Índice

Pág.

UNIDAD DIDÁCTICA 4

Cálculo integral

UNIDAD DIDÁCTICA 5

Funciones de variable compleja

Unidad Didáctica 4
CÁLCULO INTEGRAL

- La integral múltiple de Riemann
- Integración sobre conjuntos acotados
- Cambio de variable y aplicaciones de la integral
- Integral curvilínea
- Integral de superficie

CAPÍTULO 12
La integral múltiple de Riemann

1. Introducción. La integral doble.
2. Integral múltiple.
3. Medida y contenido cero.
4. Caracterización de las funciones integrables.
5. Propiedades de la integral.

PRERREQUISITOS

- Integral simple:
  - Partición de un intervalo.
  - Suma superior e inferior de Riemann.
  - Integral superior e integral inferior.
  - Definición de integral. Interpretación geométrica.
  - Cálculo de integrales.
- Propiedades de los números reales. Supremo e ínfimo de un conjunto.
- Conjuntos compactos. Propiedades.
- Función acotada.
- Continuidad de una función.

ESQUEMA/RESUMEN

- Partición de un rectángulo A de $\mathbb{R}^2$: $P = P_1 \times P_2$.
- Suma superior de f respecto a una partición P:

$$S(f, P) = \sum M(f, Q)|Q| \text{ para } Q \in P$$

- Suma inferior de f respecto a una partición P:

$$s(f, P) = \sum m(f, Q)|Q| \text{ para } Q \in P$$

- Integral superior:

$$\overline{\int_A} f = \inf\{S(f, P): P \in \mathcal{P}(A)\}$$

- Integral inferior:

$$\underline{\int_A} f = \sup\{s(f, P): P \in \mathcal{P}(A)\}$$

f es integrable $\Leftrightarrow \underline{\int_A} f = \overline{\int_A} f$.

- Rectángulo A n-dimensional: $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \ldots \times [a_n, b_n]$.
- Medida del rectángulo n-dimensional:

$$|A| = |b_1 - a_1| \cdot |b_2 - a_2| \cdot \ldots \cdot |b_n - a_n|.$$

- Partición del rectángulo n-dimensional: $P = P_1 \times P_2 \times \ldots \times P_n$.
- Integral múltiple: integral sobre un rectángulo de dimensión $n > 1$. La definición es análoga a la correspondiente a $n = 2$.
- Condición de integrabilidad de Riemann: f es integrable $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \text{existe} \quad P \in \mathcal{P}(A) \quad \text{tal que} \quad S(f, P) - s(f, P) < \varepsilon.$$

- $M \subset \mathbb{R}^n$ es un subconjunto de medida n-dimensional cero $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$ existe una sucesión de rectángulos $\{Q_m\}$ de $\mathbb{R}^n$ tal que recubre a M y

$$\sum_{m=1}^{\infty} |Q_m| < \varepsilon$$

- $M \subset \mathbb{R}^n$ es un subconjunto de contenido n-dimensional cero $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$ existe un número finito $\{Q_1, Q_2, \ldots, Q_p\}$ de rectángulos que recubren a M tales que

$$\sum_{m=1}^{p} |Q_m| < \varepsilon$$

- Si M tiene contenido cero, entonces tiene medida cero.

- Si M es compacto y tiene medida cero, entonces tiene contenido cero.
- Oscilación de una función f en un punto a:

$$O(f, a) = \lim_{\delta \to 0} [M(a, f, \delta) - m(a, f, \delta)]$$

- Caracterización de las funciones integrables: f es integrable en A si y sólo si su conjunto de puntos de discontinuidad tiene medida cero.
- Propiedades de las funciones integrables: f, g integrables; $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

1. El producto por un número λf, la suma $f + g$, el producto fg y el cociente f/g, $g(x) \neq 0$, f/g acotada, son funciones integrables y se cumple

$$\int_A \lambda f + \mu g = \lambda \int_A f + \mu \int_A f.$$

2. $|f(x)|$ es integrable y se cumple

$$\left| \int_A f(x)dx \right| \leq \int_A |f(x)|\, dx$$

3. Si P es una partición de A, se cumple

$$\int_A f(x)dx = \sum \int_A f(x)d\mathrm{x} \quad \text{para } Q \in P$$

1. *Introducción. La integral doble*

En el estudio de funciones reales de una variable real se estableció el concepto de integral de Riemann para funciones definidas y acotadas en un intervalo $[a, b]$. Una primera generalización consistió en considerar funciones no acotadas e intervalos no finitos (integrales impropias). Se extiende ahora el concepto a funciones reales de varias variables, definidas y acotadas en intervalos n-dimensionales $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \ldots \times [a_n, b_n]$, a los que de forma genérica denominamos rectángulos. Posteriormente, se extenderá la integración a conjuntos más generales denominados **recintos** o **regiones de integración**. Para mayor claridad comenzamos con el caso $n = 2$, **integral doble**, aunque el proceso es el mismo cualquiera que sea la dimensión n.

Un **rectángulo** A de $\mathbb{R}^2$ es el producto cartesiano de dos intervalos cerrados y acotados $[a, b]$ y $[c, d]$ de $\mathbb{R}$

$$A = [a, b] \times [c, d] = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a, b], y \in [c, d]\}$$

Una **partición** P de A es una colección de puntos $P_1 \times P_2$ en donde

$$P_1 = \{a = x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n = b\} \quad P_2 = \{c = y_0, y_1, y_2, \ldots, y_{m-1}, y_m = d\}$$

son particiones de los intervalos $[a, b]$ y $[c, d]$. La partición P determina una colección de subrectángulos $\{Q_{ij}\}$, $i = 1, 2, \ldots, n; j = 1, 2, \ldots, m$ (Figura 12.1), tal que

$$Q_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$$

Supongamos una función real f definida y acotada en A, y por lo tanto acotada en cada subrectángulo Q_{ij} de una partición P de A. Designemos por

$$M_{ij} = \sup\{f(x, y) : (x, y) \in Q_{ij}\} \quad m_{ij} = \inf\{f(x, y) : (x, y) \in Q_{ij}\}$$

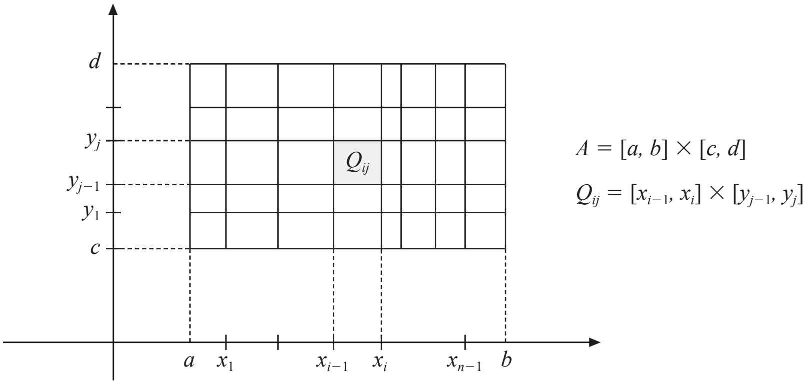

Figura 12.1. Partición de un rectángulo.

y por $|Q_{ij}|$ el área del subrectángulo Q_{ij}, es decir

$$|Q_{ij}| = (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$$

se llama **suma superior de Riemann** $S(f, P)$ de f respecto a la partición P a la suma

$$S(f, P) = \sum_{i,j} M_{ij} |Q_{ij}|$$

y **suma inferior de Riemann** $s(f, P)$ de f respecto a la partición P a la suma

$$s(f, P) = \sum_{i,j} m_{ij} |Q_{ij}|$$

Si $|A| = (b - a)(c - d)$ es el área de A, M es el supremo de f en A y m es su ínfimo, cualquiera que sea la partición P, es claro que se cumple

$$m|A| \leq s(f, P) \leq S(f, P) \leq M|A|$$

por lo tanto, si $\mathcal{P}(A)$ representa la familia de particiones de A, los conjuntos de todas las sumas superiores y de todas las sumas inferiores de Riemann

$$\{S(f, P) : P \in \mathcal{P}(A)\} \qquad \{s(f, P) : P \in \mathcal{P}(A)$$

están acotados por $m|A|$ y $M|A|$.

Se llama **integral inferior** de Riemann de f en A, y se representa por $\underline{\int}_A f$ al supremo de las sumas inferiores, y se llama **integral superior** de Riemann de f en A, y se representa por $\overline{\int}_A f$ al ínfimo de las sumas superiores.

Las integrales inferior y superior existen siempre, pues todo conjunto de números reales acotado posee supremo e ínfimo.

12.1. **Definición de la integral doble de Riemann en un rectángulo**

Sea A *un rectángulo de* $\mathbb{R}^2$ *y* f *una función real definida y acotada en* A. *Se dice que* f *es integrable en* A si

$$\underline{\int}_A \mathrm{f} = \overline{\int}_A \mathrm{f}$$

A este valor se le llama integral de f *en* A y se *le representa por*

$$\int_A \mathrm{f} \quad \textit{o bien por} \quad \iint_A \mathrm{f(x, y)dxdy}$$

Como en el caso de la integral simple, también la integral doble tiene una interpretación geométrica sencilla. Supongamos que f es una función continua y positiva definida en el rectángulo A. Cada suma superior de Riemann es una aproximación superior del volumen V que limitan los planos $x = a$, $x = b$, $y = c$, $y = d$, y la superficie $z = f(x, y)$. Análogamente cada suma inferior de Riemann es una aproximación inferior. En otras palabras, cualquiera que sea la partición P de A, se cumple

$$s(f, P) \leq V \leq S(f, P).$$

Como consecuencia el volumen V es la integral de f sobre A.

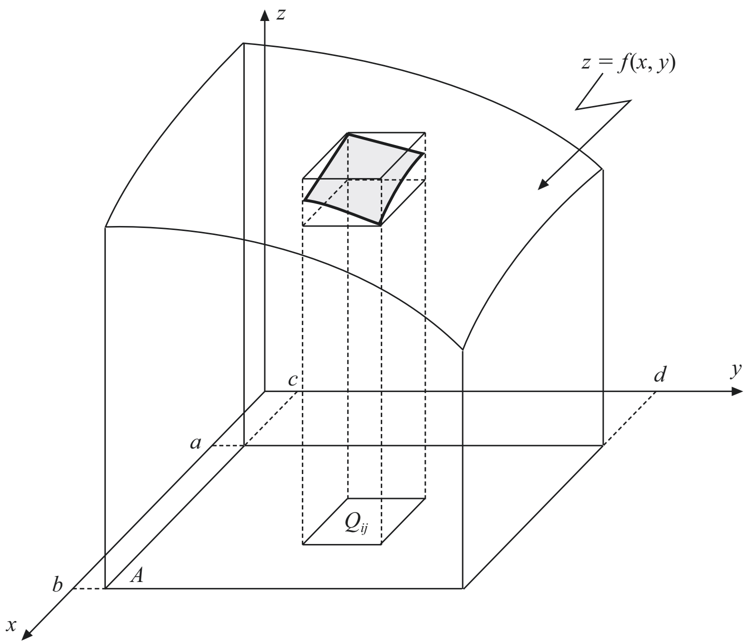

Figura 12.2. Aproximación superior e inferior del volumen en un subrectángulo.

2. *Integral múltiple*

El proceso para establecer el concepto de integral de una función real definida y acotada en un rectángulo de $\mathbb{R}^n$ es una repetición del proceso utilizado en la integral doble.

Sea f una función real definida y acotada en el rectángulo

$$A = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \ldots \times [a_n, b_n]$$

Una partición P de A es una colección de puntos

$$P = P_1 \times P_2 \times \ldots \times P_n$$

en donde P_i es una partición del intervalo $[a_i, b_i]$. Cada partición P determina una colección de subrectángulos $\{Q\}$ en los que f está acotada. Si designamos por $M(f, Q)$ el supremo de f en Q y por $|Q|$ el área de Q, entonces la suma de $|Q|M(f, Q)$ para todos los subrectángulos de la partición se llama **suma superior de Riemann** $S(f, P)$ de f respecto de P. Es decir

$$S(f, P) = \sum |Q| M(f, Q)$$

en donde $\sum$ significa la suma cuando Q recorre todos los subrectángulos de P. Análogamente, si $m(f, Q)$ representa el ínfimo de f en Q, la suma de $|Q|m(f, Q)$ para todos los rectángulos de la partición se llama **suma inferior de Riemann** de f respecto de P. Es decir

$$s(f, P) = \sum |Q| m(f, Q)$$

Si $|A|$ es el área del rectángulo A, M es el supremo de f en A y m es su ínfimo, cualquiera que sea la partición P de A se cumple

$$|A| m \leq s(f, P) \leq S(f, P) \leq |A| M$$

Es decir, el conjunto de todas las sumas superiores y el conjunto de todas las sumas inferiores de Riemann están acotados. Al supremo de las sumas inferiores se le llama **integral inferior de Riemann** y al ínfimo de las sumas superiores se le llama **integral superior de Riemann** y se representan por

$$\underline{\int}_A f \quad \text{y} \quad \overline{\int}_A f$$

respectivamente. La integral inferior y la integral superior existen siempre, ya que todo conjunto de números reales acotado posee supremo e ínfimo.

12.2. **Definición de integral de Riemann de una función en un rectángulo**

Sea f *una función real definida y acotada en un rectángulo* A *de* $\mathbb{R}^n$. *Se dice que* f *es integrable en* A si

$$\underline{\int}_A \mathrm{f} = \overline{\int}_A \mathrm{f}$$

A este valor se le llama integral de f *en* A y se *representa por*

$$\int_A \mathrm{f} \quad \textit{o bien por} \quad \int\int\cdots\int_A \mathrm{f}(\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \ldots, \mathrm{x}_n)\mathrm{dx}_1\mathrm{dx}_2\ldots\mathrm{dx}_n$$

En el caso $n = 2$ se tiene la integral doble, en el caso $n = 3$ se tiene la integral triple, etc… La integral triple se suele representar por

$$\iiint_A f(x, y, z)dxdydz$$

12.3. **Ejemplos**

1. Una función constante $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = k$ es integrable en cualquier rectángulo A de $\mathbb{R}^n$, ya que cualquiera que sea la partición P de A las sumas superior e inferior de Riemann de f respecto de P valen $k|A|$.

2. $f(x, y, z) = 1$ si al menos una de las tres coordenadas es racional y $f(x, y, z) = 2$ si las tres coordenadas son irracionales, no es integrable en ningún rectángulo A de $\mathbb{R}^3$, ya que cualquiera que sea la partición P de A

$$s(f, P) = \sum|Q| = |A| \qquad S(f, P) = \sum 2|Q| = 2|A|$$

por lo tanto

$$\underline{\int}_A f = |A| \qquad \overline{\int}_A f = 2|A| \;\Rightarrow\; \underline{\int}_A f \neq \overline{\int}_A f$$

Una condición necesaria y suficiente para que exista la integral de f en el rectángulo A es la siguiente:

12.4. **Condición de integrabilidad de Riemann**

f *es integrable en* A *si y sólo si para cada* ε > 0 *existe una partición* P *de* A *tal que* S(f, P) − s(f, P) ≤ ε.

Demostración. Si se cumple la condición, es evidente que el ínfimo de las sumas superiores y el supremo de las sumas inferiores coinciden. Por lo tanto, si $\mathcal{P}(A)$ representa el conjunto de las particiones de A, se tiene

$$\overline{\int_A} f = \inf\{S(f, P) : P \in \mathcal{P}(A)\} = \sup\{s(f, P) : P \in \mathcal{P}(A)\} = \underline{\int_A} f$$

y la función es integrable.

Recíprocamente. Sea ε > 0 tan pequeño como queramos. Por las definiciones de ínfimo y supremo, existen respectivamente dos particiones P' y P'' de A tales que

$$S(f, P') - \overline{\int_A} f \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad ; \quad \underline{\int_A} f - s(f, P'') \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Si P es la partición formada por la unión de P' y P'', teniendo en cuenta que

$$S(f, P) \leq S(f, P') \quad ; \quad s(f, P'') \leq s(f, P)$$

resulta

$$S(f, P) - \overline{\int_A} f \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad ; \quad \underline{\int_A} f - s(f, P) \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Como por hipótesis f es integrable, se tiene

$$\underline{\int_A} f = \overline{\int_A} f$$

y sumando las desigualdades

$$S(f, P) - s(f, P) \leq \varepsilon \ \blacksquare$$