Índice

Pág.

UNIDAD DIDÁCTICA 4
Cálculo integral

CAPÍTULO 12. LA INTEGRAL MÚLTIPLE DE RIEMANN

CAPÍTULO 13. INTEGRACIÓN SOBRE CONJUNTOS ACOTADOS

CAPÍTULO 14. CAMBIO DE VARIABLE Y APLICACIONES DE LA INTEGRAL

CAPÍTULO 15. INTEGRAL CURVILÍNEA

CAPÍTULO 16. LA INTEGRAL DE SUPERFICIE

UNIDAD DIDÁCTICA 5
Funciones de variable compleja

CAPÍTULO 17. LOS NÚMEROS COMPLEJOS

CAPÍTULO 1

Espacios métricos

1. Enunciados

1. Sea $R\,[0,1]$ el espacio de las funciones reales integrables Riemann en el intervalo $[0,1]$. Estúdiese si

$$d(f,g)=\int_0^1|f(x)-g(x)|dx$$

es una distancia.

2. Sea $C\,[0,1]$ el espacio de las funciones reales continuas en el intervalo $[0,1]$.

a) Pruébese que la aplicación d definida en el ejercicio anterior es una distancia.

b) Determínese la distancia entre $f(x) = x^2$ y $g(x) = 2x-1$.

c) Determínese el diámetro de $M = \{\cos f(x) \colon f \in C[0,1]\}$.

3. Consideremos en $\mathbb{R}^3$ la distancia del máximo

$$d_0((x, y, z), (x', y', z')) = \max\{|x-x'|, |y-y'|, |z-z'|\}$$

y el subconjunto

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon z = x^2 + y^2, (x-1)^2 + y^2 \leq 1\}$$

Interprétese geométricamente el conjunto M y razónese que es acotado, pero que no está contenido en la bola abierta $B_0((0, 0, 0), 4)$. ¿Cuál es su diámetro para la distancia d_0?, ¿y para la distancia euclídea?

4. Sean los intervalos $A = [0, \pi/2]$ y $B = [0, \pi]$ de $\mathbb{R}$.

a) Estúdiese si $d_0(x, y) = |\text{sen}x - \text{sen}y|$ es una distancia en cada uno de ellos.

b) Estúdiese si $f(x) = \text{arcsen}\, x$ es una isometría entre $[0,1]$ con la distancia euclídea d y A con la distancia d_0.

5. Póngase un ejemplo de isometría entre $\mathbb{R}$ con la distancia euclídea y $\mathbb{R}$ con una distancia apropiada, diferente de la euclídea.

6. En $\mathbb{R}^n$ con la distancia euclídea, dígase el interior, exterior, frontera, adherencia y acumulación de los siguientes conjuntos e indíquese si son abiertos, cerrados, acotados, compactos y completos.

a) El cilindro $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (y-1)^2 + z^2 = 4\}$.

b) El cono $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z^2 \geq x^2 + y^2, z > 0\}$.

c) El conjunto C intersección del paraboloide $z = x^2 + y^2$ y el plano $x + y + z = 1$.

d) El conjunto D unión de las esferas

$$M_n = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1/n, n \in \mathbb{N}\}.$$

7. Utilícese la sucesión $f_n(t) = 0$ si $1/n^2 \leq t \leq 1$, $f_n(t) = n - n^3 t$ si $0 \leq t \leq 1/n^2$ para probar que en $C[0,1]$

$$d(f, g) = \sup\{|f(t) - g(t)| : t \in [0,1]\}$$

$$d'(f, g) = \int_0^1 |f(t) - g(t)|\, dt$$

son distancias no equivalentes.

8. Sea f una aplicación de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ estrictamente monótona (por ejemplo creciente).

a) Pruébese que $d'(x, y) = |f(x) - f(y)|$ es una distancia.

b) Pruébese que d' es equivalente a la distancia euclídea d si y sólo si f es continua.

c) Razónese que $d'(x, y) = |e^x - e^y|$ es equivalente a d.

9. Sea $\mathbb{R}^2$ con la distancia euclídea. Consideremos los subconjuntos $H = [a, b] \times [c, d]$, en donde a, b, c, d son números irracionales, y

$$M = \{(x, y) \in H: x, y \text{ son racionales}\}$$

a) Determínese el interior, exterior, frontera, adherencia y acumulación de M.

b) Estúdiese si M es abierto, cerrado, compacto y completo.

c) Razónese que M es denso en H.

10. Sea $\mathbb{Q}$ el conjunto de los números racionales. Consideremos el espacio $\mathbb{Q}^2$ con la distancia euclídea y el subconjunto M definido en el ejercicio anterior.

a) Determínese el interior, exterior, frontera, adherencia y acumulación de M.

b) Estúdiese si M es abierto, cerrado, compacto y completo.

11. Razónese mediante el teorema de caracterización de la adherencia por sucesiones que el subconjunto

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: 4x^2 + y^2 < 4\}$$

no es cerrado.

12. En el espacio $C\,[0,1]$ con la distancia del máximo, razónese mediante el teorema de caracterización por sucesiones que los siguientes conjuntos no son cerrados.

a) La bola abierta de centro $f(x) \equiv 0$ y radio 2.

b) El espacio de los polinomios.

13. Sea C_{00} el espacio de todas las sucesiones de números reales tales que todos sus términos son cero salvo un número finito y consideremos la distancia

$$d(x, y) = \sup\,\{|x_n - y_n|: n \in \mathbb{N}\}$$

a) Si $x = (-1, 0, 2, 3, -1, 0, 0, \ldots, 0, \ldots)$

$y = (0, 2, -3, 1, 4, -2, 6, 0, 0, \ldots, 0, \ldots)$

dígase si $y \in B(x, 2)$.

b) Si M es el subconjunto de las sucesiones tales que $x_n = 0$ para todo $n \geq 4$, estúdiese si M es abierto, cerrado, acotado, compacto y denso en C_{00}.

14. Sean (D, d') y (F, d'') espacios métricos.

a) Pruébese que (x_n, y_n) es una sucesión de Cauchy en $(E \times F, d)$ si y sólo si (x_n) e (y_n) lo son en E y F.

b) Pruébese que $E \times F$ es completo si y sólo si lo son E y F.

15. Sea M un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ con la distancia usual. Estúdiese la veracidad o falsedad de las siguientes propiedades.

a) Si M es cerrado, entonces es compacto.

b) Si M es cerrado, entonces es completo.

c) Si M es completo, entonces es cerrado.

d) Si M es compacto, entonces es completo.

e) Si M es completo, entonces es compacto.

16. Estúdiese si son completos los siguientes subconjuntos M de $\mathbb{R}^2$. En caso de no serlo, dese una sucesión de Cauchy contenida en el conjunto no convergente a un punto del conjunto.

a) $(0,1)\times(0,1)$

b) $\{(x,y): x^2+y^2<1\}$

c) $\{(x,y): x^2+2y^2\le 1\}$

d) $\mathbb{R}\times\mathbb{Q}$

e) $\left\{\left(\dfrac{n^2}{n^2+1}, \sqrt[n]{n+1}\right): n\in\mathbb{N}\right\}\cup\{(1,1)\}$

f) $\{(x,y): x+y\ge 1\}$

17. Sea E un espacio discreto. Estúdiese la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones.

a) Todos los subconjuntos de E son abiertos y cerrados.

b) E es compacto si y sólo si posee un número finito de elementos.

c) La adherencia de una bola abierta de radio uno no es la bola cerrada de radio uno.

18. En el espacio $C\,[0,1]$ con la distancia del máximo, estudie la convergencia de las siguientes sucesiones. (En otras palabras estúdiese la convergencia uniforme de las sucesiones en el intervalo $[0,1]$).

a) $f_n(x)=\operatorname{sen} x^n$ b) $g_n(x)=\operatorname{sen}^n x$ c) $h_n(x)=\dfrac{x^{2n}}{(1+x^2)^n}$

19. Sea $B\,[0,1]$ el espacio de las funciones reales acotadas con la distancia del supremo