sqrt[n]{n+1} \right) : n \in \mathbb{N} \right\} \cup \{(1,1)\}$

c)  $\{(x, y) : x^2 + 2y^2 \leq 1\}$

f)  $\{(x, y) : x + y \geq 1\}$

**17.** Sea  $E$  un espacio discreto. Estúdiense la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones.

a) Todos los subconjuntos de  $E$  son abiertos y cerrados.

b)  $E$  es compacto si y sólo si posee un número finito de elementos.

c) La adherencia de una bola abierta de radio uno no es la bola cerrada de radio uno.

**18.** En el espacio  $C[0,1]$  con la distancia del máximo, estudie la convergencia de las siguientes sucesiones. (En otras palabras estúdiense la convergencia uniforme de las sucesiones en el intervalo  $[0,1]$ ).

a)  $f_n(x) = \sin x^n$       b)  $g_n(x) = \sin^n x$       c)  $h_n(x) = \frac{x^{2n}}{(1+x^2)^n}$

**19.** Sea  $B[0,1]$  el espacio de las funciones reales acotadas con la distancia del supremo