

Índice

Pág.

UNIDAD DIDÁCTICA 4

Cálculo integral

CAPÍTULO 12. LA INTEGRAL MÚLTIPLE DE RIEMANN	13
1. Introducción. La integral doble	17
2. Integral múltiple	21
3. Medida cero y contenido cero	25
4. Caracterización de las funciones integrables	29
5. Propiedades de la integral	35
CAPÍTULO 13. INTEGRACIÓN SOBRE CONJUNTOS ACOTADOS .	41
1. Conjuntos medibles Jordan	45
2. Integración sobre conjuntos acotados	51
3. Recintos de integración. Regiones proyectables	55
4. Integración reiterada. Teorema de Fubini	63
CAPÍTULO 14. CAMBIO DE VARIABLE Y APLICACIONES DE LA INTEGRAL	71
1. Cambio de variable en la integral múltiple	75
2. Aplicaciones geométricas de la integral	81
3. Aplicaciones físicas de la integral	87

	<i>Pág.</i>
CAPÍTULO 15. INTEGRAL CURVILÍNEA	91
1. Integral curvilínea	95
2. Teoremas fundamentales de la integración de línea	99
3. El teorema de Green	107
4. Aplicaciones de la integral de línea	115
CAPÍTULO 16. INTEGRAL DE SUPERFICIE	121
1. Integral de superficie	123
2. Los campos rotacional y divergencia	133
3. El teorema de Stokes	137
4. El teorema de la divergencia	143
UNIDAD DIDÁCTICA 5	
Funciones de variable compleja	
CAPÍTULO 17. LOS NÚMEROS COMPLEJOS	149
1. Los números complejos	153
2. Topología del plano complejo	159
3. Sucesiones y series de números complejos	163
4. Funciones complejas	167
5. Funciones elementales	171
CAPÍTULO 18. DERIVACIÓN E INTEGRACIÓN DE FUNCIONES COMPLEJAS	179
1. Funciones holomorfas	183
2. Propiedades de la derivada	187
3. Integración en el plano complejo	191
4. El teorema de Cauchy-Goursat	197
CAPÍTULO 19. FUNCIONES ANALÍTICAS	205
1. Series de potencias	209
2. La fórmula integral de Cauchy	217
3. Propiedades de las funciones analíticas	225

	<u>Pág.</u>
CAPÍTULO 20. CEROS Y SINGULARIDADES AISLADAS	229
1. Ceros de una función analítica	233
2. El principio del módulo máximo	239
3. Singularidades aisladas	243
 CAPÍTULO 21. EL TEOREMA DE CAUCHY Y SUS APLICACIONES	 251
1. El teorema de Cauchy	255
2. Series de Laurent	259
3. El teorema de los residuos	267
4. Aplicaciones al cálculo de integrales	273
5. Aplicación a la suma de series	283
 CAPÍTULO 22. TRANSFORMACIÓN CONFORME	 289
1. Transformación conforme	293
2. La transformación bilineal fraccionaria	297
3. Formas particulares de la transformación de Möbius	305
 BIBLIOGRAFÍA COMPLEMENTARIA	 311
 ÍNDICE TERMINOLÓGICO	 313

UNIDAD DIDÁCTICA 4
CÁLCULO INTEGRAL

- La integral múltiple de Riemann
- Integración sobre conjuntos acotados
- Cambio de variable y aplicaciones de la integral
- Integral curvilínea
- Integral de superficie

CAPÍTULO 12

La integral múltiple de Riemann

1. Introducción. La integral doble.
2. Integral múltiple.
3. Medida y contenido cero.
4. Caracterización de las funciones integrables.
5. Propiedades de la integral.

PRERREQUISITOS

- Integral simple:
 - Partición de un intervalo.
 - Suma superior e inferior de Riemann.
 - Integral superior e integral inferior.
 - Definición de integral. Interpretación geométrica.
 - Cálculo de integrales.
- Propiedades de los números reales. Supremo e ínfimo de un conjunto.
- Conjuntos compactos. Propiedades.
- Función acotada.
- Continuidad de una función.

ESQUEMA/RESUMEN

- Partición de un rectángulo A de \mathbb{R}^2 : $P = P_1 \times P_2$.

- Suma superior de f respecto a una partición P :

$$S(f, P) = \sum M(f, Q) |Q| \text{ para } Q \in P$$

- Suma inferior de f respecto a una partición P :

$$s(f, P) = \sum m(f, Q) |Q| \text{ para } Q \in P$$

- Integral superior:

$$\int_A f = \inf \{S(f, P) : P \in \mathcal{P}(A)\}$$

- Integral inferior:

$$\int_{\underline{A}} f = \sup \{s(f, P) : P \in \mathcal{P}(A)\}$$

$$f \text{ es integrable} \Leftrightarrow \int_{\underline{A}} f = \int_A f$$

- Rectángulo A n -dimensional: $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n]$.

- Medida del rectángulo n -dimensional:

$$|A| = |b_1 - a_1| \cdot |b_2 - a_2| \cdot \dots \cdot |b_n - a_n|.$$

- Partición del rectángulo n -dimensional: $P = P_1 \times P_2 \times \dots \times P_n$.

- Integral múltiple: integral sobre un rectángulo de dimensión $n > 1$. La definición es análoga a la correspondiente a $n = 2$.

- Condición de integrabilidad de Riemann: f es integrable \Leftrightarrow

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \text{ existe } P \in \mathcal{P}(A) \text{ tal que } S(f, P) - s(f, P) < \varepsilon.$$

- $M \subset \mathbb{R}^n$ es un subconjunto de medida n -dimensional cero $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$ existe una sucesión de rectángulos $\{Q_m\}$ de \mathbb{R}^n tal que recubre a M y

$$\sum_{m=1}^{\infty} |Q_m| < \varepsilon$$

- $M \subset \mathbb{R}^n$ es un subconjunto de contenido n -dimensional cero $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$ existe un número finito $\{Q_1, Q_2, \dots, Q_p\}$ de rectángulos que recubren a M tales que

$$\sum_{m=1}^p |Q_m| < \varepsilon$$

- Si M tiene contenido cero, entonces tiene medida cero.

- Si M es compacto y tiene medida cero, entonces tiene contenido cero.
- Oscilación de una función f en un punto a :

$$O(f, a) = \lim_{\delta \rightarrow 0} [M(a, f, \delta) - m(a, f, \delta)]$$

- Caracterización de las funciones integrables: f es integrable en A si y sólo si su conjunto de puntos de discontinuidad tiene medida cero.
- Propiedades de las funciones integrables: f, g integrables; $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
 1. El producto por un número λf , la suma $f + g$, el producto fg y el cociente f/g , $g(x) \neq 0$, f/g acotada, son funciones integrables y se cumple

$$\int_A \lambda f + \mu g = \lambda \int_A f + \mu \int_A f.$$

2. $|f(x)|$ es integrable y se cumple

$$\left| \int_A f(x) dx \right| \leq \int_A |f(x)| dx$$

3. Si P es una partición de A , se cumple

$$\int_A f(x) dx = \sum \int_A f(x) dx \quad \text{para } Q \in P$$

1. Introducción. La integral doble

En el estudio de funciones reales de una variable real se estableció el concepto de integral de Riemann para funciones definidas y acotadas en un intervalo $[a, b]$. Una primera generalización consistió en considerar funciones no acotadas e intervalos no finitos (integrales impropias). Se extiende ahora el concepto a funciones reales de varias variables, definidas y acotadas en intervalos n -dimensionales $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n]$, a los que de forma genérica denominamos rectángulos. Posteriormente, se extenderá la integración a conjuntos más generales denominados **recintos** o **regiones de integración**. Para mayor claridad comenzamos con el caso $n = 2$, **integral doble**, aunque el proceso es el mismo cualquiera que sea la dimensión n .

Un **rectángulo** A de \mathbb{R}^2 es el producto cartesiano de dos intervalos cerrados y acotados $[a, b]$ y $[c, d]$ de \mathbb{R}

$$A = [a, b] \times [c, d] = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a, b], y \in [c, d]\}$$

Una **partición** P de A es una colección de puntos $P_1 \times P_2$ en donde

$$P_1 = \{a = x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n = b\} \quad P_2 = \{c = y_0, y_1, y_2, \dots, y_{m-1}, y_m = d\}$$

son particiones de los intervalos $[a, b]$ y $[c, d]$. La partición P determina una colección de subrectángulos $\{Q_{ij}\}$, $i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, m$ (Figura 12.1), tal que

$$Q_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$$

Supongamos una función real f definida y acotada en A , y por lo tanto acotada en cada subrectángulo Q_{ij} de una partición P de A . Designemos por

$$M_{ij} = \sup\{f(x, y) : (x, y) \in Q_{ij}\} \quad m_{ij} = \inf\{f(x, y) : (x, y) \in Q_{ij}\}$$

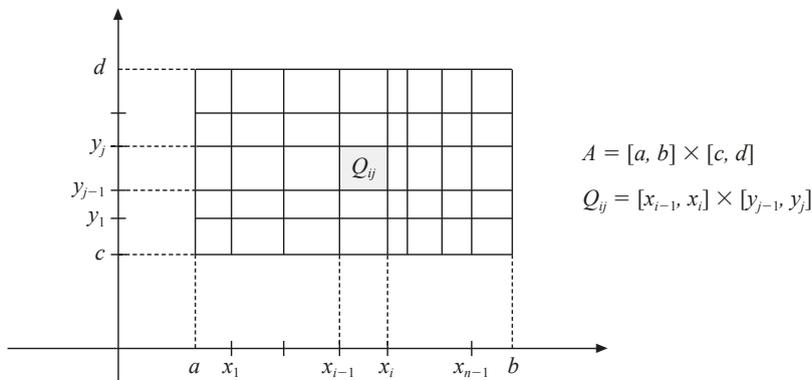


Figura 12.1. Partición de un rectángulo.

y por $|Q_{ij}|$ el área del subrectángulo Q_{ij} , es decir

$$|Q_{ij}| = (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$$

se llama **suma superior de Riemann** $S(f, P)$ de f respecto a la partición P a la suma

$$S(f, P) = \sum_{i,j} M_{ij} |Q_{ij}|$$

y **suma inferior de Riemann** $s(f, P)$ de f respecto a la partición P a la suma

$$s(f, P) = \sum_{i,j} m_{ij} |Q_{ij}|$$

Si $|A| = (b - a)(d - c)$ es el área de A , M es el supremo de f en A y m es su ínfimo, cualquiera que sea la partición P , es claro que se cumple

$$m |A| \leq s(f, P) \leq S(f, P) \leq M |A|$$

por lo tanto, si $\mathcal{P}(A)$ representa la familia de particiones de A , los conjuntos de todas las sumas superiores y de todas las sumas inferiores de Riemann

$$\{S(f, P) : P \in \mathcal{P}(A)\} \quad \{s(f, P) : P \in \mathcal{P}(A)\}$$

están acotados por $m |A|$ y $M |A|$.

Se llama **integral inferior** de Riemann de f en A , y se representa por $\int_A f$ al supremo de las sumas inferiores, y se llama **integral superior** de Riemann de f en A , y se representa por $\bar{\int}_A f$ al ínfimo de las sumas superiores.

Las integrales inferior y superior existen siempre, pues todo conjunto de números reales acotado posee supremo e ínfimo.

12.1. Definición de la integral doble de Riemann en un rectángulo

Sea A un rectángulo de \mathbb{R}^2 y f una función real definida y acotada en A . Se dice que f es integrable en A si

$$\int_A f = \bar{\int}_A f$$

A este valor se le llama integral de f en A y se le representa por

$$\int_A f \quad \text{o bien por} \quad \iint_A f(x, y) dx dy$$

Como en el caso de la integral simple, también la integral doble tiene una interpretación geométrica sencilla. Supongamos que f es una función continua y positiva definida en el rectángulo A . Cada suma superior de Riemann es una aproximación superior del volumen V que limitan los planos $x = a$, $x = b$, $y = c$, $y = d$, y la superficie $z = f(x, y)$. Análogamente cada suma inferior de Riemann es una aproximación inferior. En otras palabras, cualquiera que sea la partición P de A , se cumple

$$s(f, P) \leq V \leq S(f, P).$$

Como consecuencia el volumen V es la integral de f sobre A .

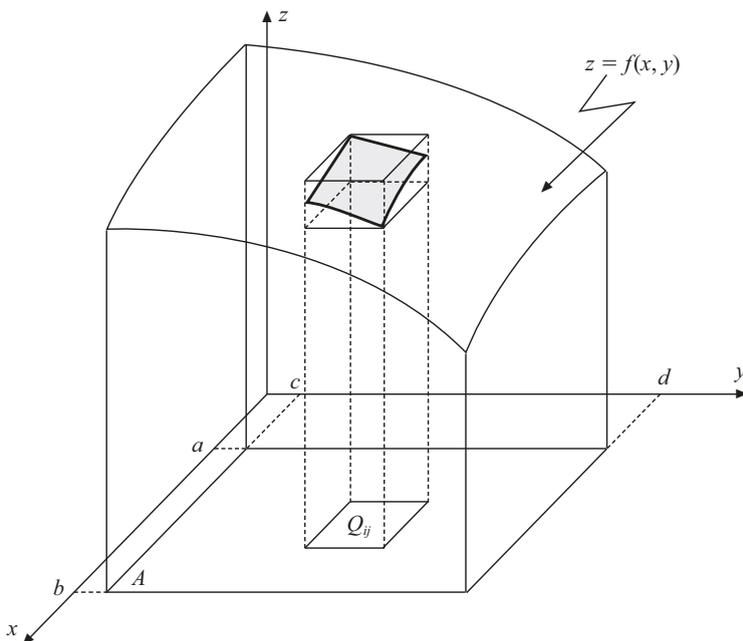


Figura 12.2. Aproximación superior e inferior del volumen en un subrectángulo.

2. Integral múltiple

El proceso para establecer el concepto de integral de una función real definida y acotada en un rectángulo de \mathbb{R}^n es una repetición del proceso utilizado en la integral doble.

Sea f una función real definida y acotada en el rectángulo

$$A = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n]$$

Una partición P de A es una colección de puntos

$$P = P_1 \times P_2 \times \dots \times P_n$$

en donde P_i es una partición del intervalo $[a_i, b_i]$. Cada partición P determina una colección de subrectángulos $\{Q\}$ en los que f está acotada. Si designamos por $M(f, Q)$ el supremo de f en Q y por $|Q|$ el área de Q , entonces la suma de $|Q|M(f, Q)$ para todos los subrectángulos de la partición se llama **suma superior de Riemann** $S(f, P)$ de f respecto de P . Es decir

$$S(f, P) = \sum |Q| M(f, Q)$$

en donde \sum significa la suma cuando Q recorre todos los subrectángulos de P . Análogamente, si $m(f, Q)$ representa el ínfimo de f en Q , la suma de $|Q|m(f, Q)$ para todos los rectángulos de la partición se llama **suma inferior de Riemann** de f respecto de P . Es decir

$$s(f, P) = \sum |Q| m(f, Q)$$

Si $|A|$ es el área del rectángulo A , M es el supremo de f en A y m es su ínfimo, cualquiera que sea la partición P de A se cumple

$$|A|m \leq s(f, P) \leq S(f, P) \leq |A|M$$

Es decir, el conjunto de todas las sumas superiores y el conjunto de todas las sumas inferiores de Riemann están acotados. Al supremo de las sumas inferiores se le llama **integral inferior de Riemann** y al ínfimo de las sumas superiores se le llama **integral superior de Riemann** y se representan por

$$\int_A f \quad \text{y} \quad \bar{\int}_A f$$

respectivamente. La integral inferior y la integral superior existen siempre, ya que todo conjunto de números reales acotado posee supremo e ínfimo.

12.2. Definición de integral de Riemann de una función en un rectángulo

Sea f una función real definida y acotada en un rectángulo A de \mathbb{R}^n . Se dice que f es integrable en A si

$$\int_A f = \bar{\int}_A f$$

A este valor se le llama integral de f en A y se representa por

$$\int_A f \quad \text{o bien por} \quad \int \cdots \int_A f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n$$

En el caso $n = 2$ se tiene la integral doble, en el caso $n = 3$ se tiene la integral triple, etc... La integral triple se suele representar por

$$\iiint_A f(x, y, z) dx dy dz$$

12.3. Ejemplos

1. Una función constante $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = k$ es integrable en cualquier rectángulo A de \mathbb{R}^n , ya que cualquiera que sea la partición P de A las sumas superior e inferior de Riemann de f respecto de P valen $k|A|$.

2. $f(x, y, z) = 1$ si al menos una de las tres coordenadas es racional y $f(x, y, z) = 2$ si las tres coordenadas son irracionales, no es integrable en ningún rectángulo A de \mathbb{R}^3 , ya que cualquiera que sea la partición P de A

$$s(f, P) = \sum |Q| = |A| \quad S(f, P) = \sum 2|Q| = 2|A|$$

por lo tanto

$$\int_A f = |A| \quad \bar{\int}_A f = 2|A| \quad \Rightarrow \quad \int_A f \neq \bar{\int}_A f$$

Una condición necesaria y suficiente para que exista la integral de f en el rectángulo A es la siguiente:

12.4. Condición de integrabilidad de Riemann

f es integrable en A si y sólo si para cada $\varepsilon > 0$ existe una partición P de A tal que $S(f, P) - s(f, P) \leq \varepsilon$.

Demostración. Si se cumple la condición, es evidente que el ínfimo de las sumas superiores y el supremo de las sumas inferiores coinciden. Por lo tanto, si $\mathcal{P}(A)$ representa el conjunto de las particiones de A , se tiene

$$\bar{\int}_A f = \inf\{S(f, P) : P \in \mathcal{P}(A)\} = \sup\{s(f, P) : P \in \mathcal{P}(A)\} = \int_A f$$

y la función es integrable.

Recíprocamente. Sea $\varepsilon > 0$ tan pequeño como queramos. Por las definiciones de ínfimo y supremo, existen respectivamente dos particiones P' y P'' de A tales que

$$S(f, P') - \bar{\int}_A f \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad ; \quad \int_A f - s(f, P'') \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Si P es la partición formada por la unión de P' y P'' , teniendo en cuenta que

$$S(f, P) \leq S(f, P') \quad ; \quad s(f, P'') \leq s(f, P)$$

resulta

$$S(f, P) - \bar{\int}_A f \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad ; \quad \int_A f - s(f, P) \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Como por hipótesis f es integrable, se tiene

$$\int_A f = \bar{\int}_A f$$

y sumando las desigualdades

$$S(f, P) - s(f, P) \leq \varepsilon \quad \blacksquare$$