

ÍNDICE

1	CONCEPTOS BÁSICOS.....	2
1.1	GENERALIDADES	2
1.1.1	CONCEPTO DE ESTRUCTURA.....	2
1.1.2	EL CÁLCULO EN EL PROCESO GENERAL DE DISEÑO	3
1.1.3	TIPOLOGÍA O CLASIFICACIÓN	5
1.2	PRINCIPIOS BÁSICOS	7
1.2.1	PEQUEÑOS DESPLAZAMIENTOS.....	7
1.2.2	COMPORTAMIENTO LINEAL	8
1.2.3	SUPERPOSICIÓN.....	9
1.3	RELACIONES FUNDAMENTALES	10
1.3.1	EQUILIBRIO	10
1.3.2	RELACIÓN ENTRE MOVIMIENTOS Y DEFORMACIONES. COMPATIBILIDAD.....	12
1.3.3	LEY DE COMPORTAMIENTO.....	14
1.4	CONDICIONES DE CONTORNO.....	20
1.5	DETERMINACIÓN E INDETERMINACIÓN ESTÁTICA.....	21
1.6	INDETERMINACIÓN CINEMÁTICA. GRADOS DE LIBERTAD	24
1.7	MÉTODOS DE CÁLCULO DE ESTRUCTURAS	26
1.7.1	MÉTODO DE COMPATIBILIDAD	27
1.7.2	MÉTODO DE EQUILIBRIO	29

1.8	COMPARACIÓN ENTRE LOS MÉTODOS DE CÁLCULO DE ESTRUCTURAS	33
2	CÁLCULO DE SISTEMAS ISOSTÁTICOS.....	36
2.1	INTRODUCCIÓN	36
2.2	MÉTODOS DE RESOLUCIÓN.....	36
2.2.1	MÉTODO DE LOS NUDOS.....	37
2.2.2	MÉTODO GRÁFICO DE MAXWELL-CREMONA.....	39
2.2.3	MÉTODO DE LAS SECCIONES.....	43
2.3	ESTRUCTURAS COMPLEJAS. MÉTODO DE HENNEBERG.	46
2.4	CÁLCULO DE DESPLAZAMIENTOS.....	51
2.4.1	DIAGRAMA DE WILLIOT.	52
2.4.2	PRINCIPIO DE LOS TRABAJOS VIRTUALES.	56
3	MÉTODO DE COMPATIBILIDAD.....	62
3.1	INTRODUCCIÓN	62
3.2	LIBERACIÓN DE VÍNCULOS. ELECCIÓN DE LAS INCÓGNITAS.....	62
3.3	P.T.V. PRINCIPIO DE LOS TRABAJOS VIRTUALES	64
3.4	CÁLCULO DE MOVIMIENTOS.....	71
4	MÉTODO DE EQUILIBRIO.....	79
4.1	GRADOS DE LIBERTAD.....	79
4.1.1	DEFINICIONES.....	79
4.1.2	REDUCCIÓN DEL NÚMERO DE GRADOS DE LIBERTAD.....	80

4.2	RELACIONES DE COMPORTAMIENTO DE LA BARRA PRISMÁTICA.....	85
4.2.1	FUERZAS DE EMPOTRAMIENTO.	87
4.2.2	RELACIONES DE COMPORTAMIENTO DE LA BARRA.	90
4.3	FORMULACIÓN DEL MÉTODO DE LA RIGIDEZ.	92
4.3.1	EL MÉTODO DIRECTO DE LA RIGIDEZ EN CELOSÍAS.	93
4.3.2	EL MÉTODO DIRECTO DE LA RIGIDEZ EN ESTRUCTURAS RETICULARES.....	98
4.4	MÉTODO DE CROSS.....	102
4.4.1	INTRODUCCIÓN	102
4.4.2	HIPÓTESIS PRELIMINARES.....	103
4.4.3	DEFINICIONES PREVIAS.....	103
4.4.4	BASES	107
4.4.5	MÉTODO.....	108
4.4.6	CASOS PARTICULARES DE APLICACIÓN.....	110
4.5	ESTRUCTURAS TRANSLACIONALES	115
4.6	FORMULACIÓN MATRICIAL DEL MÉTODO DE LA RIGIDEZ.	122
4.6.1	EL ELEMENTO. MATRICES DE RIGIDEZ ELEMENTALES EN COORDENADAS LOCALES Y GLOBALES.....	126
4.6.2	SISTEMATIZACIÓN DEL CÁLCULO	133
4.6.3	CONCLUSIONES	134
5	INESTABILIDAD.....	136
5.1	GRANDES DEFORMACIONES.....	136

5.2	GRANDES DESPLAZAMIENTOS.	138
5.3	NO-LINEALIDAD GEOMÉTRICA.	142
5.4	MÉTODOS DE ANÁLISIS. PLANTEAMIENTOS EN BIFURCACIÓN.	144
5.5	MÉTODOS DE ANÁLISIS. GENERALIZACIÓN DE LOS PLANTEAMIENTOS EN BIFURCACIÓN.	147
5.6	MÉTODOS DE ANÁLISIS. PLANTEAMIENTOS EN AMPLIFICACIÓN.....	150
5.7	ANÁLISIS DE PÓRTICOS.....	152
5.7.1	MULTIPLICADORES DE CARGA	153
5.7.2	PANDEO GLOBAL Y LOCAL	154
5.7.3	PÓRTICOS IDEALES Y PÓRTICOS REALES	155
5.7.4	IMPERFECCIONES GLOBALES Y LOCALES	155
6	CÁLCULO PLÁSTICO DE ESTRUCTURAS DE BARRAS.....	159
6.1	INTRODUCCIÓN	159
6.2	COMPORTAMIENTO DE LA SECCIÓN	160
6.2.1	HIPÓTESIS	160
6.2.2	COMPORTAMIENTO DE LA SECCIÓN SOMETIDA A TRACCIÓN O COMPRESIÓN SIMPLES	161
6.2.3	COMPORTAMIENTO DE LA SECCIÓN SOMETIDA A FLEXIÓN PURA.....	161
6.2.4	COMPORTAMIENTO DE LA SECCIÓN SOMETIDA A FLEXIÓN SIMPLE.	165
6.2.5	COMPORTAMIENTO DE LA SECCIÓN SOMETIDA A FLEXIÓN COMPUESTA.....	169

6.3	MÉTODOS PASO A PASO PARA EL CÁLCULO DE ESTRUCTURAS DE BARRAS.....	171
6.3.1	ESTRUCTURAS DE NUDOS ARTICULADOS	171
6.3.2	ESTRUCTURAS DE NUDOS RÍGIDOS	173
6.4	MÉTODOS ESTÁTICO Y CINEMÁTICO.	180
6.4.1	MÉTODO ESTÁTICO	180
6.4.2	MÉTODO CINEMÁTICO.	182
6.5	TEOREMAS BÁSICOS.....	184
6.5.1	TEOREMA ESTÁTICO O DE MÍNIMO.....	184
6.5.2	TEOREMA CINEMÁTICO O DE MÁXIMO.	185
6.5.3	TEOREMA DE UNICIDAD.....	186
6.5.4	MÉTODO DE COMBINACIÓN DE MECANISMOS.	187
6.6	CÁLCULO DE MOVIMIENTOS.	189
6.6.1	CÁLCULO DE MOVIMIENTOS Y ANÁLISIS DE LA ZONA PLASTIFICADA	190
6.6.2	MÉTODOS APROXIMADOS PARA EL CÁLCULO DE MOVIMIENTOS	193
A-1.1	INTRODUCCIÓN	200
A-1.2	PROBLEMA DE VALORES EN EL CONTORNO. PLANTEAMIENTO DIFERENCIAL	201
A-1.3	TRABAJO, ENERGIA DE DEFORMACIÓN Y SUS COMPLEMENTARIOS	209
A-1.4	FORMULACIÓN INTEGRAL DEL PROBLEMA DE VALORES EN EL CONTORNO	215

A-1.4.1.- PRINCIPIO DE LOS TRABAJOS VIRTUALES.....	215
A-6.4.2.- FORMULACIÓN DÉBIL DEL PROBLEMA DE VALORES EN EL CONTORNO.....	217
A-1.5 APLICACIONES DEL PRINCIPIO DE LOS TRABAJOS VIRTUALES (P.T.V.)	228
A-6.5.1.- APLICACIÓN DEL P.T.V. EN ESTRUCTURAS DE NUDOS ARTICULADOS.	228
A-6.5.1.1.- MÉTODO DE LA COMPATIBILIDAD	230
A-6.5.1.2.- MÉTODO DE EQUILIBRIO.....	234
A-6.5.2.- APLICACIÓN DEL PRINCIPIO DE LOS TRABAJOS VIRTUALES EN ESTRUCTURAS DE BARRAS EN GENERAL	235
A-6.5.2.1.- APLICACIÓN PARA LA OBTENCIÓN DE ECUACIONES DE COMPATIBILIDAD.....	235
A-6.5.2.2.- APLICACIÓN PARA LA OBTENCIÓN DE ECUACIONES DE EQUILIBRIO.....	236
A-1.6 TEOREMAS ENERGÉTICOS.....	238
A-6.6.1.- TEOREMAS DE MAXWELL Y BETTI	238
A-6.6.2.- TEOREMA DE ENGESSER (1889).....	240
A-6.6.3.- TEOREMA DE CASTIGLIANO (2ª PARTE) (1879).....	240
A-6.6.4.- TEOREMA DEL MINIMO POTENCIAL TOTAL.....	241
A-6.6.5.- TEOREMA DE CASTIGLIANO (1ª PARTE)	242

3 MÉTODO DE COMPATIBILIDAD.

3.1 INTRODUCCIÓN

3.2 LIBERACIÓN DE VÍNCULOS. ELECCIÓN DE LAS
INCÓGNITAS.

3.3 P.T.V. PRINCIPIO DE LOS TRABAJOS VIRTUALES

3.4 CÁLCULO DE MOVIMIENTOS

3 MÉTODO DE COMPATIBILIDAD.

3.1 INTRODUCCIÓN

Las relaciones fundamentales para el análisis de estructuras son:

- Equilibrio
- Compatibilidad
- Ley de comportamiento del material

En las estructuras isostáticas los esfuerzos pueden obtenerse aplicando únicamente las condiciones de equilibrio. A partir de los esfuerzos, aplicando la ley de comportamiento, se obtienen las deformaciones de las barras y, por último, aplicando las condiciones de compatibilidad, los desplazamientos de los nudos. En este tipo de estructuras el valor de los esfuerzos es independiente de las propiedades elásticas de los elementos que las forman. Así pues, en las estructuras isostáticas los valores de los esfuerzos, deformaciones y desplazamientos, se obtienen mediante la aplicación aislada y sucesiva de las tres relaciones fundamentales. No ocurre lo mismo en las estructuras hiperestáticas, en las que los valores de los esfuerzos y las reacciones dependen de las propiedades elásticas. Debido a esto, para obtener los valores de los esfuerzos es necesario considerar conjuntamente las tres relaciones fundamentales.

El método de la compatibilidad se caracteriza por adoptar como incógnitas un número de fuerzas desconocidas igual al número de incógnitas hiperestáticas.

En el método de la compatibilidad el orden de aplicación de las relaciones fundamentales es:

1. Equilibrio
2. Ley de comportamiento
3. Compatibilidad

y se llega a un sistema de h ecuaciones de compatibilidad, siendo h el número de incógnitas hiperestáticas.

Por lo tanto, en el método de compatibilidad deberán elegirse aquellas incógnitas hiperestáticas que, al quitarlas de la estructura inicial, la conviertan en isostáticas.

Para ello se verá en primer lugar la metodología a seguir para la liberación de vínculos y la elección de las incógnitas hiperestáticas, para a continuación aplicar el principio de los trabajos virtuales para resolver los esfuerzos de la estructura, y por último, el cálculo de desplazamientos.

3.2 LIBERACIÓN DE VÍNCULOS. ELECCIÓN DE LAS INCÓGNITAS.

De una forma general, los casos que se pueden plantear son:

- a) hiperestaticidad externa
- b) hiperestaticidad interna
- c) hiperestaticidad externa e interna

El caso de hiperestaticidad externa se presenta cuando hay un número de condiciones de apoyo superior al que se puede obtener aplicando las condiciones de equilibrio y la estructura es internamente isostática.

El caso de hiperestaticidad interna se presenta cuando hay un número excesivo de barras y la estructura es exteriormente isostática.

El caso de hiperestaticidad externa e interna se presenta cuando hay un número excesivo de condiciones de apoyo y de barras.

Para el caso de celosías planas esto se puede plantear de la siguiente forma; el número de incógnitas se corresponde con el número de esfuerzos axiales en las barras, es decir, con el número de barras (b), más el número de reacciones ($r=3$ en este caso), y el número de ecuaciones de equilibrio es de dos ecuaciones por cada nudo ($2 \cdot n$). Por lo tanto la estructura será isostática si el número de ecuaciones y de incógnitas es coincidente, hiperestática si el número de incógnitas es superior al de ecuaciones y en caso contrario se trataría de un mecanismo. Considerando siempre que tanto las barras como los apoyos están colocados de forma adecuada.

A continuación se estudian los dos primeros casos, ya que el tercero se puede resolver mediante la aplicación conjunta de las ecuaciones utilizadas en los dos primeros casos.

Caso de hiperestaticidad externa con isostaticidad interna

Este es el caso de la estructura de la Figura 3.2.1., que es hiperestática por exceso de reacciones.

Dado que hay 5 incógnitas (R_{YA} , R_{XA} , R_C , R_D , R_B) y sólo se pueden aplicar tres ecuaciones de la estática ($\Sigma F_X = 0$, $\Sigma F_Y = 0$, $\Sigma M_Z = 0$), el grado de hiperestaticidad es de 2.

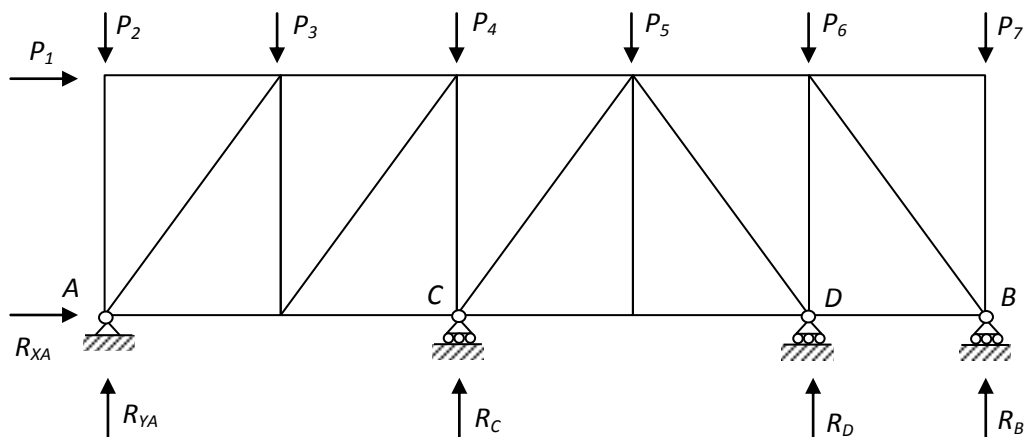


FIGURA 3.2.1.

Ahora se debe elegir las incógnitas hiperestáticas (2 en este ejemplo) y sustituir un número de condiciones de apoyo, igual al grado de

hiperestaticidad de la estructura, por los valores de las reacciones incógnita (en este caso por ejemplo R_C y R_D)

Caso de hiperestaticidad interna con isostaticidad externa

Este es el caso de la estructura de la figura, que es hiperestática por exceso de barras.

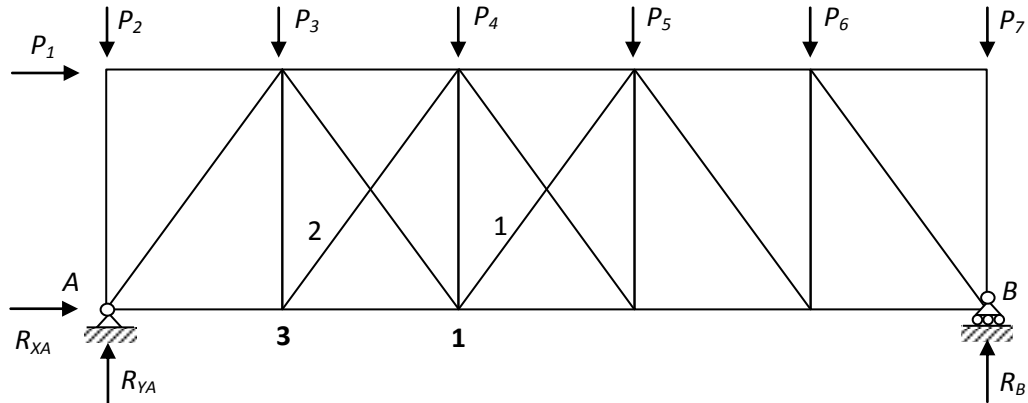


FIGURA 3.2.2.

Dado que hay 23 incógnitas (23 esfuerzos en las barras) y 21 ecuaciones, de acuerdo con lo indicado el número de incógnitas es $(b+r)$ en este caso $23+3=26$ y el número de ecuaciones $(2*12=24)$, es decir, que al haber dos incógnitas más que el número de ecuaciones de equilibrio disponibles, el grado de hiperestaticidad es de 2.

A continuación se deben elegir las incógnitas hiperestáticas. Para ello, se sustituyen un número de barras igual al grado de hiperestaticidad (en este caso 2), por los valores de las acciones que estas barras ejercen sobre los nudos de la estructura (por ejemplo las barras 1 y 2 indicados en la Figura 3.2.2 por las fuerzas X^I y X^{II} de la Figura 3.3.7).

En ambos casos se debe tener presente que hay que realizar una elección adecuada de dichas incógnitas hiperestáticas, de forma que la estructura resultante sea isostática; así por ejemplo no tendría sentido elegir eliminar las barras a y b que convierten a la estructura en un mecanismo.

3.3 P.T.V. PRINCIPIO DE LOS TRABAJOS VIRTUALES

El Principio de los Trabajos Virtuales relaciona en una estructura un sistema ficticio de fuerzas en equilibrio, que llamaremos virtual, o un sistema compatible de pequeños desplazamientos virtuales, con los desplazamientos reales o fuerzas verdaderas respectivamente.

Se puede usar pues cualquier sistema de fuerzas virtuales que satisfaga la condición de equilibrio, o en la formulación alternativa, cualquier sistema de desplazamientos virtuales que sean infinitesimales y compatibles.

En este método se utiliza el Principio de los Trabajos Virtuales para la obtención de ecuaciones de compatibilidad y, como se indicaba anteriormente, el estado real es el de movimientos y el virtual el de fuerzas en equilibrio.

Hiperestaticidad externa con isostaticidad interna

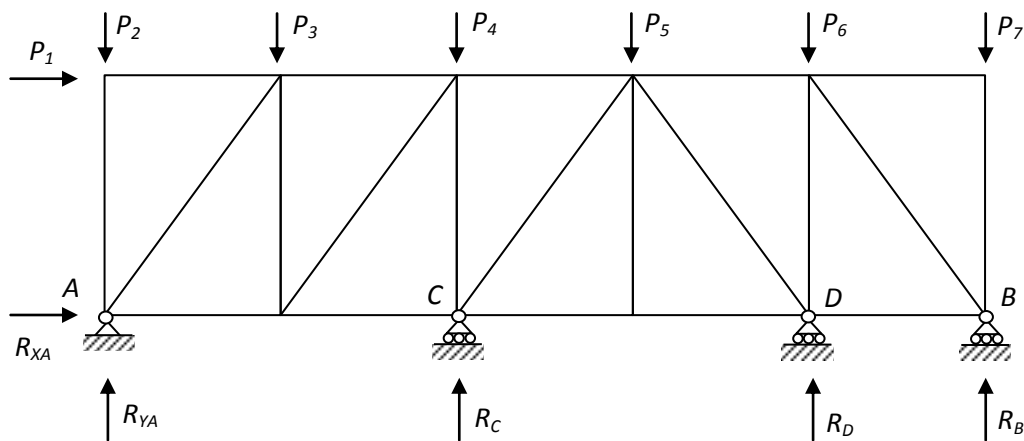


FIGURA 3.3.1.

Ecuaciones de equilibrio

Con la sustitución vista en el apartado anterior, la de un número de condiciones de apoyo igual al grado de hiperestaticidad de la estructura, por los valores de las reacciones incógnita, se obtiene una estructura isostática (estructura isostática fundamental), que puede resolverse por uno de los métodos estudiados en el capítulo anterior en función de las cargas exteriores y de los valores incógnitas hiperestáticas.

En vez de resolver la estructura isostática fundamental con todas las cargas exteriores, incrementos de temperatura, faltas de ajuste, etc, así como las incógnitas hiperestáticas, se puede aprovechar la linealidad del problema, aplicar el principio de superposición y descomponerla en la suma de un estado 0, al que se le aplican todas las cargas exteriores excepto las hiperestáticas, y dos estados I y II, a los que se les aplican las reacciones incógnitas.

Para resolver los estados I y II se aplican cargas unitarias en los nudos en los que están R^I y R^{II} . Ya que se trata de un problema lineal, si N_j^I son los esfuerzos en la barra j al aplicar una fuerza unitaria en la posición de R^I , el esfuerzo en la barra en el caso de que se hubiera aplicado R^I sería $R^I \times N_j^I$. Haciendo lo mismo con R^{II} se tendría $R^{II} \times N_j^{II}$, y si N_j^0 es el esfuerzo en la barra j , debido a las fuerzas del estado 0, se tiene, aplicando el Principio de Superposición, que el esfuerzo total en la barra j es

$$N_j = N_j^0 + R^I N_j^I + R^{II} N_j^{II} \quad (3.3.1)$$

y las reacciones son

$$\begin{aligned} R_{YA} &= R_{YA}^0 + R^I R_{YA}^I + R^{II} R_{YA}^{II} \\ R_C &= R^I \\ R_D &= R^{II} \end{aligned} \quad (3.3.2)$$

Estado Total

Esfuerzos: N_j
Reacciones: R_{XA}, R_{YA}, R_B

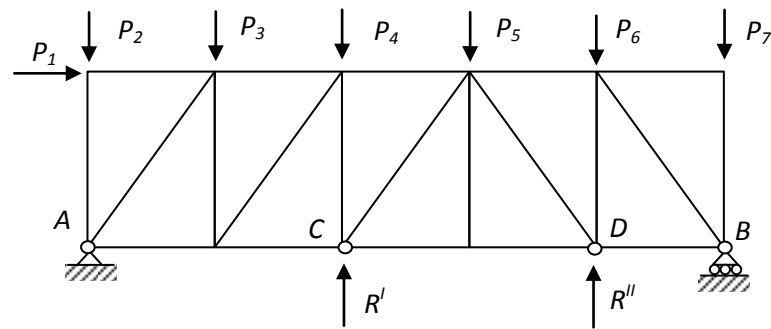


FIGURA 3.3.2.

Estado 0

Esfuerzos: N^0_j

Reacciones: $R^0_{XA}, R^0_{YA}, R^0_{YB}$

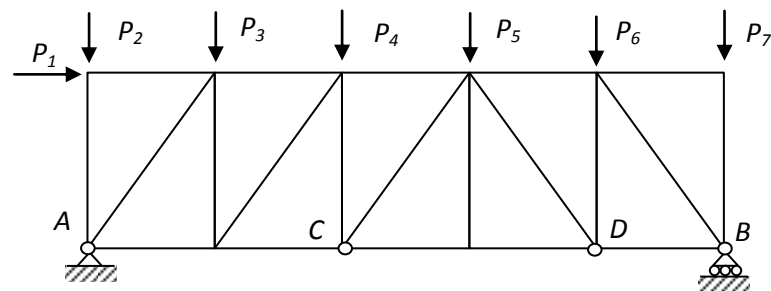


FIGURA 3.3.3.

Estado I

Esfuerzos: R^I, N^I_j

Reacciones: $R^I_{XA}, R^I_{YA}, R^I_{YB}$

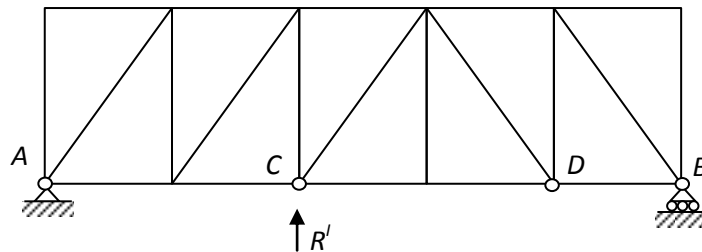


FIGURA 3.3.4.

Estado II

Esfuerzos: R^{II}, N^{II}_j

Reacciones: $R^{II}_{XA}, R^{II}_{YA}, R^{II}_{YB}$

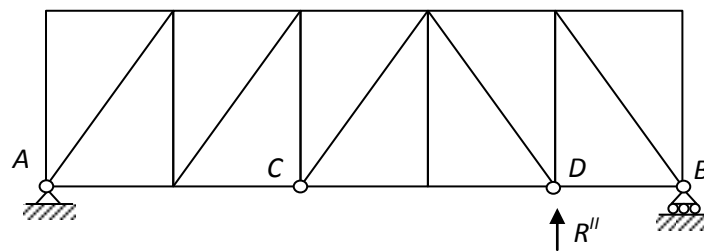


FIGURA 3.3.5.

Ley de comportamiento

Teniendo los esfuerzos en todas las barras en función de las incógnitas, se puede obtener el valor de la deformación total experimentada por cada barra.

$$e_j = e_j^0 + \frac{N_j L_j}{E_j A_j} = e_j^0 + \frac{(N_j^0 + R^I N_j^I + R^{II} N_j^{II}) L_j}{E_j A_j} \quad (3.3.3)$$

siendo e_j^0 las deformaciones producidas por un efecto distinto de las fuerzas exteriores aplicadas (faltas de ajuste, variaciones de temperatura, etc.)

Compatibilidad

En el primer apartado de habían sustituido vínculos de apoyo por los valores de las reacciones incógnita, pero para que la identificación del problema real con el que se está calculando sea completa, se deben verificar las condiciones de compatibilidad de la estructura real. Estas condiciones exigen que se cumpla la igualdad de los desplazamientos en los extremos correspondientes de las barras que concurren en un mismo punto y que se impongan los valores reales de los desplazamientos en los apoyos sustituidos. Así pues, se plantea un problema geométrico de hacer compatibles las deformaciones calculadas con los desplazamientos impuestos. Se puede utilizar, para cada apoyo sustituido, el PTV, que permite plantear un número de ecuaciones igual al de incógnitas del problema.

Para el estado I, el sistema real de deformaciones y desplazamientos es el producido por todas las fuerzas reales dado por (3.3.3) y el sistema virtual de fuerzas en equilibrio de la carga unitaria aplicada en el nudo C, para la cual ya se conocen los valores de los esfuerzos (N_j^I de la Figura 3.3.4).

Al aplicar el PTV se tiene

$$1 \cdot u_c = \sum_{j=1}^b N_j^I e_j = \sum_{j=1}^b N_j^I \left(e_j^0 + \frac{(N_j^0 + R^I N_j^I + R^{II} N_j^{II}) L_j}{E_j A_j} \right) \quad (3.3.4)$$

Aunque en general y en este caso en particular, u_c será cero, es posible considerar el caso de un movimiento de apoyo, ya que en este caso el valor del desplazamiento de u_c sería conocido. En el caso de que el movimiento fuera un asentamiento, puesto que la fuerza unitaria se ha aplicado hacia arriba (sentido positivo), habría que sustituir el valor de u_c con signo negativo.

Para el apoyo D, actuando de forma análoga, se puede escribir:

$$1 \cdot u_D = \sum_{j=1}^b N_j^{II} e_j = \sum_{j=1}^b N_j^{II} \left(e_j^0 + \frac{(N_j^0 + R^I N_j^I + R^{II} N_j^{II}) L_j}{E_j A_j} \right) \quad (3.3.5)$$

Así pues, se tiene un sistema de dos ecuaciones de compatibilidad con dos incógnitas, que permite calcular las incógnitas hiperestáticas (R^I y R^{II}), a partir de las cuales se pueden obtener los valores de las reacciones en A y B, y los esfuerzos en las barras.

Una vez obtenidos los esfuerzos en todas las barras, el cálculo de desplazamientos es un problema geométrico similar al de las estructuras isostáticas.

Hiperestaticidad interna con isostaticidad externa

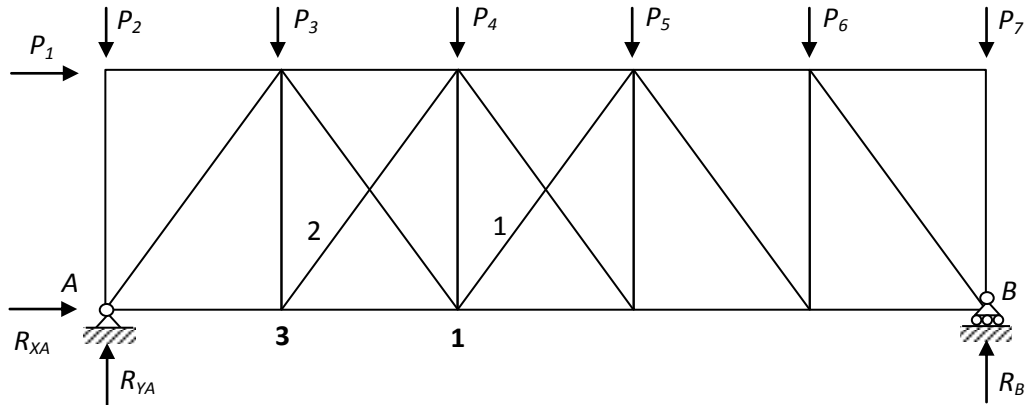


FIGURA 3.3.6.

Ecuaciones de equilibrio

Con la sustitución anterior, es decir, la de un número de barras igual al grado de hiperestaticidad, por los valores de las acciones que estas barras ejercen sobre los nudos de la estructura, se tiene una estructura isostática (estructura isostática fundamental) que puede resolverse por uno de los métodos conocidos, en función de las cargas exteriores y de los valores incógnitas.

Como en el caso anterior, en vez de resolver la estructura isostática fundamental con todas las cargas exteriores, incremento de temperatura, falta de ajuste, etc, así como incluyendo las incógnitas hiperestáticas (es decir, las dadas en la Figura 3.3.7), se puede descomponer en un estado 0, al que se le aplican todas las cargas exteriores excepto las hiperestáticas, y dos estados I y II, a los que se les aplican las fuerzas que sustituyen a las barras (X^I y X^{II}).

Para resolver los estados I y II se aplican cargas unitarias, en las direcciones de las barras, en los nudos a los que estaban conectadas las barras sustituidas. Si N_{ij} son los esfuerzos en la barra j al aplicar fuerzas unitarias en los nudos a los que estaba conectada la barra 1, el esfuerzo en la barra en el caso de que se hubiera aplicado X^I sería $X^I \times N^I_j$. Haciendo lo mismo con X^{II} se tendría $X^{II} \times N^{II}_j$, y si se denomina N^0_j al esfuerzo en la barra j , debido a las fuerzas del estado 0, se tiene, aplicando el Principio de Superposición, que el esfuerzo total en la barra j será:

$$N_j = N^0_j + X^I N^I_j + X^{II} N^{II}_j \quad (3.3.6)$$

Estado Total

Esfuerzos: N_j

Reacciones: R_{XA}, R_{YA}, R_B

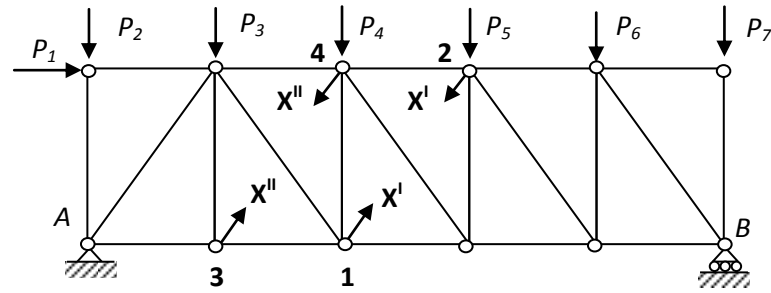


FIGURA 3.3.7.

Estado 0

Esfuerzos: N_j^0

Reacciones: $R_{XA}^0, R_{YA}^0, R_B^0$

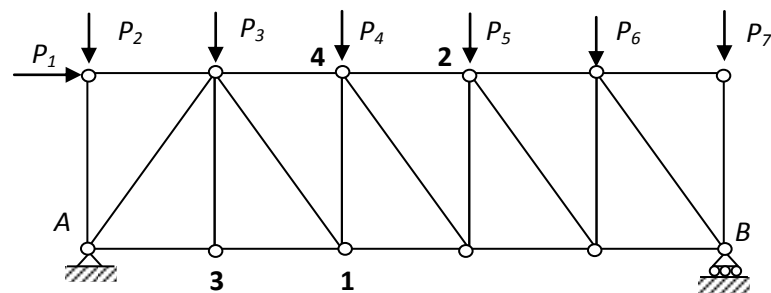


FIGURA 3.3.8.

Estado I

Esfuerzos: $X^I N_j^I$

Reacciones nulas

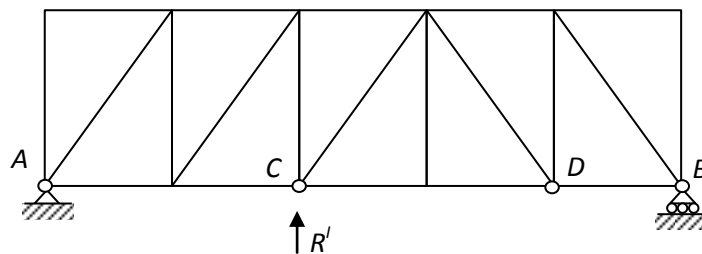


FIGURA 3.3.9.

Estado II

Esfuerzos: $X^{II} N_j^{II}$

Reacciones nulas

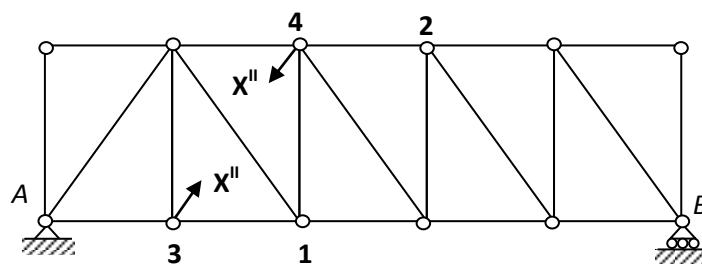


FIGURA 3.3.10.

En este caso, las reacciones son las correspondientes al estado 0. Como puede verse, las reacciones solo dependen de las cargas exteriores y no de las características internas de la estructura.

Ley de comportamiento

Teniendo los esfuerzos en todas las barras en función de las incógnitas, se puede obtener el valor de la deformación total experimentada por las barras.

$$e_j = e_j^0 + \frac{N_j L_j}{E_j A_j} = e_j^0 + \frac{(N_j^0 + R^I N_j^I + R^{II} N_j^{II}) L_j}{E_j A_j} \quad (3.3.7)$$

teniendo e_j , e_j^0 , L_j , E_j y A_j , el mismo significado del caso anterior.

Compatibilidad

De nuevo se ha planteado un problema geométrico, en el que dadas unas deformaciones, en función de las incógnitas, hay que hacerlas compatibles con la geometría de la estructura y los desplazamientos de los nudos. En este caso hay que hacer compatibles los desplazamientos de los nudos 1 y 2 con la deformación de la barra 1, y los desplazamientos de los nudos 3 y 4 con la deformación de la barra 2.

Para realizar lo indicado se aplica el PTV, considerando como sistema real de deformaciones y desplazamientos el debido a las fuerzas reales dado por (3.3.7) y como sistemas virtuales de fuerzas en equilibrio, los correspondientes a las fuerzas unitarias aplicadas en los nudos 1 y 2, y 3 y 4, para los cuales ya se conocen los valores de los esfuerzos que cumplen las condiciones de equilibrio (N_j^I y N_j^{II}).

Aplicando el PTV se tiene

$$\begin{aligned} 1 \cdot \vec{u}_1 + 1 \cdot \vec{u}_2 &= \sum_{j=1}^{b-1,2} N_j^I e_j = \sum_{j=1}^{b-1,2} N_j^I \left(e_j^0 + \frac{N_j L_j}{E_j A_j} \right) = \\ &= \sum_{j=1}^{b-1,2} N_j^I \left(e_j^0 + \frac{(N_j^0 + X^I N_j^I + X^{II} N_j^{II}) L_j}{E_j A_j} \right) \end{aligned} \quad (3.3.8)$$

Siendo \vec{u}_1 y \vec{u}_2 los desplazamientos de los nudos 1 y 2 en la dirección de la barra 1 y en el sentido de las fuerzas unitarias aplicadas.

Teniendo en cuenta que $u_1 + u_2$ es lo mismo que el acortamiento que experimentará la barra 1 debido a las fuerzas aplicadas y a otros efectos (variaciones de temperatura, faltas de ajuste, etc.), se tiene

$$\vec{u}_1 + \vec{u}_2 = -e_1 = - \left(e_1^0 + \frac{(N_1^0 + X^I N_1^I + X^{II} N_1^{II}) L_1}{E_1 A_1} \right) \quad (3.3.9)$$

El signo menos en la deformación es debido a que las fuerzas aplicadas (X^I) suponen que la barra está traccionada, debido a lo cual un acortamiento de la misma debe llevar signo negativo.

Teniendo en cuenta que la fuerza virtual en la barra 1 es unitaria, y que en el estado I el esfuerzo en la barra 2 (N_2^I) vale cero, se puede pasar la

deformación de la barra 1 al segundo miembro, con lo que la ecuación anterior queda en la forma (que corresponde con el planteamiento del capítulo 2)

$$0 = \sum_{j=1}^b N_j^I \left(e_j^0 + \frac{(N_j^0 + X^I N_j^{II} + X^{II} N_j^{III}) L_j}{E_j A_j} \right) \quad (3.3.10)$$

De la misma forma, para la barra 2 se obtiene

$$0 = \sum_{j=1}^b N_j^{II} \left(e_j^0 + \frac{(N_j^0 + X^I N_j^{II} + X^{II} N_j^{III}) L_j}{E_j A_j} \right) \quad (3.3.11)$$

Así pues, se ha obtenido un sistema de dos ecuaciones de compatibilidad, que permite obtener los valores de las dos incógnitas hiperestáticas. A partir de estos valores se obtienen los esfuerzos en todas las barras.

Una vez obtenidos los esfuerzos en todas las barras, el cálculo de desplazamientos es un problema geométrico similar al de las estructuras isostáticas.

3.4 CÁLCULO DE MOVIMIENTOS

Conocidos los esfuerzos en las barras, se conocen también de forma inmediata las deformaciones, y partiendo de los puntos de apoyo, la determinación del movimiento en cualquier nudo de la estructura es un problema determinado que se resuelve considerando la compatibilidad de las deformaciones conocidas. Estas condiciones de compatibilidad se pueden establecer de forma geométrica (recordar Diagrama de Williot) o mediante la utilización del Principio de los Trabajos Virtuales.

Para el cálculo de un movimiento de un nudo, se puede aplicar el Principio de los Trabajos Virtuales utilizando como sistema de movimientos el real y como sistema de fuerzas en equilibrio, el que resulta de aplicar una carga unidad en el nudo y en la dirección del movimiento a calcular, de forma que aparezca aislado dicho movimiento como única incógnita de la ecuación, repitiéndose el proceso para cada uno de los movimientos que se deseen calcular.

Para el caso de estructuras hiperestáticas el proceso es igual. Una cuestión que a primera vista parece plantearse, es que para la carga unidad hay que resolver un problema hiperestático, en realidad no se plantea puesto que, como ya ha sido indicado, el sistema de fuerzas virtuales debe estar en equilibrio, pero no se exige que los movimientos que produce sean compatibles con los enlaces de la estructura. Por ello, se puede escoger un sistema en equilibrio en el que se anulen tantas incógnitas hiperestáticas como sean necesarias para que la estructura sea isostática.

EJEMPLO 3.1

Dada la estructura articulada con las cargas indicadas de la Figura 3E1.1, se sabe que la barra \overline{AB} sufre un incremento de temperatura de 20°C , así como tiene un defecto de montaje de $0,01\text{ cm}$ esta barra, y un movimiento horizontal hacia la derecha del apoyo D de 1 mm . Determine los esfuerzos en todas las barras de la estructura.

Datos:

Para todas las barras:

$$E = 2,1 \cdot 10^6 \text{ Kg/cm}^2$$

$$A = 25 \text{ cm}^2$$

$$\alpha = 1,2 \cdot 10^{-5} \text{ }^{\circ}\text{C}^{-1}$$

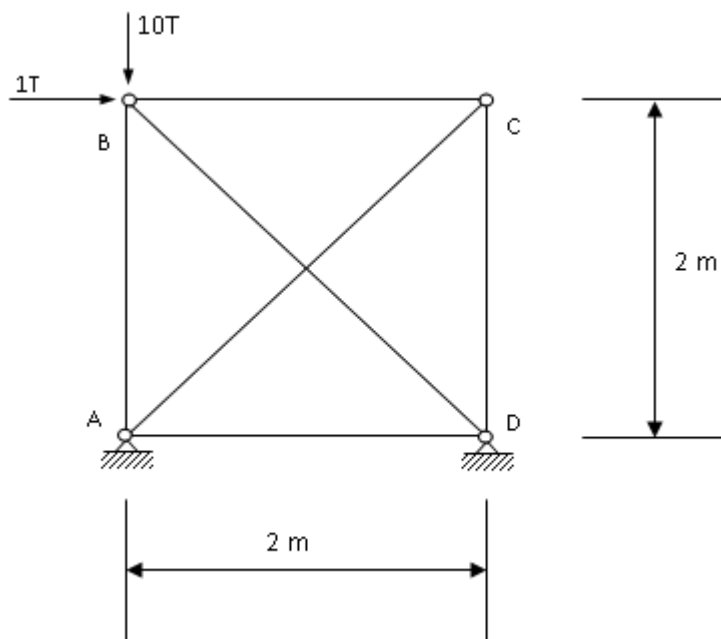


FIGURA 3E1.1

Clasificación de la estructura

$$\text{Grado de hiperestaticidad: } GH = b - 2m + t = 6 - 2 \cdot 4 + 4 = 2$$

La estructura es hiperestática de grado dos, debido a la existencia de una barra y una reacción superabundantes.

Tomaremos como elementos superabundantes la barra \overline{BD} , que sustituiremos por su esfuerzo incógnita y la reacción horizontal en el apoyo D, que también sustituiremos por su reacción incógnita.