

# ÍNDICE

|                    |    |
|--------------------|----|
| Presentación ..... | 15 |
|--------------------|----|

## UNIDAD DIDÁCTICA 1

### Capítulo 1

#### FUNDAMENTOS

|                                                                            |    |
|----------------------------------------------------------------------------|----|
| 1. Circuito eléctrico .....                                                | 21 |
| 2. Símbolos literales .....                                                | 21 |
| 3. Convenios para el sentido de referencia de la corriente eléctrica ..... | 23 |
| 4. Convenios para la polaridad de referencia de la tensión eléctrica ..... | 24 |
| 5. Leyes de Kirchhoff .....                                                | 25 |
| 5.1. Primera ley de Kirchhoff .....                                        | 25 |
| 5.2. Segunda ley de Kirchhoff .....                                        | 28 |
| 6. Problemas fundamentales en la teoría de circuitos .....                 | 29 |
| 7. Clases de circuitos .....                                               | 30 |
| Problemas .....                                                            | 31 |
| Soluciones de los problemas .....                                          | 33 |

## Capítulo 2

### ELEMENTOS IDEALES DE LOS CIRCUITOS

|                                             |    |
|---------------------------------------------|----|
| 1. Elementos ideales de los circuitos ..... | 39 |
| 2. Dipolos .....                            | 39 |
| 2.1. Resistencia .....                      | 39 |
| 2.2. Fuentes independientes .....           | 41 |
| 2.2.1. Fuente ideal de tensión .....        | 41 |
| 2.2.2. Fuente ideal de intensidad .....     | 43 |
| 2.3. Condensador .....                      | 47 |
| 2.4. Bobina .....                           | 53 |
| 3. Cuadripolos .....                        | 58 |
| 3.1. Bobinas acopladas magnéticamente ..... | 58 |
| 3.2. Transformador ideal .....              | 64 |
| 3.3. Fuentes dependientes .....             | 67 |
| 3.4. Amplificador operacional ideal .....   | 69 |
| Problemas .....                             | 75 |
| Soluciones de los problemas .....           | 81 |

## Capítulo 3

### POTENCIA Y ENERGÍA

|                                             |     |
|---------------------------------------------|-----|
| 1. Introducción .....                       | 95  |
| 2. Dipolos .....                            | 96  |
| 2.1. Resistencia .....                      | 97  |
| 2.2. Condensador .....                      | 98  |
| 2.3. Bobina .....                           | 100 |
| 2.4. Fuentes ideales independientes .....   | 101 |
| 3. Multipolos .....                         | 106 |
| 3.1. Bobinas acopladas magnéticamente ..... | 108 |
| 3.2. Transformador ideal .....              | 110 |
| 3.3. Fuentes dependientes .....             | 110 |
| 3.4. Amplificador operacional ideal .....   | 112 |
| Problemas .....                             | 115 |

|                                   |     |
|-----------------------------------|-----|
| Soluciones de los problemas ..... | 117 |
|-----------------------------------|-----|

## Capítulo 4

### ANÁLISIS DE CIRCUITOS. CONCEPTOS BÁSICOS

|                                                             |     |
|-------------------------------------------------------------|-----|
| 1. Impedancia y admitancia operacional .....                | 127 |
| 2. Términos relativos a la topología de los circuitos ..... | 130 |
| 3. Método general de análisis de circuitos .....            | 134 |
| 4. Regla de sustitución. Equivalencia entre ramas .....     | 145 |
| Problemas .....                                             | 153 |
| Soluciones de los problemas .....                           | 157 |

## Capítulo 5

### MÉTODOS DE ANÁLISIS DE CIRCUITOS

|                                                                   |     |
|-------------------------------------------------------------------|-----|
| 1. Introducción .....                                             | 171 |
| 2. Método de análisis por nudos .....                             | 171 |
| 3. Método de análisis por mallas .....                            | 174 |
| 4. Método de análisis por conjuntos de corte básicos .....        | 179 |
| 5. Método de análisis por lazos básicos .....                     | 182 |
| 6. Modificación de la geometría de los circuitos .....            | 185 |
| 6.1 Circuito con fuente ideal de tensión entre dos nudos .....    | 185 |
| 6.2 Circuito con fuente ideal de intensidad entre dos nudos ..... | 189 |
| 7. Circuito con fuentes dependientes .....                        | 194 |
| 8. Circuito con amplificadores operacionales .....                | 197 |
| Problemas .....                                                   | 203 |
| Soluciones de los problemas .....                                 | 207 |

## Capítulo 6

### MÉTODOS AVANZADOS DE ANÁLISIS DE CIRCUITOS

|                       |     |
|-----------------------|-----|
| 1. Introducción ..... | 221 |
|-----------------------|-----|

|                                                           |     |
|-----------------------------------------------------------|-----|
| 2. Matrices de impedancias y de admitancias de rama ..... | 221 |
| 3. Matriz de incidencia nudos-ramas .....                 | 224 |
| 4. Método de análisis por nudos .....                     | 227 |
| 5. Matriz de conexión mallas-ramas .....                  | 230 |
| 6. Método de análisis por mallas .....                    | 232 |
| 7. Matriz de conexión lazos básicos-ramas .....           | 234 |
| 8. Método de análisis por lazos básicos .....             | 237 |
| 9. Método de análisis de la tabla .....                   | 239 |
| 10. Método de análisis nodal modificado .....             | 243 |
| Problemas .....                                           | 253 |
| Soluciones de los problemas .....                         | 257 |

## UNIDAD DIDÁCTICA 2

### Capítulo 7

## ASOCIACIONES DE DIPOLOS

|                                                            |     |
|------------------------------------------------------------|-----|
| 1. Asociación de dipolos .....                             | 275 |
| 2. Asociación serie .....                                  | 275 |
| 3. Asociación paralelo .....                               | 281 |
| 4. Configuración tipo puente .....                         | 286 |
| 5. Configuraciones estrella y polígono .....               | 289 |
| 5.1. Configuraciones estrella y triángulo .....            | 290 |
| 5.2. Eliminación de nudos .....                            | 293 |
| 5.3. Conversión estrella-polígono. Teorema de Rosen .....  | 295 |
| 5.4. Conversión polígono-estrella .....                    | 300 |
| 5.4.1. Caso particular: paso de triángulo a estrella ..... | 302 |
| Problemas .....                                            | 307 |
| Soluciones de los problemas .....                          | 311 |

## Capítulo 8

## TEOREMAS

|                                        |     |
|----------------------------------------|-----|
| 1. Introducción .....                  | 321 |
| 2. Teorema de superposición .....      | 321 |
| 3. Proporcionalidad .....              | 327 |
| 4. Teoremas de Thévenin y Norton ..... | 329 |
| 4.1. Teorema de Thévenin .....         | 329 |
| 4.2. Teorema de Norton .....           | 334 |
| 5. Teorema de Millman .....            | 340 |
| 6. Teorema de compensación .....       | 343 |
| 7. Teorema de reciprocidad .....       | 347 |
| 8. Teorema de Tellegen .....           | 355 |
| Problemas .....                        | 359 |
| Soluciones de los problemas .....      | 363 |

## Capítulo 9

ANÁLISIS DE CIRCUITOS EN RÉGIMEN ESTACIONARIO  
SINUSOIDAL

|                                                                                         |     |
|-----------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 1. Formas de onda periódicas .....                                                      | 377 |
| 2. Interés del estudio de circuitos con formas de onda sinusoidales .....               | 383 |
| 3. Régimen permanente y régimen transitorio .....                                       | 384 |
| 4. Régimen estacionario o permanente sinusoidal .....                                   | 387 |
| 5. Método simbólico .....                                                               | 392 |
| 6. Impedancias y admitancias de entrada de los dipolos sin fuentes independientes ..... | 398 |
| 7. Métodos de análisis .....                                                            | 404 |
| Problemas .....                                                                         | 415 |
| Soluciones de los problemas .....                                                       | 421 |

## Capítulo 10

### POTENCIA EN CIRCUITOS EN RÉGIMEN ESTACIONARIO SINUSOIDAL

|                                               |     |
|-----------------------------------------------|-----|
| 1. Potencia instantánea .....                 | 439 |
| 2. Potencia compleja. Potencia reactiva ..... | 442 |
| 3. Teorema de Boucherot .....                 | 448 |
| 4. Factor de potencia .....                   | 451 |
| 5. Medida de potencia .....                   | 459 |
| Problemas .....                               | 465 |
| Soluciones de los problemas .....             | 473 |

## Capítulo 11

### ASOCIACIONES DE DIPOLOS Y TEOREMAS EN RÉGIMEN ESTACIONARIO SINUSOIDAL

|                                                                             |     |
|-----------------------------------------------------------------------------|-----|
| 1. Introducción .....                                                       | 491 |
| 2. Asociación de dipolos .....                                              | 491 |
| 2.1. Asociaciones serie y paralelo. Divisores de tensión e intensidad ..... | 491 |
| 2.2. Configuración tipo puente .....                                        | 494 |
| 2.3. Configuraciones estrella y polígono. Teorema de Rosen .....            | 496 |
| 3. Teoremas .....                                                           | 503 |
| 3.1. Teorema de superposición .....                                         | 503 |
| 3.2. Proporcionalidad .....                                                 | 506 |
| 3.3. Teoremas de Thévenin y Norton .....                                    | 507 |
| 3.4. Generalización del teorema de Thévenin a un multipolo .....            | 512 |
| 3.5. Teorema de Millman .....                                               | 515 |
| 3.6. Teorema de compensación .....                                          | 518 |
| 3.7. Teorema de Tellegen .....                                              | 520 |
| 3.8. Teorema de reciprocidad .....                                          | 520 |
| 3.9. Teorema de la máxima transferencia de potencia .....                   | 523 |
| Problemas .....                                                             | 531 |
| Soluciones de los problemas .....                                           | 537 |

**UNIDAD DIDÁCTICA 3**

## Capítulo 12

**CIRCUITOS TRIFÁSICOS**

|                                                                       |     |
|-----------------------------------------------------------------------|-----|
| 1. Introducción .....                                                 | 551 |
| 2. Generación de un sistema trifásico de tensiones equilibradas ..... | 551 |
| 3. Conexión de fuentes en estrella y en triángulo .....               | 555 |
| 4. Análisis de un sistema estrella-estrella .....                     | 560 |
| 4.1. Análisis de un sistema estrella-estrella, equilibrado .....      | 562 |
| 5. Sistema equivalente estrella-estrella .....                        | 564 |
| 5.1. Conversión de fuentes .....                                      | 564 |
| 5.2. Conversión de cargas en sistemas a tres hilos .....              | 567 |
| 5.3. Conversión de cargas en sistemas con hilo neutro .....           | 569 |
| 6. Potencia en los sistemas trifásicos equilibrados .....             | 576 |
| 6.1. Potencia instantánea .....                                       | 579 |
| Problemas .....                                                       | 587 |
| Soluciones de los problemas .....                                     | 595 |

## Capítulo 13

**MEDIDA DE POTENCIA EN CIRCUITOS TRIFÁSICOS**

|                                                                                        |     |
|----------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 1. Introducción .....                                                                  | 607 |
| 2. Medida de potencia activa .....                                                     | 610 |
| 2.1. Circuito trifásico con hilo neutro .....                                          | 610 |
| 2.2. Circuito trifásico a tres hilos (sin hilo neutro) .....                           | 610 |
| 2.2.1. Fases accesibles .....                                                          | 610 |
| 2.2.2. Fases no accesibles .....                                                       | 611 |
| 2.2.2.1. Caso equilibrado .....                                                        | 611 |
| 2.2.2.2. Caso desequilibrado .....                                                     | 612 |
| 2.3. Método de los dos vatímetros en sistemas equilibrados .....                       | 617 |
| 3. Medida de potencia reactiva con vatímetros .....                                    | 622 |
| 3.1 Circuito equilibrado .....                                                         | 622 |
| 3.2 Circuito desequilibrado, sin hilo neutro y equilibrado en tensiones de línea ..... | 623 |

|                                               |     |
|-----------------------------------------------|-----|
| 4. Determinación del orden de secuencia ..... | 625 |
| Problemas .....                               | 629 |
| Soluciones de los problemas .....             | 635 |

## Capítulo 14

### CIRCUITOS EN RÉGIMEN TRANSITORIO. CIRCUITOS DE PRIMER ORDEN

|                                                                                               |     |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 1. Circuitos en régimen transitorio .....                                                     | 651 |
| 2. Circuitos de primer orden. Introducción .....                                              | 651 |
| 3. Circuitos de primer orden. Caso general .....                                              | 659 |
| 3.1. Obtención de la constante de tiempo .....                                                | 661 |
| 3.2. Obtención de las condiciones iniciales, $x(0^+)$ .....                                   | 662 |
| 3.3. Obtención de la solución particular, $x_p(t)$ .....                                      | 664 |
| 4. Respuesta a entrada cero y respuesta a estado inicial cero .....                           | 674 |
| 5. Circuitos de primer orden con más de un elemento almacenador de energía .....              | 680 |
| 5.1. Respuestas que contienen un impulso de tensión o de intensidad .....                     | 683 |
| 6. La función impulso como creadora de condiciones iniciales en bobinas y condensadores ..... | 698 |
| Problemas .....                                                                               | 703 |
| Soluciones de los problemas .....                                                             | 709 |

## **Capítulo 4**

### **ANÁLISIS DE CIRCUITOS. CONCEPTOS BÁSICOS**

1. Impedancia y admitancia operacional
2. Términos relativos a la topología de los circuitos
3. Método general de análisis de circuitos
4. Regla de sustitución. Equivalencia entre ramas

Problemas

Soluciones de los problemas

## 1. IMPEDANCIA Y ADMITANCIA OPERACIONAL

Las ecuaciones de los tres elementos pasivos básicos: resistencia, bobina y condensador, lineales e invariables con el tiempo, se pueden escribir de una manera más compacta si se representa el operador derivada respecto del tiempo ( $d./dt$ ) mediante la letra  $D$  y el operador integral respecto del tiempo ( $\int_{-\infty}^t .d\tau$ ) mediante  $1/D$ . Supuesto que las referencias de tensión e intensidad tienen sentidos coincidentes, se obtienen, así, las expresiones siguientes, despejada la tensión en función de la intensidad:

$$\text{Resistencia: } u = R.i \quad [4.1]$$

$$\text{Bobina: } u = L.Di \quad [4.2]$$

$$\text{Condensador: } u = \frac{1}{C} \cdot \frac{1}{D} i \quad [4.3]$$

Análogamente, si se despeja la intensidad en función de la tensión, resulta:

$$\text{Resistencia: } i = G.u \quad [4.4]$$

$$\text{Bobina: } i = \frac{1}{L} \cdot \frac{1}{D} u \quad [4.5]$$

$$\text{Condensador: } i = C.Du \quad [4.6]$$

Cuando se plantean las ecuaciones de los circuitos lineales e invariables con el tiempo en función del operador  $D$ , se obtienen expresiones a las que, en general, se pueden aplicar las reglas habituales del cálculo algebraico, considerando el operador  $D$  como un parámetro.

En general, para un dipolo constituido por elementos lineales e invariables con el tiempo, que no contiene fuentes independientes, se puede encontrar una función del operador  $D$ ,  $Z(D)$ , que aplicada sobre la intensidad del dipolo da lugar a la tensión del

dipolo. Esta función se conoce como *impedancia operacional de entrada del dipolo*. En el caso representado en la figura 4.1a se puede escribir

$$u = Z(D)i \quad [4.7]$$

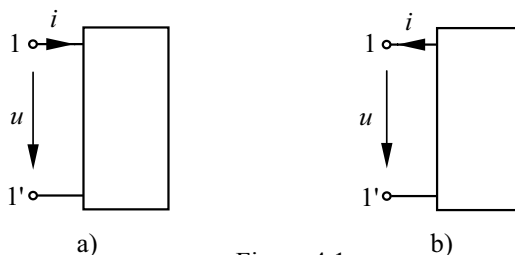


Figura 4.1

Si no hay motivo de confusión se puede indicar la impedancia operacional de entrada de un dipolo simplemente con la letra  $Z$ .

Las ecuaciones [4.1] a [4.3] permiten deducir las impedancias operacionales de los elementos básicos, considerados como dipolos elementales:

**Tabla 4.1. Impedancias operacionales de los elementos pasivos básicos**

| ELEMENTO    | IMPEDANCIA |
|-------------|------------|
| Resistencia | $R$        |
| Bobina      | $LD$       |
| Condensador | $1/(CD)$   |

Si las referencias de tensión e intensidad del dipolo tienen sentidos opuestos, como en el caso representado en la figura 4.1b, la ecuación [4.7] se convierte en

$$u = -Z(D)i \quad [4.8]$$

De esta forma se respeta la regla de los signos que se ha encontrado en los dipolos elementales, correspondientes a los elementos básicos de los circuitos.

De manera correlativa, se define como *admitancia operacional de entrada de un dipolo* la función del operador  $D$ ,  $Y(D)$ , que aplicada sobre la tensión del dipolo da lugar a la intensidad del dipolo. En el caso representado en la figura 4.1a se obtiene:

$$i = Y(D)u \quad [4.9]$$

Las ecuaciones [4.4] a [4.6] permiten deducir las admitancias operacionales de los elementos básicos, considerados como dipolos elementales:

**Tabla 4.2. Admitancias operacionales de los elementos pasivos básicos**

| ELEMENTO    | ADMITANCIA |
|-------------|------------|
| Resistencia | $G = 1/R$  |
| Bobina      | $1/(LD)$   |
| Condensador | $CD$       |

Para un mismo dipolo, la impedancia operacional,  $Z(D)$ , y la admitancia operacional,  $Y(D)$ , son funciones inversas, es decir,

$$Z(D) = 1/Y(D) \quad [4.10]$$

$$Y(D) = 1/Z(D) \quad [4.11]$$

Es importante resaltar que las funciones  $Z(D)$  e  $Y(D)$  son operadores que se aplican a las intensidades y tensiones de un circuito, respectivamente, por lo que no tiene sentido escribir, por ejemplo,  $iZ(D)$ .

Cuando se quiere hablar de ambas funciones indistintamente se utiliza el término **immitancia operacional**.

Un procedimiento para determinar la immitancia operacional de entrada de un dipolo, consiste en suponer aplicada una fuente ideal de tensión genérica  $u$  entre los terminales del mismo y calcular la intensidad  $i$  que circula a través de dicha fuente. Si se obtiene  $i$  en la forma  $g(D)u$ , la función  $g(D)$  es la admitancia operacional de entrada del dipolo. Asimismo, si se puede escribir la tensión de la fuente en la forma  $u = f(D)i$ , entonces  $f(D)$  es la impedancia operacional de entrada del dipolo.

Se puede proceder de manera análoga conectando una fuente de intensidad genérica  $i$  entre los terminales del dipolo y calcular la tensión  $u$  que aparece entre ellos. Si se obtiene  $u$  en la forma  $f(D)i$ , la función  $f(D)$  es la impedancia operacional del dipolo. Si se puede escribir la intensidad de la fuente en la forma  $i = g(D)u$ , la función  $g(D)$  es la admitancia operacional de entrada del dipolo.

#### Ejemplo 4.1

Hallar la impedancia de entrada del dipolo representado en la figura 4.2.

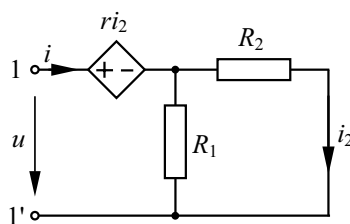


Figura 4.2

Por aplicaciones sucesivas de la segunda ley de Kirchhoff se puede escribir

$$u = ri_2 + R_2i_2 \quad [4.12]$$

$$R_1(i - i_2) = R_2i_2 \quad [4.13]$$

Si se elimina, a continuación, entre las ecuaciones [4.12] y [4.13] la variable  $i_2$ , resulta

$$u = \frac{(r + R_2)R_1}{R_1 + R_2} i$$

de donde, la impedancia operacional de entrada del dipolo es

$$Z = \frac{u}{i} = \frac{(r + R_2)R_1}{R_1 + R_2}$$

## 2. TÉRMINOS RELATIVOS A LA TOPOLOGÍA DE LOS CIRCUITOS

Con el fin de establecer un vocabulario sobre la estructura de los circuitos, necesario para desarrollar con claridad las técnicas de análisis de los mismos, se va a dar a continuación un conjunto de términos básicos y sus definiciones.

*Rama:* Subconjunto de una red, considerado como un dipolo, constituido por un elemento de circuito o por una combinación de elementos de circuito. Habitualmente, en este dipolo, se puede establecer una relación entre la intensidad y la tensión del mismo, o bien se conoce una de estas variables.

En la figura 4.3 se presentan dos tipos de rama que, como se verá más adelante, pueden servir como modelo de cualquier dipolo lineal activo, por lo que se denominan *ramas activas normalizadas*.

En la figura 4.3a la rama está formada por una fuente ideal de tensión en serie con una impedancia y constituye un modelo de *fuentes real de tensión* más general que el utilizado anteriormente, en el que el elemento conectado en serie con la fuente independiente era una resistencia. En la figura 4.3b la rama, formada por una fuente ideal de intensidad en paralelo con una admitancia, constituye un modelo general de *fuentes real de intensidad*.

Para las referencias adoptadas, la ecuación de la fuente real de tensión es

$$u = -Z(D)i + u_s \quad [4.14]$$

y, para la fuente real de intensidad,

$$i = -Y(D)u + i_s \quad [4.15]$$

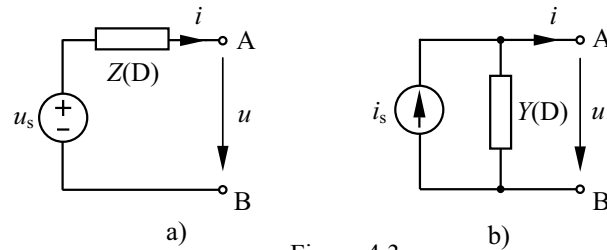


Figura 4.3

**Nudo:** Cada uno de los terminales de una rama; por ejemplo, los terminales A y B de las ramas de la figura 4.3. Si dos o más ramas están conectadas entre sí, los terminales comunes se representan por un único nudo.

**Gráfico reticular (grafo de una red):** Representación esquemática de un circuito en la que las ramas se representan por segmentos de líneas (rectos o curvos) y los nudos por puntos.

**Gráfico reticular orientado:** Gráfico reticular en el que se indican mediante flechas las referencias de tensión e intensidad de las ramas. Habitualmente se toma un sentido coincidente para ambas referencias, por lo que sólo es necesario dibujar una flecha en el trazo que representa a cada una de las ramas del circuito.

En la figura 4.4 se representa el gráfico reticular orientado de un circuito que tiene 6 ramas y 4 nudos.

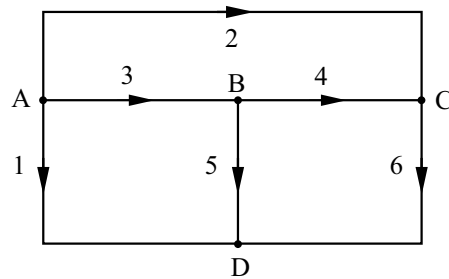


Figura 4.4

**Gráfico reticular conexo (Circuito conexo):** Gráfico reticular (Circuito) en el que se puede ir de un nudo a cualquier otro por un camino continuo constituido solamente por ramas del mismo.

La presencia, por ejemplo, de bobinas acopladas magnéticamente, transformadores ideales o fuentes dependientes, puede dar lugar a circuitos no conexos.

**Lazo:** Conjunto de ramas que forman una línea cerrada que no atraviesa más de una vez un mismo nudo.

De manera más precisa: Para un gráfico dado, un lazo es un subgráfico que cumple con las dos condiciones siguientes:

1. El subgráfico es conexo.
2. En cada nudo del subgráfico inciden dos ramas del mismo.

En el gráfico reticular orientado de la figura 4.4, los conjuntos de ramas  $\{1,2,6\}$ , y  $\{2,3,5,6\}$  son ejemplos de lazos.

*Conjunto de corte:* Conjunto de ramas de un gráfico conexo que cumple las siguientes condiciones:

1. La eliminación del conjunto de ramas (pero no de sus nudos terminales) da lugar a un subgráfico no conexo.
2. Una vez eliminadas todas las ramas del conjunto, la reposición de una cualquiera de ellas da lugar, de nuevo, a un subgráfico conexo.

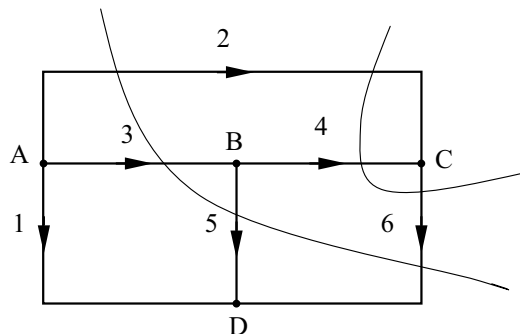


Figura 4.5

La definición dada para conjunto de corte implica que, el subgráfico no conexo que resulta al eliminar las ramas del conjunto de corte está formado por dos gráficos conexos (se incluye en esta categoría el caso de un nudo aislado) sin ninguna unión entre sí y que cualquiera de las ramas del conjunto de corte constituye una unión entre esos dos gráficos. Por tanto, es posible imaginar una superficie cerrada que, al atravesar a las ramas del conjunto de corte, encierre a cualquiera de esos dos gráficos. Es decir, *a las ramas de un conjunto de corte se les puede aplicar la primera ley de Kirchhoff generalizada*.

En el gráfico conexo de la figura 4.5 los conjuntos de ramas  $\{2,3,5,6\}$  y  $\{2,4,6\}$  son ejemplos de conjuntos de corte.

*Árbol* (de un gráfico conexo): Un subgráfico conexo que

1. Contiene a todos los nudos del gráfico.

## 2. No tiene lazos.

Para obtener un árbol de un gráfico que tiene  $n$  nudos, se parte de un nudo y se pasa a uno de los restantes que estén conectados con él, añadiendo al árbol la rama que establece la conexión. A continuación, se repite la operación alcanzando un nudo nuevo a partir de uno de los que ya forman parte del árbol, con lo que se añade, a su vez, una nueva rama y, así, sucesivamente. Al final, cuando el árbol contiene todos los nudos, el número de sus ramas será  $(n - 1)$ . Es más, se puede afirmar que si pueden elegirse  $(n - 1)$  ramas que no formen lazos, constituirán un árbol

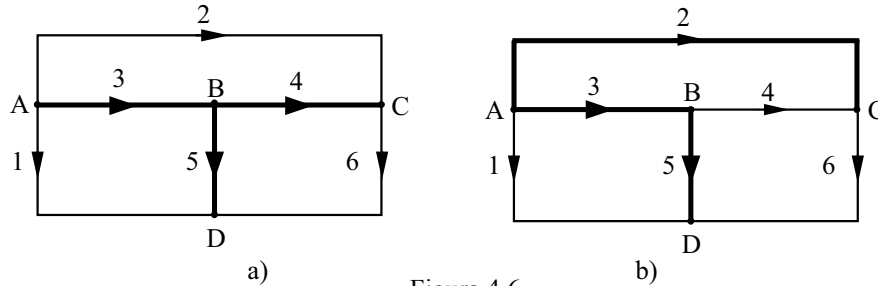


Figura 4.6

En un mismo gráfico es posible encontrar varios árboles. En la figura 4.6 se representan dos árboles posibles para el gráfico reticular de la figura 4.4, indicando con un trazo más grueso las ramas que forman parte del árbol.

**Coárbol:** Elegido un árbol, conjunto de las ramas de un circuito que no pertenecen al árbol.

**Eslabón:** Rama de un coárbol.

El número de eslabones, en un circuito de  $r$  ramas y  $n$  nudos, será:  $r - (n - 1)$ .

En la figura 4.6a son eslabones las ramas  $\{1, 2, 6\}$  y en la figura 4.6b las ramas  $\{1, 4, 6\}$ .

**Lazo básico:** Una vez que se ha definido un árbol en un circuito, un lazo que contiene un sólo eslabón.

De acuerdo con la definición, cada lazo básico va asociado a un eslabón y, por tanto, el número de lazos básicos de un circuito coincide con el número de eslabones:  $r - (n - 1)$ .

En la figura 4.6b son lazos básicos los siguientes: Asociado al eslabón 1, el lazo constituido por las ramas  $\{1, 3, 5\}$ ; asociado al eslabón 4, el lazo formado por las ramas  $\{2, 3, 4\}$ ; asociado al eslabón 6, el lazo formado por las ramas  $\{2, 3, 5, 6\}$ .

**Conjunto de corte básico:** Una vez que se ha definido un árbol en un circuito, un conjunto de corte que contiene una sola rama del árbol.

Como ocurre con el lazo básico, ahora cada conjunto de corte básico va asociado a la rama del árbol que contiene y, por tanto, el número de conjuntos de corte básicos de un circuito coincide con el número de ramas del árbol:  $n - 1$ .

En la figura 4.6b son conjuntos de corte básicos los siguientes: Asociado a la rama 2 del árbol, el conjunto de corte formado por las ramas  $\{2,4,6\}$ ; asociado a la rama 3 del árbol, el conjunto de corte formado por las ramas  $\{1,3,4,6\}$ ; asociado a la rama 5 del árbol, el conjunto de corte formado por las ramas  $\{1,5,6\}$ .

*Circuito plano:* Circuito que puede representarse en un plano sin que las ramas se crucen nada más que en los nudos.

*Malla:* En un circuito plano, lazo que no contiene ningún otro en su interior.

Se demuestra que el número de mallas de un circuito plano es igual al de lazos básicos:  $r - (n - 1)$ .

En el circuito de la figura 4.4 son mallas los lazos formados por las ramas  $\{2,3,4\}$ ,  $\{1,3,5\}$ ,  $\{4,5,6\}$ .

### 3. MÉTODO GENERAL DE ANÁLISIS DE CIRCUITOS

Dado el gráfico del circuito, las ecuaciones características de sus ramas y las excitaciones, analizar un circuito consiste en determinar las tensiones e intensidades de las ramas del mismo. Esto significa que, en un circuito de  $r$  ramas, hay que determinar  $2r$  variables.

Se dispone de tres grupos de ecuaciones:

1. *Ecuaciones de las ramas.*
2. Ecuaciones obtenidas por aplicación de la 1ª ley de Kirchhoff, que se conocen como *ecuaciones nodales*.
3. Ecuaciones obtenidas por aplicación de la 2ª ley de Kirchhoff, que se conocen como *ecuaciones circulares*.

Se trata de obtener un sistema de  $2r$  ecuaciones, tantas como incógnitas, con la condición de que sean linealmente independientes, para que el sistema sea compatible y determinado, lo que obliga a una selección adecuada de las mismas.

En primer lugar, las ecuaciones de un grupo son independientes de las ecuaciones de los otros dos. Por ejemplo, no hay posibilidad de obtener una ecuación nodal, que es un sumatorio de intensidades, a partir de ecuaciones circulares, que son sumatorios de tensiones, ni a partir de las ecuaciones de rama, que son ecuaciones entre tensiones e intensidades en las que aparecen los parámetros de los componentes del circuito.

Asimismo, las ecuaciones de rama son independientes entre sí, ya que cada ecuación va asociada a una rama, con las variables y los parámetros de esta rama, y no puede obtenerse como combinación lineal de otras ecuaciones en las que intervienen otras variables y otros parámetros. ***Se dispone, por tanto, de  $r$  ecuaciones de rama linealmente independientes.***

Las ecuaciones nodales pueden obtenerse aplicando la 1ª ley de Kirchhoff a nudos o a conjuntos de corte del circuito. Se demuestra que ***si, en un circuito de  $n$  nudos, se aplica la 1ª ley de Kirchhoff a  $(n - 1)$  nudos cualesquiera de ellos, las ecuaciones nodales que resultan son linealmente independientes.*** Se tiene, así, un procedimiento para obtener un grupo de ecuaciones nodales linealmente independientes que se conoce como *método de los nudos*.

#### Ejemplo 4.2

Escribir las ecuaciones nodales para un circuito cuyo gráfico reticular se representa en la figura 4.7, seleccionadas por el método de los nudos

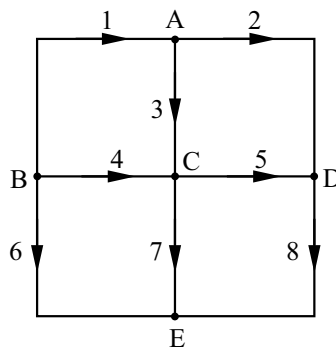


Figura 4.7

El circuito tiene 5 nudos. Si se prescinde de uno de ellos, por ejemplo el D, las ecuaciones nodales correspondientes a los otros cuatro nudos, considerando las intensidades como salientes de los mismos, son

$$\begin{aligned}\text{Nudo A: } & -i_1 + i_2 + i_3 = 0 \\ \text{Nudo B: } & i_1 + i_4 + i_6 = 0 \\ \text{Nudo C: } & -i_3 - i_4 + i_5 + i_7 = 0 \\ \text{Nudo E: } & -i_6 - i_7 - i_8 = 0\end{aligned}$$

Asimismo, ***si se aplica la 1ª ley de Kirchhoff a los conjuntos de corte básicos de un circuito (correspondientes a un mismo árbol), se obtienen  $(n - 1)$  ecuaciones nodales que son linealmente independientes.*** Este procedimiento de selección se conoce como *método de los conjuntos de corte básicos*.

## Ejemplo 4.3

Escribir las ecuaciones nodales para un circuito cuyo gráfico reticular se representa en la figura 4.7, seleccionadas por el método de los conjuntos de corte básicos. Se tomará el árbol formado por las ramas 1,4,7 y 8.

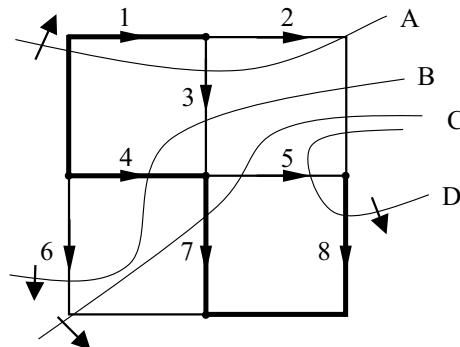


Figura 4.8

En la figura 4.8 se han destacado más gruesas las líneas correspondientes a las ramas del árbol. Asimismo, se han dibujado las líneas divisorias que permiten identificar las ramas pertenecientes a cada uno de los conjuntos de corte básicos.

El circuito tiene 4 conjuntos de corte básicos. Al escribir la ecuación nodal de cada conjunto de corte básico se van a considerar las intensidades de sus ramas atravesando la línea divisoria correspondiente en el mismo sentido en que lo hace la referencia de la rama del árbol que define al conjunto de corte. Este sentido se conoce como *sentido de corte* y se ha indicado con una flecha mas gruesa que atraviesa la línea divisoria del conjunto de corte básico correspondiente. Las ecuaciones que se obtienen son las siguientes:

$$\text{Conjunto de corte A: } i_1 - i_2 - i_3 = 0$$

$$\text{Conjunto de corte B: } i_4 + i_2 + i_3 + i_6 = 0$$

$$\text{Conjunto de corte C: } i_7 + i_2 + i_5 + i_6 = 0$$

$$\text{Conjunto de corte D: } i_8 - i_2 - i_5 = 0$$

Cada conjunto de corte básico contiene una sola rama del árbol y, por tanto, la intensidad de esta rama aparece solamente en la ecuación del conjunto de corte básico correspondiente, con lo que esta ecuación no puede obtenerse mediante combinación lineal de las restantes.

Las ecuaciones circulares pueden obtenerse aplicando la 2ª ley de Kirchhoff a lazos o a mallas del circuito (esto último sólo en circuitos planos). Se demuestra que **si se aplica la 2ª ley de Kirchhoff a las  $r - (n - 1)$  mallas de un circuito plano, las ecuaciones circulares que resultan son linealmente independientes**. Este puede ser un procedimiento para obtener un grupo de ecuaciones circulares linealmente independientes, que recibe el nombre de *método de las mallas*.

*Ejemplo 4.4*

Escribir las ecuaciones circulares, para un circuito cuyo gráfico reticular se representa en la figura 4.7, seleccionadas por el método de las mallas.

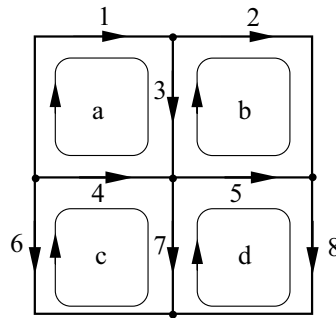


Figura 4.9

Se trata de un circuito plano que tiene 4 mallas. En la figura 4.9 se ha dibujado, de nuevo, el gráfico reticular en el que se ha marcado un sentido de circulación para cada una de las mallas. Si se aplica la 2ª ley de Kirchhoff a cada una de las mallas, siguiendo el sentido de circulación, se obtienen las ecuaciones siguientes:

$$\text{Malla a: } u_1 + u_3 - u_4 = 0$$

$$\text{Malla b: } u_2 - u_5 - u_3 = 0$$

$$\text{Malla c: } u_4 + u_7 - u_6 = 0$$

$$\text{Malla d: } u_5 + u_8 - u_7 = 0$$

Como alternativa, *si se aplica la 2ª ley de Kirchhoff a los lazos básicos de un circuito (correspondientes a un mismo árbol), se obtienen  $r-(n-1)$  ecuaciones circulares que son linealmente independientes*. Este procedimiento recibe el nombre de *método de los lazos básicos*.

*Ejemplo 4.5*

Escribir las ecuaciones circulares, para un circuito cuyo gráfico reticular se representa en la figura 4.7, seleccionadas por el método de los lazos básicos. Se tomará como árbol el formado por las ramas 1, 4, 7 y 8.

El circuito tiene como eslabones las ramas 2, 3, 5 y 6, que definen los lazos básicos correspondientes a, b, c y d mostrados en la figura 4.10.

Las ecuaciones circulares de los 4 lazos básicos son las siguientes:

$$\text{Lazo a: } u_2 + u_8 - u_7 - u_4 + u_1 = 0$$

$$\text{Lazo b: } u_3 - u_4 + u_1 = 0$$

$$\text{Lazo c: } u_5 + u_8 - u_7 = 0$$

$$\text{Lazo d: } u_6 - u_7 - u_4 = 0$$

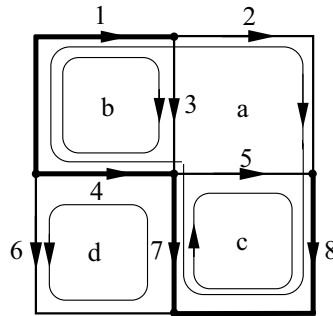


Figura 4.10

Se ha puesto en primer lugar, en la ecuación de cada lazo básico, la tensión del eslabón que define al lazo básico. Para cada lazo básico, se ha considerado el sentido de referencia del eslabón coincidente con el sentido de circulación del lazo básico correspondiente.

Cada lazo básico contiene un solo eslabón y, por tanto, la tensión de esta rama aparece solamente en la ecuación del lazo básico correspondiente, con lo que esta ecuación no puede obtenerse mediante combinación lineal de las restantes.

Como *resumen*, puede verse que se dispone del siguiente número de ecuaciones linealmente independientes:

$r$  ecuaciones de rama

$n - 1$  ecuaciones nodales (nudos o conjuntos de corte básicos)

$r - n + 1$  ecuaciones circulares (mallas o lazos básicos)

que hacen un total de  $2r$  ecuaciones linealmente independientes que permiten determinar las  $2r$  variables de rama.

#### Ejemplo 4.6

Escribir las ecuaciones correspondientes al método general de análisis aplicado al circuito de la figura 4.11a. Obtener las ecuaciones circulares por el método de las mallas y las nodales por el método de los nudos.

En la figura 4.11b se representa el gráfico reticular orientado correspondiente al circuito en estudio, en el que se han indicado las mallas del mismo.

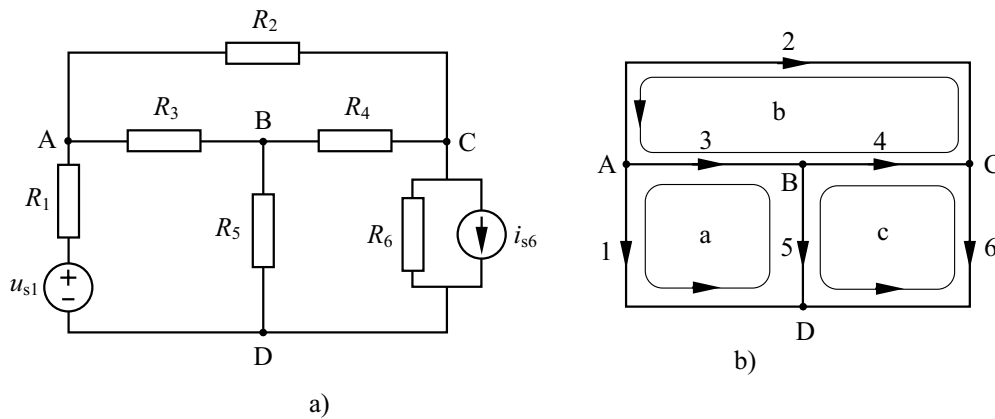


Figura 4.11

Ecuaciones de rama:

$$\begin{aligned}
 \text{Rama 1:} \quad & u_1 = R_1 i_1 + u_{s1} \\
 \text{Rama 2:} \quad & u_2 = R_2 i_2 \\
 \text{Rama 3:} \quad & u_3 = R_3 i_3 \\
 \text{Rama 4:} \quad & u_4 = R_4 i_4 \\
 \text{Rama 5:} \quad & u_5 = R_5 i_5 \\
 \text{Rama 6:} \quad & u_6 = R_6 (i_6 - i_{s6})
 \end{aligned}$$

Ecuaciones circulares:

$$\begin{aligned}
 \text{Malla a:} \quad & u_1 - u_5 - u_3 = 0 \\
 \text{Malla b:} \quad & -u_2 + u_3 + u_4 = 0 \\
 \text{Malla c:} \quad & -u_4 + u_5 - u_6 = 0
 \end{aligned}$$

Ecuaciones nodales:

$$\begin{aligned}
 \text{Nudo A:} \quad & i_1 + i_2 + i_3 = 0 \\
 \text{Nudo B:} \quad & -i_3 + i_4 + i_5 = 0 \\
 \text{Nudo C:} \quad & -i_2 - i_4 + i_6 = 0
 \end{aligned}$$

#### Ejemplo 4.7

Escribir las ecuaciones correspondientes al método general de análisis aplicado al circuito de la figura 4.11a. Obtener las ecuaciones circulares por el método de lazos básicos y las nodales por el método de los conjuntos de corte básicos, tomando como gráfico reticular orientado y como árbol los indicados en la figura 4.12.

En la figura 4.12a se han indicado los lazos básicos correspondientes al árbol seleccionado. Asimismo, en la figura 4.12b se han representado las líneas divisorias que definen los conjuntos de corte básicos correspondientes a dicho árbol.

Las ecuaciones de rama son las ya escritas en el ejemplo 4.6, puesto que se trata del mismo circuito y se ha tomado el mismo gráfico reticular orientado.

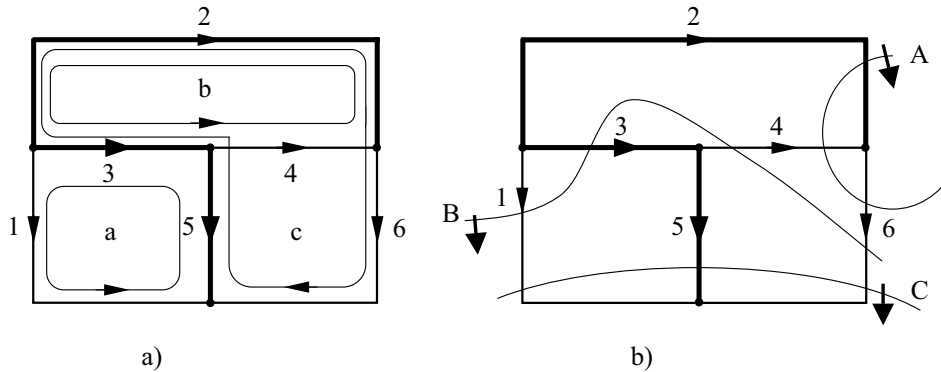


Figura 4.12

Ecuaciones circulares:

Lazo básico a:  $u_1 - u_5 - u_3 = 0$

Lazo básico b:  $u_4 - u_2 + u_3 = 0$

Lazo básico c:  $u_6 - u_5 - u_3 + u_2 = 0$

Ecuaciones nodales:

Conj. de corte básico A:  $i_2 + i_4 - i_6 = 0$

Conj. de corte básico B:  $i_3 + i_1 - i_4 + i_6 = 0$

Conj. de corte básico C:  $i_5 + i_1 + i_6 = 0$

El método de análisis descrito tiene como ventaja su generalidad, ya que puede aplicarse a cualquier circuito, siendo su inconveniente el gran tamaño de los sistemas de ecuaciones que resultan, incluso en circuitos pequeños.

Hasta aquí se ha considerado que cada rama aporta dos variables (de rama) y una ecuación que relaciona ambas. Queda un grado de libertad por cada rama que se compensa con las  $r$  ecuaciones nodales y circulares, obteniéndose al final un sistema de  $2r$  ecuaciones con  $2r$  incógnitas, como ya se ha dicho.

En ocasiones la ecuación de rama define una de las variables de rama, como en el caso de las fuentes ideales. De nuevo queda un grado de libertad que es la variable no definida por la ecuación de rama.

En el caso de cuadripolos se tienen dos parejas de terminales, cada una asociada a una de las puertas del cuadripolo. En el gráfico reticular cada puerta se representa como una rama, es decir, se tiene un conjunto de dos ramas con un total de dos grados de libertad, tantos como ramas. Así, para las bobinas acopladas y el transformador ideal se tienen dos

relaciones entre tensiones e intensidades, para las fuentes dependientes se tiene una sola relación, pero se conoce una variable de la rama sobre la que se establece la dependencia (circuito abierto o cortocircuito) y para el amplificador operacional ideal se conocen los dos valores de las variables de la rama de entrada pero se desconocen las dos variables de la rama de salida.

#### Ejemplo 4.8

Aplicar el método de análisis general al circuito de la figura 4.13a (ya estudiado en el ejemplo 3.6) seleccionando las ecuaciones nodales por el método de los nudos y las circulares por el método de las mallas.

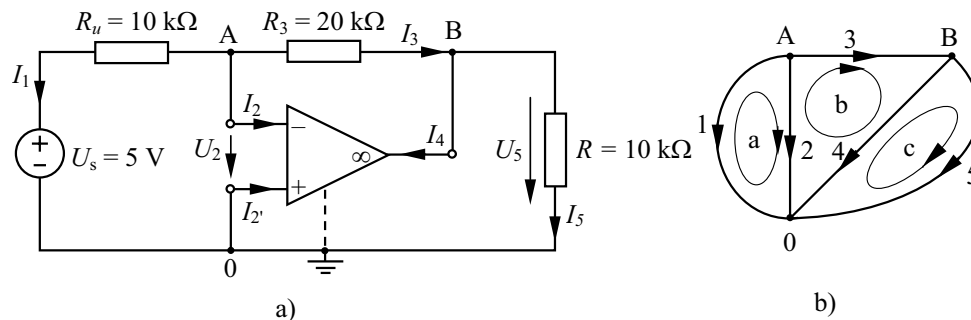


Figura 4.13

En la figura 4.13a se ha indicado la conexión a masa de uno de los terminales de la puerta de salida del amplificador operacional que, habitualmente, no se representa. En la figura 4.13b se muestra el diagrama reticular orientado del circuito, en el que se han señalado las mallas del mismo.

Las ecuaciones que resultan al aplicar el método general de análisis son las siguientes:

Ecuaciones de rama:

Rama 1:  $U_1 = 10 \cdot 10^3 \cdot I_1 + 5$

Rama 2:  $U_2 = 0$

$I_2 = 0$

Rama 3:  $U_3 = 20 \cdot 10^3 \cdot I_3$

Rama 4: No hay ecuación de rama. Las dos variables de rama quedan indeterminadas

Rama 5:  $U_5 = 10 \cdot 10^3 \cdot I_5$

Ecuaciones nodales (seleccionadas por el método de los nudos):

Nudo A:  $I_1 + I_2 + I_3 = 0$

Nudo B:  $-I_3 + I_4 + I_5 = 0$

Ecuaciones circulares (seleccionadas por el método de las mallas):

Malla a:  $-U_1 + U_2 = 0$

$$\text{Malla b:} \quad -U_2 + U_3 + U_4 = 0$$

$$\text{Malla c:} \quad -U_4 + U_5 = 0$$

Se tiene, así, un sistema de 10 ecuaciones con 10 incógnitas (2r ecuaciones).

Si se sustituyen las ecuaciones de rama en las ecuaciones nodales o circulares, según la variable que ha quedado despejada, resulta el sistema de ecuaciones siguiente

$$\text{Nudo A:} \quad I_1 + I_3 = 0$$

$$\text{Nudo B:} \quad -I_3 + I_4 + I_5 = 0$$

$$\text{Malla a:} \quad -10 \cdot 10^3 \cdot I_1 - 5 = 0$$

$$\text{Malla b:} \quad 20 \cdot 10^3 \cdot I_3 + U_4 = 0$$

$$\text{Malla c:} \quad -U_4 + 10 \cdot 10^3 \cdot I_5 = 0$$

Una vez resuelto este sistema de 5 ecuaciones se obtiene

$$I_1 = -0,5 \text{ mA}; \quad I_3 = 0,5 \text{ mA}; \quad I_4 = 1,5 \text{ mA}; \quad U_4 = -10 \text{ V}; \quad I_5 = -1 \text{ mA}.$$

Este resultado coincide con el obtenido, de forma más directa pero menos sistemática, en el ejemplo 3.6.

Sustituidas las ecuaciones de rama en las ecuaciones circulares y/o nodales el sistema queda reducido a uno de r ecuaciones con r incógnitas.

#### *Ejemplo 4.9*

En el circuito de la figura 4.11 escribir las ecuaciones circulares en función de las intensidades de rama.

En este caso se pueden expresar las tensiones en las resistencias en función de las intensidades, mediante las ecuaciones de rama correspondientes, con lo que resulta

$$\text{Malla a:} \quad R_1 i_1 + u_{s1} - R_5 i_5 - R_3 i_3 = 0$$

$$\text{Malla b:} \quad -R_2 i_2 + R_3 i_3 + R_4 i_4 = 0$$

$$\text{Malla c:} \quad -R_4 i_4 + R_5 i_5 - R_6 (i_6 - i_{s6}) = 0$$

Si se añaden a éstas las ecuaciones nodales del circuito se tiene un sistema de 6 ecuaciones, linealmente independientes, con 6 incógnitas (igual al número de ramas).

Cuando se analiza un circuito de tipo resistivo, se obtiene un sistema de ecuaciones algebraico. Si el circuito tiene, además, bobinas y/o condensadores, las ecuaciones de estas ramas introducen el operador D, con lo que se obtiene al final un sistema de ecuaciones algebraico-integrodiferenciales.

*Ejemplo 4.10*

En el circuito de la figura 4.14a se pide:

- Escribir las ecuaciones que resultan al analizar el circuito, sustituyendo en las ecuaciones circulares las tensiones de rama en función de las intensidades de rama, si ello es posible. Se tomará el gráfico reticular mostrado en la figura 4.14b.
- Hallar las variables de rama si las fuentes de tensión  $u_{s1}$  y  $u_{s2}$  valen permanentemente 10 V y 5 V, respectivamente. Suponer que todas las variables de rama son constantes.

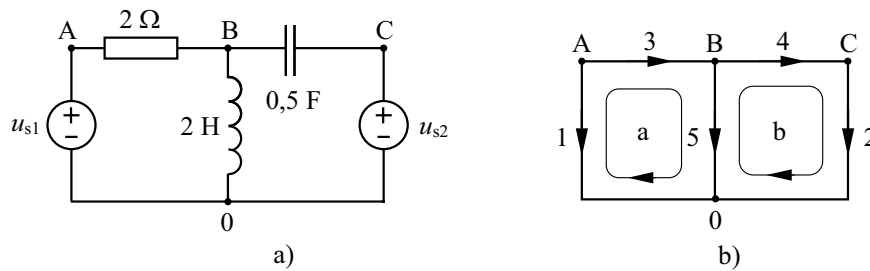


Figura 4.14

- a) Las ecuaciones que se obtienen son las siguientes:

Ecuaciones circulares (seleccionadas por el método de las mallas):

$$\text{Malla a:} \quad -u_{s1} + 2i_3 + 2Di_5 = 0 \quad [4.16]$$

$$\text{Malla b:} \quad u_{s2} - 2Di_5 + \frac{1}{0,5D}i_4 = 0$$

Ecuaciones nodales (seleccionadas por el método de los nudos):

$$\begin{aligned} \text{Nudo A:} \quad & i_1 + i_3 = 0 \\ \text{Nudo B:} \quad & -i_3 + i_4 + i_5 = 0 \\ \text{Nudo C:} \quad & i_2 - i_4 = 0 \end{aligned} \quad [4.17]$$

Si se despeja  $i_3$  de la ecuación [4.17] y se sustituye en la ecuación [4.16], resulta

$$u_{s1} = 2i_4 + 2(D + 1)i_5 \quad [4.18]$$

que con la ecuación de la malla b

$$Du_{s2} = -2i_4 + 2D^2i_5 \quad [4.19]$$

constituye un sistema de ecuaciones diferenciales. Para resolver este sistema deben de conocerse las condiciones iniciales, que pueden determinarse, como se verá más adelante,

a partir de los valores de la intensidad por la bobina y la tensión en el condensador en el instante inicial.

b) Aunque las fuentes de excitación sean constantes, la solución de las ecuaciones diferenciales anteriores conduce a unas tensiones e intensidades por las ramas que dependen del tiempo. Si al cabo de un cierto tiempo todas las variables de rama se estabilizan en valores constantes, se dice que es un circuito de corriente continua en el que se ha establecido el régimen permanente. En esa situación, en las ecuaciones diferenciales el operador  $D$  queda aplicado a constantes, con lo que el resultado es cero (derivada respecto del tiempo de una constante) y las ecuaciones [4.18] y [4.19] se convierten en las siguientes

$$10 = 2I_4 + 2I_5 \quad [4.20]$$

$$0 = -2I_4 \quad [4.21]$$

En las ecuaciones [4.20] y [4.21] se han utilizado letras mayúsculas para las intensidades con el fin de destacar su valor constante de régimen permanente.

Se obtiene, por tanto,

$$I_4 = 0 \text{ A}; I_5 = 5 \text{ A}$$

y, de aquí, resulta

$$I_1 = -5 \text{ A}$$

$$I_2 = 0 \text{ A}$$

$$I_3 = 5 \text{ A}$$

Se puede llegar a este mismo resultado si se tiene en cuenta lo siguiente:

- a) Si la intensidad por la bobina es constante, la tensión entre sus terminales es nula, es decir, *en corriente continua, cuando se alcanza el régimen permanente, una bobina se comporta como un cortocircuito.*
- b) Si la tensión en un condensador es constante, la intensidad por el mismo es nula, es decir, *en corriente continua, cuando se alcanza el régimen permanente, un condensador se comporta como un circuito abierto.*

El circuito de la figura 4.14a se convierte, para un régimen permanente de continua, en el mostrado en la figura 4.15. En este circuito, por simple inspección, se obtienen los valores anteriores.

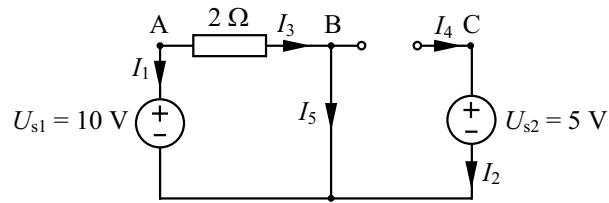


Figura 4.15

Finalmente, las tensiones de rama resultan

$$U_1 = U_{s1} = 10 \text{ V}$$

$$U_2 = U_{s2} = 5 \text{ V}$$

$$U_3 = 2I_3 = 10 \text{ V}$$

$$U_4 = U_5 - U_{s2} = -5 \text{ V}$$

$$U_5 = 0 \text{ V}$$

#### 4. REGLA DE SUSTITUCIÓN. EQUIVALENCIA ENTRE RAMAS

La *regla de sustitución* establece que *dos ramas pueden sustituirse entre sí, sin que el resto del circuito se vea afectado, cuando ambas tienen la misma ecuación de rama*. Se dice, entonces, que ambas *ramas son equivalentes* entre sí. Esta equivalencia se refiere al resto del circuito ya que, al aportar ambas ramas la misma ecuación, el sistema de ecuaciones que se escribe para analizar el circuito es el mismo, así como su resultado.

Se pueden dar varios ejemplos de aplicación de la regla de sustitución. Así, al estudiar los elementos ideales de los circuitos se ha indicado que un cortocircuito, resistencia nula, es equivalente a una fuente de tensión nula y que un circuito abierto, conductancia nula, es equivalente a una fuente de intensidad nula.

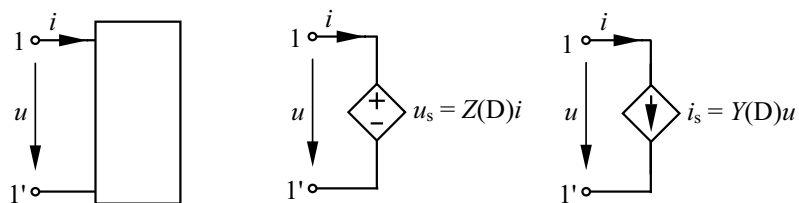


Figura 4.16

También, un dipolo que se puede definir mediante su impedancia operacional o su admitancia operacional, puede representarse por una fuente de intensidad o una fuente de tensión dependientes, siempre que la ecuación de rama sea la misma, tal como se muestra en la figura 4.16

Otro caso interesante es la sustitución de un condensador, que tiene una tensión  $U_0$  en un instante  $t = 0$ , por otro que tiene una tensión nula en ese instante y al que se añade en serie una fuente de tensión de valor  $U_0$ , como se muestra en la figura 4.17. En ambos casos se cumple la ecuación

$$u(t) = u(0) + \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau = U_0 + \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau = U_0 + u'(t) \quad [4.22]$$

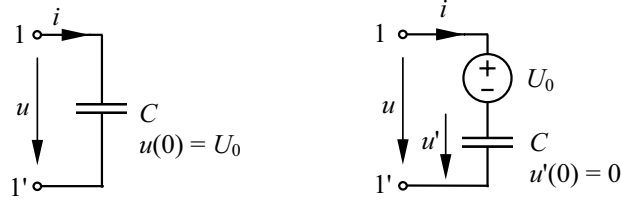


Figura 4.17

La ecuación [4.22] pone de manifiesto la importancia de conocer la tensión en el condensador en un instante determinado para analizar su comportamiento a partir de ese instante. Por eso, en la rama del condensador, además del valor de la capacidad,  $C$ , se incluye la información de que  $u(0) = U_0$  y en la rama equivalente se indica que  $u'(0) = 0$ .

De la misma forma, una bobina, por la que circula una determinada intensidad  $I_0$  en  $t = 0$ , puede sustituirse por una bobina con intensidad nula en ese instante y a la que se añade en paralelo una fuente de intensidad de valor  $I_0$ , como se muestra en la figura 4.18. En ambas ramas se cumple la ecuación siguiente

$$i(t) = i(0) + \frac{1}{L} \int_0^t u(\tau) d\tau = I_0 + \frac{1}{L} \int_0^t u(\tau) d\tau = I_0 + i'(t) \quad [4.23]$$

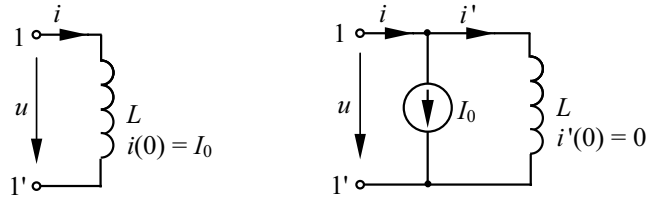


Figura 4.18

La ecuación [4.23] pone de manifiesto la importancia de conocer la intensidad en la bobina en un instante determinado para analizar su comportamiento a partir de ese instante. Por eso, en la rama de la bobina, además del valor de la inductancia,  $L$ , se incluye la información de que  $i(0) = I_0$  y en la rama equivalente se indica que  $i'(0) = 0$ .

Es interesante observar que si en un circuito lineal no hay fuentes independientes de excitación y los elementos almacenadores de energía están inicialmente descargados, todas las variables de rama son nulas ya que el sistema de ecuaciones algebraico-diferenciales resultante es homogéneo y con condiciones iniciales nulas (la tensión inicial en un condensador descargado es cero y la intensidad inicial en una bobina descargada es cero)

#### Ejemplo 4.11

Escribir las ecuaciones que resultan al analizar el circuito de la figura 4.19a, con el gráfico reticular orientado de la figura 4.19b.

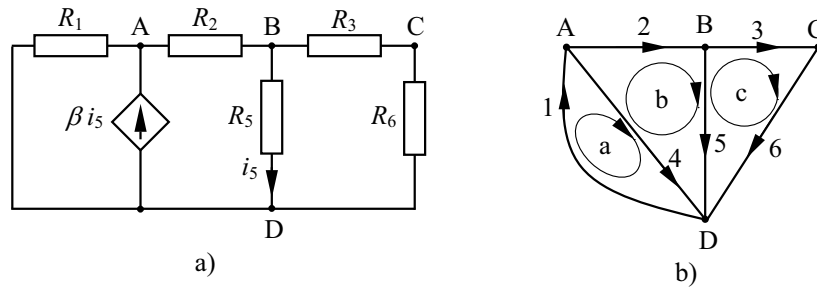


Figura 4.19

Las ecuaciones que se obtienen, después de sustituir en las ecuaciones circulares las tensiones de rama en función de las intensidades de rama, allí donde es posible, son las siguientes

Ecuaciones circulares (método de las mallas):

$$\begin{aligned}\text{Malla a:} & R_1 i_1 + u_4 = 0 \\ \text{Malla b:} & -u_4 + R_2 i_2 + R_5 i_5 = 0 \\ \text{Malla c:} & -R_5 i_5 + R_3 i_3 + R_6 i_6 = 0\end{aligned}$$

Ecuaciones nodales (método de los nudos):

$$\begin{aligned}\text{Nudo A:} & -i_1 - \beta i_5 + i_2 = 0 \\ \text{Nudo B:} & -i_2 + i_5 + i_3 = 0 \\ \text{Nudo C:} & -i_3 + i_6 = 0\end{aligned}$$

Se tiene un sistema *homogéneo* de 6 ecuaciones algebraicas, al ser un circuito resistivo, linealmente independientes, con 6 incógnitas  $\{i_1, i_2, i_3, u_4, i_5, i_6\}$ . Como solución de este sistema se obtienen valores nulos para todas las incógnitas.

Otro caso interesante de equivalencia entre ramas se deduce al aplicar la regla de sustitución a las ramas activas normalizadas de la figura 4.3. De la ecuación [4.15] se obtiene

$$u = -(1/Y(D))i + (1/Y(D))i_s \quad [4.24]$$

Comparando las ecuaciones [4.14] y [4.24] se deducen las siguientes condiciones para que ambas ramas sean equivalentes:

$$Z(D) = 1/Y(D) \quad [4.25]$$

$$u_s = Z(D)i_s \quad [4.26]$$

La ecuación [4.25] indica que los dipolos que resultan de eliminar la fuente ideal de ambas ramas son, asimismo, equivalentes, pudiendo ser el mismo.

Como se probará más adelante, la relación entre la tensión y la intensidad de cualquier dipolo constituido por elementos lineales es de la forma [4.14] o [4.15], por lo que *cualquier dipolo lineal puede sustituirse por una de las ramas normalizadas* de la figura 4.3. En algún caso, uno de los elementos de la rama normalizada equivalente puede resultar nulo e incluso los dos, como en los casos extremos de cortocircuito y circuito abierto. (Véase el problema P4.1)

Es importante observar que la ecuación [4.26], que relaciona los valores de las fuentes ideales de tensión e intensidad, corresponde a unas referencias de polaridad determinadas de estas fuentes: el terminal que tiene el signo (+) en la fuente de tensión es hacia el que apunta la flecha en la fuente de intensidad. Un cambio de una de estas referencias obliga a introducir un signo (–) en la ecuación [4.26].

#### Ejemplo 4.12

Comprobar la equivalencia de las fuentes representadas en la figura 4.20.

La ecuación de la rama de la figura 4.20a se obtiene mediante la 2ª ley de Kirchhoff

$$u = 6 - 2i$$

La ecuación de la rama de la figura 4.20b se obtiene mediante la 1ª ley de Kirchhoff

$$i = 3 - u/2$$

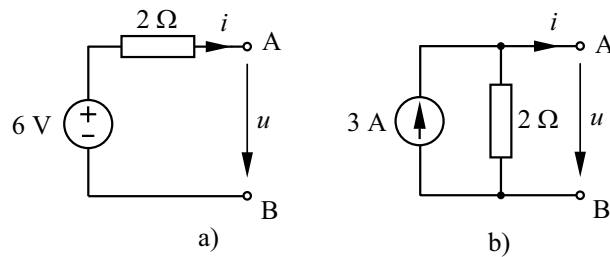


Figura 4.20

Como puede verse, las ecuaciones de las ramas representadas en las figuras 4.20a y b son iguales, luego las dos ramas son equivalentes entre sí.

Es importante insistir en que la equivalencia de las ramas es válida para el resto del circuito. Por ejemplo, si las dos ramas de la figura 4.20 se conectan a un circuito abierto, las variables de rama resultan en ambas  $u = 6 \text{ V}$ ,  $i = 0 \text{ A}$ , lo que ratifica que ambas son equivalentes. Si embargo, si se analiza lo que sucede en el interior de ambas ramas, se constata que por la resistencia de  $2 \Omega$  de la fuente real de tensión no pasa corriente, mientras que circulan  $3 \text{ A}$  en la resistencia del mismo valor de la fuente real de intensidad. Es decir, la equivalencia no se refiere a los elementos constituyentes de las ramas equivalentes.

Esta conversión de fuentes reales se puede extender a aquellos casos en que las fuentes son dependientes. Así, por ejemplo, la fuente real de tensión de la figura 4.21a se puede sustituir por su equivalente de la figura 4.21b, ya que las relaciones entre  $u$  e  $i$  son iguales en ambas.

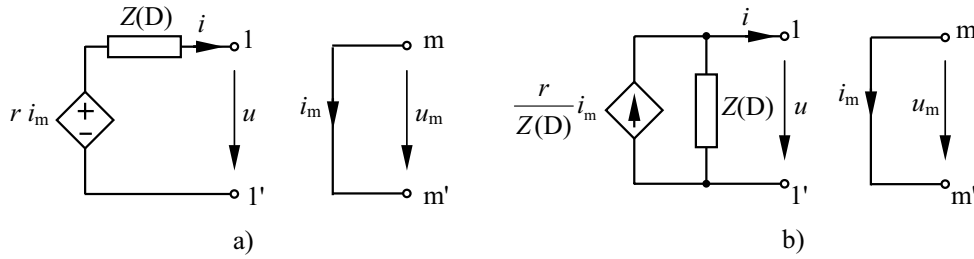


Figura 4.21

Hay que tener cuidado cuando la variable de dependencia está en la propia fuente real. Por ejemplo, en el dipolo de la figura 4.22a la variable de dependencia  $u_m$  se pierde al pasar a la fuente real de intensidad dependiente equivalente.

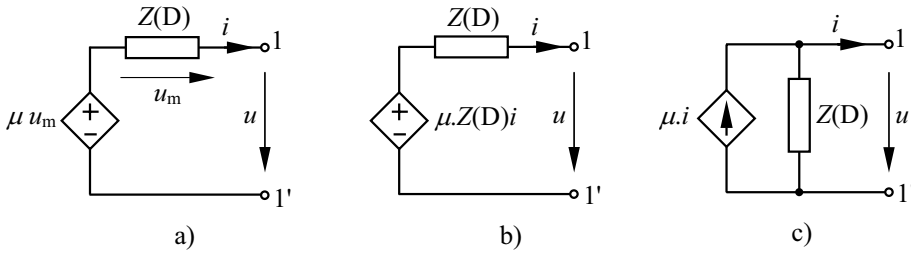


Figura 4.22

En este caso cabe la solución de poner la variable de dependencia,  $u_m$ , en función de una de las variables del dipolo,  $i$  o  $u$ , que al ser variables externas se mantienen al pasar de una configuración a otra. Así, en el dipolo de la figura 4.22a se puede escribir

$$u_m = Z(D)i$$

es decir,

$$\mu \cdot u_m = \mu \cdot Z(D)i \quad [4.27]$$

y el dipolo de la figura 4.22a se puede representar por el de la figura 4.22b. Ahora ya se puede pasar a la fuente real de intensidad equivalente de la figura 4.22c, siguiendo las reglas establecidas anteriormente.

También puede comprobarse que el dipolo de la figura 4.22a es equivalente a una impedancia de valor  $(1 - \mu) \cdot Z(D)$ .

#### Ejemplo 4.13

Determinar la intensidad  $I$  en el circuito de la figura 4.23a:

1. Mediante la escritura de las ecuaciones nodales y circulares en función de las intensidades de rama.
2. Modificando el circuito a base de convertir las fuentes de tensión en fuentes de intensidad.

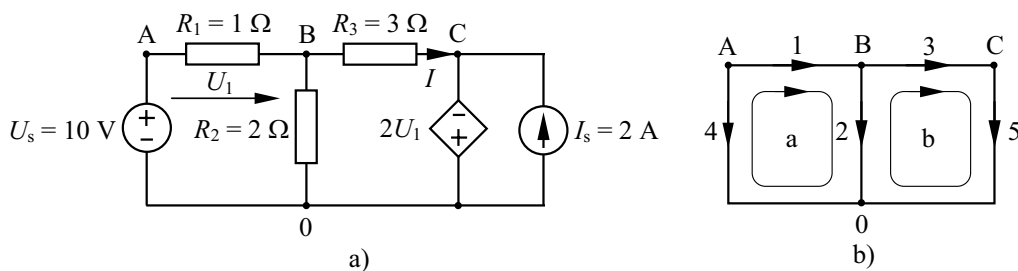


Figura 4.23

1. La fuente de tensión dependiente conectada entre los nudos C y 0 impone una tensión al circuito que es independiente del valor de la fuente de intensidad  $I_s$ , conectada en paralelo con la misma. Por tanto, a efectos de analizar lo que sucede en el resto del circuito, se puede dejar únicamente la fuente de tensión dependiente como equivalente de las dos fuentes en paralelo y prescindir de la fuente de intensidad. Esto conducirá a un resultado diferente en la intensidad que pasa por la fuente de tensión dependiente, pero las tensiones e intensidades por el resto del circuito no cambiarán.

Si se prescinde de la fuente de intensidad, se tiene el gráfico reticular orientado de la figura 4.23b, en el que la rama 5 es la fuente de tensión dependiente.

Las ecuaciones que se obtienen son las siguientes:

Ecuaciones circulares (método de las mallas):

$$\text{Malla a: } -10 + 1I_1 + 2I_2 = 0$$

$$\text{Malla b: } -2I_2 + 3I - 2U_1 = 0$$

con  $U_1 = 1 \cdot I_1$

Ecuaciones nodales (método de los nudos):

$$\text{Nudo A: } I_1 + I_4 = 0$$

$$\text{Nudo B: } -I_1 + I_2 + I = 0$$

$$\text{Nudo C: } -I + I_5 = 0$$

Con las ecuaciones circulares y la ecuación del nudo B se tiene un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas del que, una vez resuelto, se obtiene

$$I_1 = 50/7 \text{ A}$$

$$I_2 = 10/7 \text{ A}$$

$$I = 40/7 \text{ A}$$

$$U_1 = 50/7 \text{ V.}$$

Las ecuaciones de los nudos A y C proporcionan las intensidades por las fuentes de tensión.

2. Una vez eliminada la fuente de intensidad, el circuito tiene dos fuentes reales de tensión: La constituida por la fuente ideal independiente  $U_s$  y la resistencia  $R_1$  y la constituida por la fuente ideal dependiente y la resistencia  $R_3$ . La conversión de éstas a fuentes reales de intensidad conduce al circuito de la figura 4.24, donde las resistencias se expresan mediante sus correspondientes conductancias.

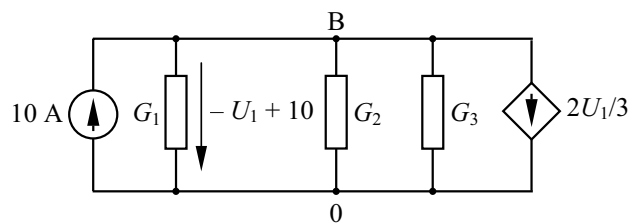


Figura 4.24

Al convertir la primera de ellas a fuente real de intensidad, la tensión en la resistencia  $R_1$  de esta nueva fuente ya no es  $U_1$ . Se mantiene, no obstante, la misma tensión entre los terminales de las fuentes reales equivalentes:  $-U_1 + 10$ .

Se tiene, así, un circuito con dos nudos, en el que basta escribir la ecuación nodal del nudo B, en función de las tensiones de rama (todas ellas iguales entre sí), para obtener una ecuación con una incógnita:

$$(G_1 + G_2 + G_3) \cdot (-U_1 + 10) = 10 - 2U_1/3$$

El resultado es el ya conocido,  $U_1 = 50/7 \text{ V}$ , de donde

$$U_B = 10 - U_1 = 20/7 \text{ V}$$

Como la intensidad  $I$  no está explícita en el circuito de la figura 4.24, para su cálculo es preciso volver al circuito de la figura 4.23a, a partir del cual se tiene

$$I = (U_B + 2U_1)/3 = 40/7 \text{ A}$$

que coincide con el obtenido previamente.

En ocasiones, la aplicación de la regla de sustitución a fuentes dependientes permite encontrar una rama equivalente constituida por una o más impedancias, lo que facilita el análisis a mano del circuito. En las figuras 4.25a y 4.25b se muestran dos ejemplos.

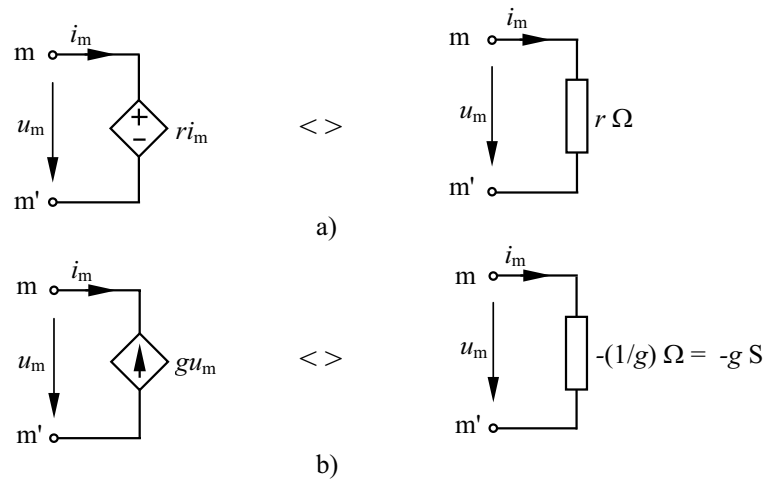


Figura 4.25

Como ya se ha indicado, otro ejemplo es el de la figura 4.22a.

**P4.4** Aplicar el método general para analizar el circuito de la figura P4.4 y determinar la intensidad que circula a través de la fuente de tensión dependiente de la tensión  $U$ .

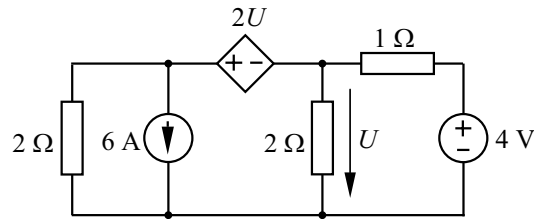


Figura P4.4

**P4.5** Calcular las tensiones e intensidades en cada elemento del circuito de la figura P4.5, mediante el método general de análisis de circuitos.

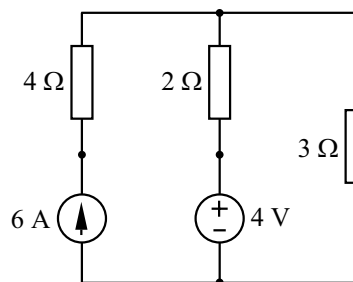


Figura P4.5

**P4.6** Hallar las intensidades que circulan por las resistencias en los circuitos representados en las figuras P4.6a (los terminales están a circuito abierto) y P4.6b (los terminales están en cortocircuito).

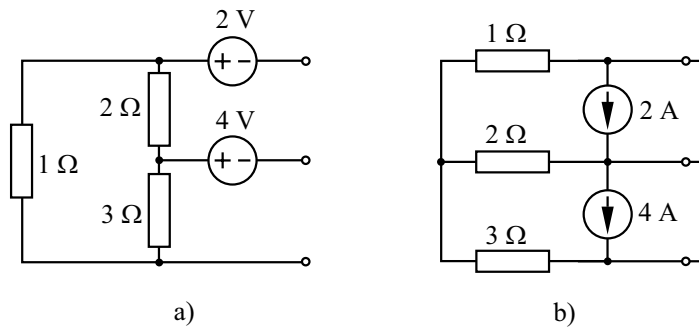


Figura P4.6

**P4.7** Escribir las ecuaciones que resultan al analizar el circuito de la figura P4.7, seleccionando las ecuaciones nodales por el método de los nudos y las circulares por el método de las mallas.

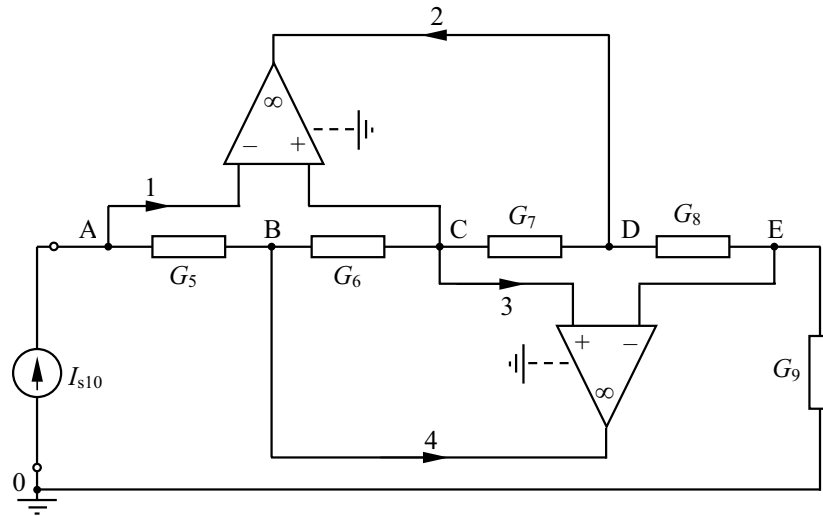


Figura P4.7

**P4.8** Escribir las ecuaciones que resultan al aplicar el método general de análisis al circuito de la figura P4.8, seleccionando las ecuaciones nodales por el método de los nudos y las circulares por el método de las mallas.

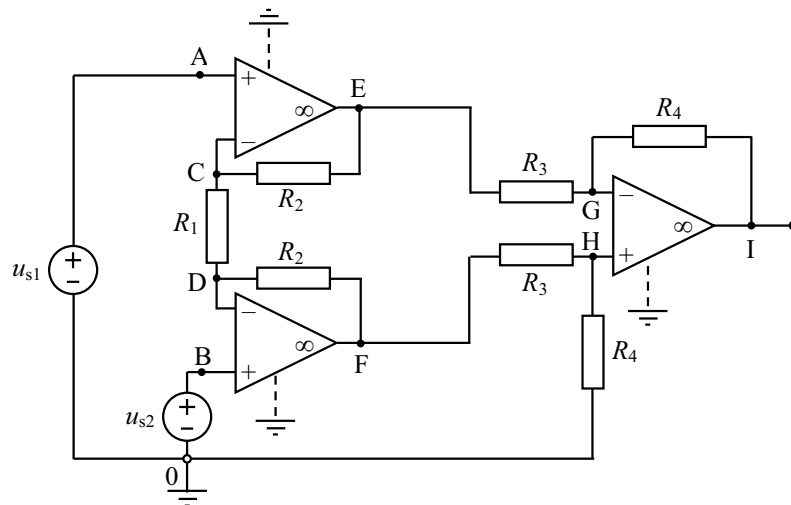


Figura P4.8

NOTA.- Este circuito se conoce como amplificador de instrumentación. Las señales de entrada, representadas por las fuentes ideales de tensión, se aplican a unas puertas de

impedancia de entrada infinita (la intensidad por estas fuentes es cero). La tensión a la salida del circuito,  $u_{10}$ , viene dada por la expresión

$$u_{10} = \left[ 1 + \frac{2R_2}{R_1} \right] \frac{R_4}{R_3} (u_{s2} - u_{s1})$$

**P4.9** Escribir las ecuaciones correspondientes al análisis del circuito de la figura P4.9a. Efectuar una primera reducción del sistema de ecuaciones eliminando las tensiones de rama. Se tomará como gráfico reticular orientado el de la figura P4.9b, donde cada elemento del circuito se ha tomado como una rama.

Elegir como árbol el conjunto de las ramas 1, 2 y 3 y seleccionar las ecuaciones nodales por el método de los conjuntos de corte básicos y las circulares por el método de los lazos básicos.

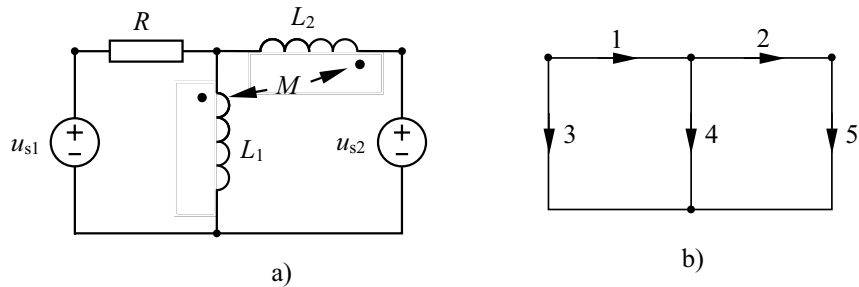


Figura P4.9

**P4.10** Repetir el problema P4.9 efectuando una primera reducción del sistema de ecuaciones eliminando las intensidades de rama (siempre que sea posible). Seleccionar las ecuaciones nodales por el método de los nudos y las circulares por el método de las mallas.

**P4.11** En la figura P4.11 se representa un circuito de corriente continua en régimen permanente (todas las intensidades y tensiones son constantes). Aplicar la regla de sustitución a las bobinas y condensadores del circuito y hallar las tensiones e intensidades en estos elementos.

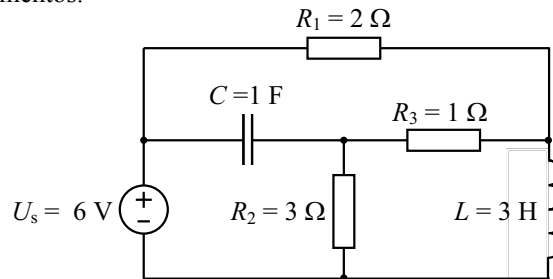


Figura P4.11