

ÍNDICE

I.-	CONCEPTOS BÁSICOS.....	2
1.1.-	GENERALIDADES.....	2
1.1.1.-	CONCEPTO DE ESTRUCTURA.....	2
1.1.2.-	EL CÁLCULO EN EL PROCESO GENERAL DE DISEÑO	3
1.2.-	PRINCIPIOS BÁSICOS	8
1.2.1.-	PEQUEÑOS DESPLAZAMIENTOS.....	8
1.2.2.-	COMPORTAMIENTO LINEAL	9
1.2.3.-	SUPERPOSICIÓN.....	10
1.3.-	RELACIONES FUNDAMENTALES.....	12
1.3.1.-	EQUILIBRIO	12
1.3.2.-	RELACIÓN ENTRE MOVIMIENTOS Y DEFORMACIONES. COMPATIBILIDAD.....	15
1.3.3.-	LEY DE COMPORTAMIENTO.....	16
1.4.-	CONDICIONES DE CONTORNO	24
1.5.-	DETERMINACIÓN E INDETERMINACIÓN ESTÁTICA	25
1.6.-	INDETERMINACIÓN CINEMÁTICA. GRADOS DE LIBERTAD	28
1.7.-	MÉTODOS DE CÁLCULO DE ESTRUCTURAS.....	31
1.7.1.-	MÉTODO DE COMPATIBILIDAD	32
1.7.2.-	MÉTODO DE EQUILIBRIO	35

1.8.-	COMPARACIÓN ENTRE LOS MÉTODOS DE CÁLCULO DE ESTRUCTURAS	39
II.-	EL PRINCIPIO DE LOS TRABAJOS VIRTUALES Y TEOREMAS DE LA ENERGIA.....	42
2.1.-	INTRODUCCIÓN.....	42
2.2.-	PROBLEMA DE VALORES EN EL CONTORNO. PLANTEAMIENTO DIFERENCIAL	43
2.3.-	TRABAJO, ENERGIA DE DEFORMACIÓN Y SUS COMPLEMENTARIOS.....	54
2.4.-	FORMULACIÓN INTEGRAL DEL PROBLEMA DE VALORES EN EL CONTORNO	61
2.4.1.-	<i>PRINCIPIO DE LOS TRABAJOS VIRTUALES</i>	<i>61</i>
2.4.2.-	<i>FORMULACIÓN DÉBIL DEL PROBLEMA DE VALORES EN EL CONTORNO</i>	<i>63</i>
2.5.-	APLICACIONES DEL PRINCIPIO DE LOS TRABAJOS VIRTUALES (P.T.V.)	77
2.5.1.-	<i>APLICACIÓN DEL P.T.V. EN ESTRUCTURAS DE NUDOS ARTICULADOS.....</i>	<i>78</i>
2.5.2.-	<i>APLICACIÓN DEL PRINCIPIO DE LOS TRABAJOS VIRTUALES EN ESTRUCTURAS DE BARRAS EN GENERAL.....</i>	<i>86</i>
2.6.-	TEOREMAS ENERGÉTICOS.....	90
2.6.1.-	<i>TEOREMAS DE MAXWELL Y BETTI</i>	<i>90</i>
2.6.2.-	<i>TEOREMA DE ENGESSER (1889).....</i>	<i>91</i>
2.6.3.-	<i>TEOREMA DE CASTIGLIANO (2ª PARTE) (1879)</i>	<i>92</i>
2.6.4.-	<i>TEOREMA DEL MINIMO POTENCIAL TOTAL</i>	<i>93</i>

2.6.5.-	TEOREMA DE CASTIGLIANO (1ª Parte)	94
III.-	CÁLCULO DE SISTEMAS ISOSTÁTICOS.	97
3.1.-	INTRODUCCIÓN	97
3.2.-	MÉTODOS DE RESOLUCIÓN.	98
3.2.1.-	MÉTODO DE LOS NUDOS.	98
3.2.2.-	MÉTODO GRÁFICO DE MAXWELL-CREMONA.	101
3.2.3.-	MÉTODO DE LAS SECCIONES.	104
3.3.-	ESTRUCTURAS COMPLEJAS. MÉTODO DE HENNEBERG.	108
3.4.-	CÁLCULO DE DESPLAZAMIENTOS.	112
3.4.1.-	DIAGRAMA DE WILLIOT.	112
3.4.2.-	PRINCIPIO DE LOS TRABAJOS VIRTUALES.	117
IV.-	MÉTODO DE COMPATIBILIDAD.	124
4.1.-	INTRODUCCIÓN	124
4.2.-	LIBERACIÓN DE VÍNCULOS. ELECCIÓN DE LAS INCÓGNITAS.	125
4.3.-	P.T.V. PRINCIPIO DE LOS TRABAJOS VIRTUALES.	127
4.4.-	CÁLCULO DE MOVIMIENTOS	135
V.-	MÉTODO DE EQUILIBRIO.	144
5.1.-	GRADOS DE LIBERTAD.	144
5.1.1.-	DEFINICIONES.	144
5.1.2.-	REDUCCIÓN DEL NÚMERO DE GRADOS DE LIBERTAD.	146
5.2.-	RELACIONES DE COMPORTAMIENTO DE LA BARRA PRISMÁTICA	151

5.2.1.-	FUERZAS DE EMPOTRAMIENTO.....	151
5.2.2.-	RELACIONES DE COMPORTAMIENTO DE LA BARRA.....	155
5.3.-	FORMULACIÓN DEL MÉTODO DE LA RIGIDEZ.....	157
5.3.1.-	EL MÉTODO DIRECTO DE LA RIGIDEZ EN CELOSÍAS.....	158
5.3.2.-	EL MÉTODO DIRECTO DE LA RIGIDEZ EN ESTRUCTURAS RETICULARES.....	164
5.4.-	MÉTODO DE CROSS.....	168
5.4.1.-	INTRODUCCIÓN.....	168
5.4.2.-	HIPÓTESIS PRELIMINARES.....	169
5.4.3.-	DEFINICIONES PREVIAS.....	169
5.4.4.-	BASES.....	173
5.4.5.-	MÉTODO.....	175
5.4.6.-	CASOS PARTICULARES DE APLICACIÓN.....	177
5.5.-	ESTRUCTURAS TRANSLACIONALES.....	184
5.6.-	FORMULACIÓN MATRICIAL DEL MÉTODO DE LA RIGIDEZ.....	191
5.6.1.-	EL ELEMENTO. MATRICES DE RIGIDEZ ELEMENTALES EN COORDENADAS LOCALES Y GLOBALES.....	196
5.6.2.-	SISTEMATIZACIÓN DEL CÁLCULO.....	204
5.6.3.-	CONCLUSIONES.....	205
VI.-	INESTABILIDAD.....	207
6.1.-	GRANDES DEFORMACIONES.....	207
6.2.-	GRANDES DESPLAZAMIENTOS.....	209

6.3.-	NO-LINEALIDAD GEOMÉTRICA.....	214
6.4.-	MÉTODOS DE ANÁLISIS. PLANTEAMIENTOS EN BIFURCACIÓN.....	215
6.5.-	MÉTODOS DE ANÁLISIS. GENERALIZACIÓN DE LOS PLANTEAMIENTOS EN BIFURCACIÓN.....	219
6.6.-	MÉTODOS DE ANÁLISIS. PLANTEAMIENTOS EN AMPLIFICACIÓN.....	223
6.7.-	ANÁLISIS DE PÓRTICOS	226
6.7.1.-	MULTIPLICADORES DE CARGA	227
6.7.2.-	PANDEO GLOBAL Y LOCAL	227
6.7.3.-	PÓRTICOS IDEALES Y PÓRTICOS REALES	229
6.7.4.-	IMPERFECCIONES GLOBALES Y LOCALES	229
VII.-	CÁLCULO PLÁSTICO DE ESTRUCTURAS DE BARRAS.....	233
7.1.-	INTRODUCCIÓN.....	233
7.2.-	COMPORTAMIENTO DE LA SECCIÓN.....	234
7.2.1.-	HIPÓTESIS.....	234
7.2.2.-	COMPORTAMIENTO DE LA SECCIÓN SOMETIDA A TRACCIÓN O COMPRESIÓN SIMPLES	236
7.2.3.-	COMPORTAMIENTO DE LA SECCIÓN SOMETIDA A FLEXIÓN PURA	236
7.2.4.-	COMPORTAMIENTO DE LA SECCIÓN SOMETIDA A FLEXIÓN SIMPLE.....	241
7.2.5.-	COMPORTAMIENTO DE LA SECCIÓN SOMETIDA A FLEXIÓN COMPUESTA.....	245
7.3.-	MÉTODOS PASO A PASO PARA EL CÁLCULO DE ESTRUCTURAS DE BARRAS.....	247

7.3.1.- ESTRUCTURAS DE NUDOS ARTICULADOS	247
7.3.2.- ESTRUCTURAS DE NUDOS RÍGIDOS	249
7.4.- MÉTODOS ESTÁTICO Y CINEMÁTICO.....	258
7.4.1.- MÉTODO ESTÁTICO	258
7.4.2.- MÉTODO CINEMÁTICO.	260
7.5.- TEOREMAS BÁSICOS.	262
7.5.1.- TEOREMA ESTÁTICO O DE MÍNIMO.....	263
7.5.2.- TEOREMA CINEMÁTICO O DE MÁXIMO.	264
7.5.3.- TEOREMA DE UNICIDAD.	265
7.5.4.- MÉTODO DE COMBINACIÓN DE MECANISMOS.	266
7.6.- CÁLCULO DE MOVIMIENTOS.	269
7.6.1.- CÁLCULO DE MOVIMIENTOS Y ANÁLISIS DE LA ZONA PLASTIFICADA	270
7.6.2.- MÉTODOS APROXIMADOS PARA EL CÁLCULO DE MOVIMIENTOS	274

I.- CONCEPTOS BÁSICOS

1.1.- GENERALIDADES

1.1.1.- CONCEPTO DE ESTRUCTURA

La idea de *Estructura* está relacionada con términos como trama, forma, complejo y otros análogos, lo que pone de manifiesto, ya desde el comienzo, la idea de conjunto de elementos interrelacionados. Con un criterio de generalidad pero dentro del contexto del *Ingeniería Mecánica y Civil*, se puede definir una estructura como *un conjunto de elementos organizados y distribuidos de forma adecuada para cumplir la finalidad de resistir un sistema determinado de solicitaciones*.

De esta definición y para aclarar conceptos, se pueden subrayar algunos aspectos especialmente interesantes. Así la estructura es un *todo* en el que sus partes están interrelacionadas, debiéndose hablar de *elementos enlazados* y de *función o finalidad*, más que de *partes y adición*.

En la definición dada también se incide en el punto de vista *resistente*, es decir, en la capacidad para el mantenimiento de su forma ante la acción de una serie de solicitaciones. Se entiende que se mantiene la forma siempre que las deformaciones producidas se encuentren dentro de márgenes aceptables que permitan satisfacer los requerimientos funcionales para los que esté concebida. Por tanto, la función resistente (estados límite último) y el control de desplazamientos (estados límite de servicio) son los aspectos que caracterizan a los sólidos que se van a tratar en la Teoría de Estructuras.

Otra idea importante que se encuentra latente al hablar de *elementos distribuidos adecuadamente*, es el interés por determinar la mejor solución, entre las diversas que admita el problema planteado, para cumplir la finalidad para la que la estructura ha sido prevista.

Todo lo expuesto conlleva la comprensión del mecanismo resistente de la construcción, lo que conduce a que se pueda elaborar un modelo matemático que permita su cálculo. En la concepción clásica, se asimilan las distintas partes de la estructura a una serie de elementos que constituyen los modelos más habituales del comportamiento de un sólido, como son las barras, las placas y las láminas, y esta simplificación permite, tal y como se ha indicado, abordar su cálculo. No obstante esta idea clásica está en parte cambiando. El desarrollo actual de los métodos numéricos y capacidad, velocidad, etc., de los ordenadores, hace que se puedan resolver de forma

aproximada las ecuaciones de la mecánica de medios continuos y, por tanto, que no sea necesario recurrir a la simplificación que supone la idealización con los elementos estructurales clásicos.

Este cambio de concepción permite abordar la comprobación de elementos para los que el planteamiento clásico no proporciona una aproximación suficiente, pero siempre es preciso elaborar un modelo matemático que suponga una idealización más o menos compleja del problema planteado y, por tanto, es necesario tener criterios claros sobre su comportamiento estructural.

1.1.2.- EL CÁLCULO EN EL PROCESO GENERAL DE DISEÑO

El proceso a seguir para la realización de una estructura, concebida para cubrir una serie de necesidades funcionales, puede esquematizarse en las tres fases clásicas de diseño, cálculo o análisis y construcción. Aunque no existe un método que asegure de forma automática la elección de la solución óptima, del manejo hábil y minucioso de los conceptos incluidos en las tres fases, del equilibrio en las relaciones existentes entre las mismas y de su coordinación dependerá el que se obtenga la solución estructural más adecuada al problema planteado.

Es de todo experto conocido que soluciones que, desde un punto de vista resistente son idóneas, no son aceptables por sus dificultades constructivas o coste. La concepción de las estructuras con un enfoque global, nos lleva a su comprensión moderna como sistemas.

Sin pretender englobar en el esquema de unos pocos párrafos todas las ideas que se pueden desprender del proceso a seguir para la realización de una estructura, que si no pretencioso cuando menos resulta ingenuo, a continuación, se comentan algunos conceptos que se han considerado de interés para clarificar y ordenar su contenido.

- ***Diseño***

Por *diseño* se puede entender la concepción de la solución estructural que ha de cumplir con una función establecida, lo que supone la determinación del tipo estructural más adecuado, fijando la distribución, forma y dimensiones de los elementos que la componen, así como los materiales con que será construida.

En primer lugar, hay que concretar claramente las condiciones funcionales que definen el problema, lo que implica establecer una prioridad en las necesidades planteadas, detectar y ponderar posibles contradicciones y determinar cuidadosamente condiciones no explícitas en el enunciado del mismo. En el capítulo de cargas, por ejemplo, es de gran importancia en esta fase tener en cuenta todos los tipos posibles de solicitudes a que pueda estar sometida la estructura.

También hay que establecer todas aquellas consideraciones adicionales de índole económica, estética, legal, etc., que afecten al problema. La sencillez en el proceso de ejecución y el análisis de los medios auxiliares disponibles para el mismo, así como, el estudio de los materiales que se pueden encontrar con mayor facilidad (en el caso de no estar condicionados por exigencias funcionales concretas) son factores que deben tenerse muy en cuenta a lo largo de esta fase del proyecto.

La actividad fundamental en esta fase es la preparación de todos los sistemas estructurales posibles, lo que exige conocimiento y experiencia por parte del proyectista sobre el comportamiento de los materiales, así como una comprensión clara de los mecanismos resistentes de cada uno de los tipos estructurales, dentro de una concepción global de la estructura en su entorno y las relaciones con el mismo.

La posterior revisión crítica de las soluciones encontradas, frente a los condicionantes y relaciones anteriormente expuestos, condicionará la elección de la solución/es que será/n comprobada/s a partir de su predimensionamiento.

- ***Cálculo o Análisis***

En esta fase se trata de comprobar que la estructura puede desempeñar las funciones para las que ha sido diseñada, lo que supone la determinación de esfuerzos, deformaciones y movimientos que se producen en sus elementos al actuar el sistema de cargas a que está sometida y compararlos con los límites establecidos.

De esta idea inicial se desprende que los resultados obtenidos en el cálculo pueden conducir, y siempre tras un proceso de reflexión y crítica, a la modificación del predimensionamiento, o, en algún caso, a la revisión del

propio diseño, repitiéndose el proceso hasta alcanzar la solución más adecuada.

El primer paso en el análisis de una estructura, íntimamente ligado también a la fase de diseño, es la modelización de la misma, conforme a la solución estructural prevista, generándose todo aquello que resulta necesario para poder realizar el cálculo.

- *Determinación de las acciones*

Las acciones, ya estudiadas con detalle en la fase anterior, deben en este momento ser analizadas para que puedan definirse de forma manejable durante el cálculo, teniendo en cuenta las características del modelo estructural elegido y las simplificaciones introducidas, así como el tipo de cálculo que se va a efectuar.

Por otra parte, el carácter diverso de las acciones, hace que el grado de incertidumbre asociado a cada una sea diferente. Así, las cargas muertas (peso propio de la estructura, peso de elementos no estructurales,...) son relativamente fijas y permanentes, mientras que las sobrecargas (viento, nieve,...) pueden variar en el tiempo y espacio, y otras como por ejemplo las explosiones o impactos, se consideran accidentales. Todo ello conduce a que sea necesario analizar cuidadosamente las hipótesis simples de carga, cuáles deben ser sus combinaciones y los coeficientes de seguridad que en función del riesgo, probabilidad y daño deben afectar a las distintas acciones.

Bases de Cálculo

En primer lugar, es preciso fijar las hipótesis básicas relativas al comportamiento del material elegido, ponderar todos aquellos supuestos inherentes a los fundamentos teóricos de los posibles métodos de cálculo, analizando su aplicabilidad al caso concreto que se está estudiando, así como definir el criterio de fallo.

Análisis global (determinación de esfuerzos y desplazamientos) y dimensionamiento (comprobación de la resistencia de los elementos)

Una vez realizados todos los pasos anteriores, sólo queda por determinar si la estructura diseñada, que está representada por un modelo matemático adecuado y sometida a la acción de unas cargas establecidas, llega a superar alguno de los límites especificados.

El análisis consistirá por tanto, en la comprobación de si la estructura alcanza o no alguno de los límites fijados en rotura, deformación, equilibrio, estabilidad, etc., lo que supone la elección de una metodología de cálculo