

ÍNDICE

1	CONCEPTOS BÁSICOS.....	3
1.1	GENERALIDADES.....	3
1.1.1	CONCEPTO DE ESTRUCTURA.....	3
1.1.2	EL CÁLCULO EN EL PROCESO GENERAL DE DISEÑO.....	4
1.1.3	TIPOLOGÍA O CLASIFICACIÓN.....	6
1.2	PRINCIPIOS BÁSICOS.....	8
1.2.1	PEQUEÑOS DESPLAZAMIENTOS.....	8
1.2.2	COMPORTAMIENTO LINEAL.....	9
1.2.3	SUPERPOSICIÓN.....	10
1.3	RELACIONES FUNDAMENTALES.....	11
1.3.1	EQUILIBRIO.....	11
1.3.2	RELACIÓN ENTRE MOVIMIENTOS Y DEFORMACIONES. COMPATIBILIDAD.....	13
1.3.3	LEY DE COMPORTAMIENTO.....	15
1.4	CONDICIONES DE CONTORNO.....	21
1.5	DETERMINACIÓN E INDETERMINACIÓN ESTÁTICA.....	22
1.6	INDETERMINACIÓN CINEMÁTICA. GRADOS DE LIBERTAD.....	25
1.7	MÉTODOS DE CÁLCULO DE ESTRUCTURAS.....	27
1.7.1	MÉTODO DE COMPATIBILIDAD.....	28
1.7.2	MÉTODO DE EQUILIBRIO.....	30

1.8	COMPARACIÓN ENTRE LOS MÉTODOS DE CÁLCULO DE ESTRUCTURAS	34
2	EL PRINCIPIO DE LOS TRABAJOS VIRTUALES Y TEOREMAS DE LA ENERGIA.....	37
2.1	INTRODUCCIÓN	37
2.2	PROBLEMA DE VALORES EN EL CONTORNO. PLANTEAMIENTO DIFERENCIAL	38
2.3	TRABAJO, ENERGIA DE DEFORMACIÓN Y SUS COMPLEMENTARIOS	46
2.4	FORMULACIÓN INTEGRAL DEL PROBLEMA DE VALORES EN EL CONTORNO	52
2.4.1	<i>PRINCIPIO DE LOS TRABAJOS VIRTUALES</i>	<i>52</i>
2.4.2	<i>FORMULACIÓN DÉBIL DEL PROBLEMA DE VALORES EN EL CONTORNO</i>	<i>53</i>
2.5	APLICACIONES DEL PRINCIPIO DE LOS TRABAJOS VIRTUALES (P.T.V.)	65
2.5.1	<i>APLICACIÓN DEL P.T.V. EN ESTRUCTURAS DE NUDOS ARTICULADOS.....</i>	<i>65</i>
A.1.1.2	<i>APLICACIÓN DEL PRINCIPIO DE LOS TRABAJOS VIRTUALES EN ESTRUCTURAS DE BARRAS EN GENERAL.....</i>	<i>72</i>
2.6	TEOREMAS ENERGÉTICOS.....	75
2.6.1	<i>TEOREMAS DE MAXWELL Y BETTI</i>	<i>75</i>
2.6.2	<i>TEOREMA DE ENGESSER (1889).....</i>	<i>77</i>
2.6.3	<i>TEOREMA DE CASTIGLIANO (2ª PARTE) (1879)</i>	<i>77</i>
2.6.4	<i>TEOREMA DEL MINIMO POTENCIAL TOTAL</i>	<i>78</i>

2.6.5	TEOREMA DE CASTIGLIANO (1ª Parte)	79
3	CÁLCULO DE SISTEMAS ISOSTÁTICOS	82
3.1	INTRODUCCIÓN	82
3.2	MÉTODOS DE RESOLUCIÓN	82
3.2.1	MÉTODO DE LOS NUDOS	83
3.2.2	MÉTODO GRÁFICO DE MAXWELL-CREMONA	85
3.2.3	MÉTODO DE LAS SECCIONES	89
3.3	ESTRUCTURAS COMPLEJAS. MÉTODO DE HENNEBERG	92
3.4	CÁLCULO DE DESPLAZAMIENTOS	97
3.4.1	DIAGRAMA DE WILLIOT	97
3.4.2	PRINCIPIO DE LOS TRABAJOS VIRTUALES	102
4	MÉTODO DE COMPATIBILIDAD	108
4.1	INTRODUCCIÓN	108
4.2	LIBERACIÓN DE VÍNCULOS. ELECCIÓN DE LAS INCÓGNITAS	108
4.3	P.T.V. PRINCIPIO DE LOS TRABAJOS VIRTUALES	110
4.4	CÁLCULO DE MOVIMIENTOS	117
5	MÉTODO DE EQUILIBRIO	125
5.1	GRADOS DE LIBERTAD	125
5.1.1	DEFINICIONES	125
5.1.2	REDUCCIÓN DEL NÚMERO DE GRADOS DE LIBERTAD	126

5.2	RELACIONES DE COMPORTAMIENTO DE LA BARRA PRISMÁTICA.....	133
5.2.1	FUERZAS DE EMPOTRAMIENTO.	133
5.2.2	RELACIONES DE COMPORTAMIENTO DE LA BARRA.	136
5.3	FORMULACIÓN DEL MÉTODO DE LA RIGIDEZ.	138
5.3.1	EL MÉTODO DIRECTO DE LA RIGIDEZ EN CELOSÍAS.	139
5.3.2	EL MÉTODO DIRECTO DE LA RIGIDEZ EN ESTRUCTURAS RETICULARES.....	144
5.4	MÉTODO DE CROSS.....	148
5.4.1	INTRODUCCIÓN.....	148
5.4.2	HIPÓTESIS PRELIMINARES.....	148
5.4.3	DEFINICIONES PREVIAS.....	149
5.4.4	BASES.....	153
5.4.5	MÉTODO.....	154
5.4.6	CASOS PARTICULARES DE APLICACIÓN.....	156
5.5	ESTRUCTURAS TRASLACIONALES.....	162
5.6	FORMULACIÓN MATRICIAL DEL MÉTODO DE LA RIGIDEZ.	168
5.6.1	EL ELEMENTO. MATRICES DE RIGIDEZ ELEMENTALES EN COORDENADAS LOCALES Y GLOBALES.....	172
5.6.2	SISTEMATIZACIÓN DEL CÁLCULO.....	180
5.6.3	CONCLUSIONES.....	181
5.7	ESTRUCTURAS SIMÉTRICAS.....	182
5.7.1	ESTRUCTURAS PLANAS SIMÉTRICAS.....	182

5.7.2	CONSIDERACIÓN DE LA SIMETRÍA	183
5.7.3	SIMETRÍA AXIAL	198
6	INESTABILIDAD	202
6.1	GRANDES DEFORMACIONES.....	202
6.2	GRANDES DESPLAZAMIENTOS.	204
6.3	NO-LINEALIDAD GEOMÉTRICA.	208
6.4	MÉTODOS DE ANÁLISIS. PLANTEAMIENTOS EN BIFURCACIÓN.	210
6.5	MÉTODOS DE ANÁLISIS. GENERALIZACIÓN DE LOS PLANTEAMIENTOS EN BIFURCACIÓN.	213
6.6	MÉTODOS DE ANÁLISIS. PLANTEAMIENTOS EN AMPLIFICACIÓN.....	216
6.7	ANÁLISIS DE PÓRTICOS.....	218
6.7.1	MULTIPLICADORES DE CARGA	219
6.7.2	PANDEO GLOBAL Y LOCAL	220
6.7.3	PÓRTICOS IDEALES Y PÓRTICOS REALES.....	221
6.7.4	IMPERFECCIONES GLOBALES Y LOCALES	221
7	CÁLCULO PLÁSTICO DE ESTRUCTURAS DE BARRAS.....	225
7.1	INTRODUCCIÓN	225
7.2	COMPORTAMIENTO DE LA SECCIÓN	226
7.2.1	HIPÓTESIS.....	226
7.2.2	COMPORTAMIENTO DE LA SECCIÓN SOMETIDA A TRACCIÓN O COMPRESIÓN SIMPLES	227

7.2.3	COMPORTAMIENTO DE LA SECCIÓN SOMETIDA A FLEXIÓN PURA	227
7.2.4	COMPORTAMIENTO DE LA SECCIÓN SOMETIDA A FLEXIÓN SIMPLE.....	231
7.2.5	COMPORTAMIENTO DE LA SECCIÓN SOMETIDA A FLEXIÓN COMPUESTA.....	235
7.3	MÉTODOS PASO A PASO PARA EL CÁLCULO DE ESTRUCTURAS DE BARRAS.....	237
7.3.1	ESTRUCTURAS DE NUDOS ARTICULADOS	237
7.3.2	ESTRUCTURAS DE NUDOS RÍGIDOS	239
7.4	MÉTODOS ESTÁTICO Y CINEMÁTICO.....	246
7.4.1	MÉTODO ESTÁTICO	246
7.4.2	MÉTODO CINEMÁTICO.....	248
7.5	TEOREMAS BÁSICOS.....	250
7.5.1	TEOREMA ESTÁTICO O DE MÍNIMO.....	250
7.5.2	TEOREMA CINEMÁTICO O DE MÁXIMO.....	251
7.5.3	TEOREMA DE UNICIDAD.....	252
7.5.4	MÉTODO DE COMBINACIÓN DE MECANISMOS.....	253
7.6	CÁLCULO DE MOVIMIENTOS.....	255
7.6.1	CÁLCULO DE MOVIMIENTOS Y ANÁLISIS DE LA ZONA PLASTIFICADA	256
7.6.2	MÉTODOS APROXIMADOS PARA EL CÁLCULO DE MOVIMIENTOS	259

2 EL PRINCIPIO DE LOS TRABAJOS VIRTUALES Y TEOREMAS DE LA ENERGIA

2.1 INTRODUCCIÓN

El presente capítulo es conceptualmente clave para asimilar las ideas fundamentales del cálculo de estructuras. Al comienzo se define lo que se ha denominado problema de valores en el contorno y se estudian con detalle las ecuaciones de campo y condiciones de contorno de los elementos que se utilizarán a lo largo del curso. Se trata de dejar clara, utilizando únicamente las relaciones de equilibrio, comportamiento y compatibilidad, la formulación fuerte o diferencial del problema.

El planteamiento se realiza de forma general y luego, en los siguientes capítulos del texto, se particularizarán para los distintos tipos de problemas a abordar.

A continuación se introducen conceptos básicos de energía de deformación y trabajo, conceptos ya conocidos pero que merece la pena repasar ya que se utilizarán de forma más o menos explícita (p.e. inmediatamente después al plantear la Formulación Variacional) a lo largo del curso y de forma directa al plantear, al final del capítulo, los teoremas energéticos, lo que tiene un indudable interés desde el punto de vista histórico y didáctico, aunque en el capítulo ya se haya abordado un planteamiento más general con el Principio de los Trabajos Virtuales.

La parte más importante del capítulo es la formulación integral, alternativa a la diferencial, del problema de valores en el contorno. Ésta es la base de los métodos de búsqueda de soluciones aproximadas utilizadas ampliamente en el momento actual y entre los que hay que destacar el Método de los Elementos Finitos. Incluso en el texto se llega a introducir la idea de aproximación, aunque sólo sea para que el alumno intuya las posibilidades que se abren con este planteamiento.

En la formulación se utiliza una notación general pero, con objeto de ir asentando ideas, los ejemplos se centran en problemas estructurales. No obstante, también se incluye algún ejemplo de problemas de potencial, para que no se pierda de vista el importante hecho de que el método es aplicable a muchos otros tipos de problemas.

En el capítulo se incluyen algunas aplicaciones del Principio de los Trabajos Virtuales a casos de estructuras de barras con objeto de aclarar ideas y revisar de nuevo, ahora con unas bases más sólidas, los dos grandes grupos existentes de métodos para el Cálculo de Estructuras. No obstante en los Capítulos siguientes, se retoma de forma más pormenorizada el estudio de la utilización de estos métodos para el caso de estructuras de barras y se insiste en los conceptos básicos aquí tratados.

2.2 PROBLEMA DE VALORES EN EL CONTORNO. PLANTEAMIENTO DIFERENCIAL

Para comenzar, cabe indicar que un problema de valores en el contorno se entiende que es un problema descrito mediante un modelo matemático que aproxima *aceptablemente* la solución, normalmente en términos de:

- Ecuaciones en el dominio

$$\mathbf{A}u=f \quad \text{en } \Omega \quad (2.2.1)$$

- y unas condiciones (es decir otras ecuaciones) sobre sus contornos:

$$\mathbf{C}u=g \quad \text{en } \delta\Omega \quad (2.2.2)$$

donde \mathbf{A} es un operador diferencial de orden $2k$, y \mathbf{C} otro operador diferencial en el contorno, ambos característicos del problema en estudio (en el caso más general de utilizar funciones vectoriales, operadores matriciales en derivadas parciales), \mathbf{u} es la variable de campo (con carácter escalar o vectorial, y que, para entendernos, en el planteamiento de Navier es la función de desplazamientos), cuyo valor dependerá del punto (espacio) y del instante (tiempo) en estudio, y por último, \mathbf{f} y \mathbf{g} son funciones conocidas, congruentes con los operadores, y que constituyen los datos del problema.

Los espacios de definición de \mathbf{u} y \mathbf{f} son \mathbf{U} y \mathbf{F} que en general son *espacios métricos*, es decir, donde se ha definido una *distancia* entre funciones, que permite evaluar si las funciones son iguales (si la *distancia* es nula), así como los *errores* entre dos soluciones aproximadas.

Por tanto \mathbf{A} es un operador que transforma elementos de \mathbf{U} en elementos de \mathbf{F} , lo que se puede escribir como

$$\mathbf{A} : \mathbf{U} \rightarrow \mathbf{F} \quad (2.2.3)$$

Este planteamiento diferencial, basado en el análisis del comportamiento de un elemento diferencial del continuo que conduce a un conjunto de ecuaciones diferenciales, en ocasiones implica exigencias excesivas sobre la variable de campo, lo que puede suponer que resulte imposible encontrar una función que cumpla los requisitos de derivabilidad ($2k$ según se indicó anteriormente) planteados.

EJEMPLO 2.1

En el caso elástico la formulación diferencial se plantea, como ya se indicó anteriormente, mediante la aplicación de las ecuaciones básicas:

- Relación deformación-desplazamiento, que establece en cada punto del dominio una relación cinemática como:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{H} \mathbf{u} \quad (2E1.1)$$

Capítulo II.- EL PRINCIPIO DE LOS TRABAJOS VIRTUALES Y
TEOREMAS DE LA ENERGIA

donde \mathbf{u} es el vector de desplazamiento, $\boldsymbol{\varepsilon}$ el vector³ de deformaciones y la matriz \mathbf{H} el operador que relaciona ambos (en elastiostática siempre es una matriz diferencial de orden k).

- Ecuaciones de comportamiento que relacionan magnitudes cinemáticas y estáticas de la forma

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} \quad (2E1.2)$$

donde $\boldsymbol{\sigma}$ es el vector de tensiones y \mathbf{D} la matriz de constantes elásticas dependiente del material, que se ha visto en el tema anterior.

- Ecuaciones de equilibrio que relacionan magnitudes estáticas de la forma

$$\mathbf{f} = \mathbf{Q} \boldsymbol{\sigma} \quad (2E1.3)$$

donde \mathbf{f} es el vector de cargas y \mathbf{Q} un operador diferencial denominado matriz de equilibrio (que es del mismo orden que \mathbf{H} , es decir, k).

Introduciendo (2E1.1) en (2E1.2), se tiene

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\mathbf{H}\mathbf{u} = \mathbf{S}\mathbf{u} \quad (2E1.4)$$

En la que \mathbf{S} es un operador de orden k .

Al sustituir (2E1.4) en (2E1.3), se tiene

$$\mathbf{f} = \mathbf{Q}\mathbf{S}\mathbf{u} = \mathbf{A}\mathbf{u} \quad (2E1.5)$$

Con lo que se ha llegado a la expresión (2.2.1) que en este caso es la ecuación de Navier (de equilibrio en términos de desplazamientos), pudiéndose apreciar que el operador \mathbf{A} siempre es un operador par (de orden $2k$).

- Condiciones de contorno

Las condiciones de contorno pueden ser esenciales, que se refieren a la función y sus $(k-1)$ primeras derivadas y que se pueden expresar como:

$$\mathbf{F}\mathbf{u} = \mathbf{v} \quad \text{en } \delta\Omega \quad (2E1.6)$$

y que en el caso elástico corresponde a fijar una serie de desplazamientos,

$$v_i = \bar{v}_i \quad \text{en } \delta\Omega \quad (2E1.7)$$

es decir que $\mathbf{v} = \mathbf{I} \mathbf{u}$, donde en este caso \mathbf{I} es la matriz unidad.

Las condiciones de contorno naturales, se refieren a las derivadas de orden (k) a $(2k-1)$

$$\mathbf{N} \mathbf{u} = \mathbf{h} \quad \text{en } \delta\Omega \quad (2E1.8)$$

que en este caso se podría escribir

$$T_i = \bar{T}_i \quad \text{en } \delta\Omega \quad (2E1.9)$$

donde

$$\mathbf{T} = \mathbf{G} \boldsymbol{\sigma} \quad (2E1.10)$$

Siendo, para el caso de elasticidad tridimensional,

³ Es interesante observar que la ecuación 2E1.1 no es una ecuación vectorial sino únicamente una forma matricial para expresar estas relaciones que resulta cómoda, y así, el tensor de deformaciones $\boldsymbol{\varepsilon}$ se representa como vector únicamente a efectos de disposición en forma de columna.

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} n_x & n_y & n_z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n_x & 0 & n_y & n_z & 0 \\ 0 & 0 & n_x & 0 & n_y & n_z \end{bmatrix} \quad (2E1.11)$$

y, como siempre, la barra indica valores conocidos.

EJEMPLO 2.2

Como segundo ejemplo se estudia el comportamiento de una membrana inextensible y totalmente flexible situada en el plano xy , sometida a cargas en la dirección del eje z , suponiendo además, que las tensiones de la membrana en su plano, no dependen de la sección en la que estén actuando, es decir

$$T_x = T_y = T \quad (2E2.1)$$

- Por otra parte, los componentes verticales se notan como Q_x ó Q_y tal y como se puede ver en la figura 2E2.1.

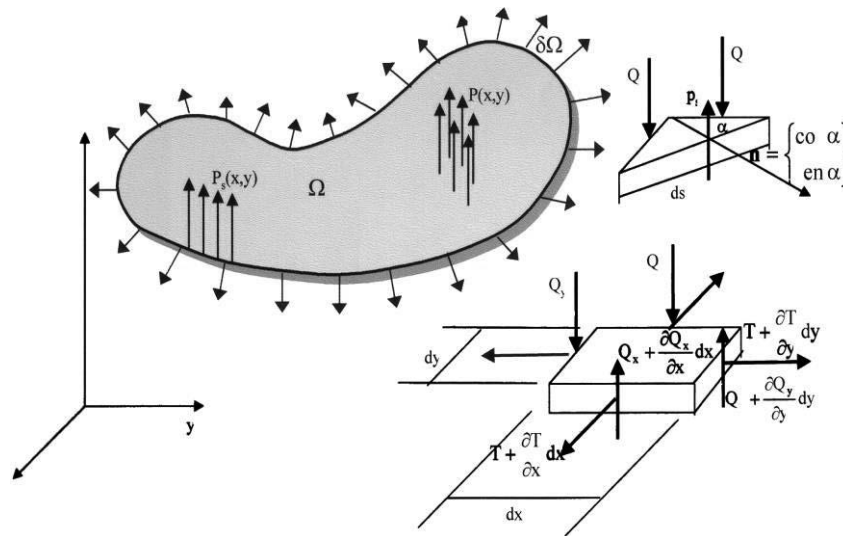


FIGURA 2E2.1.

Estableciendo el equilibrio en direcciones x e y :

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial T}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial T}{\partial y} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow T = \text{Cte} \quad (2E2.2)$$

y en dirección z

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + p = 0 \quad (2E2.3)$$

- En el contorno (ver figura 2E2.1), el equilibrio conduce

$$- Q_x \cos \alpha \, ds - Q_y \sin \alpha \, ds + p_s \, ds = 0 \quad (2E2.4)$$

$$p_s = Q_x \cos \alpha + Q_y \sin \alpha \quad (2E2.5)$$

Estas ecuaciones se pueden escribir de forma más compacta como:

$$\nabla^T \mathbf{Q} + \mathbf{p} = 0 \quad \text{en } \Omega \quad (2E2.6)$$

$$\mathbf{n}^T \mathbf{Q} = p_s \quad \text{en } \delta\Omega \quad (2E2.7)$$

Capítulo II.- EL PRINCIPIO DE LOS TRABAJOS VIRTUALES Y TEOREMAS DE LA ENERGIA

Las ecuaciones de compatibilidad en el dominio Ω , relacionan los desplazamientos w en dirección z y las pendientes $\boldsymbol{\gamma} = \begin{Bmatrix} \gamma_x \\ \gamma_y \end{Bmatrix}$

Así

$$\boldsymbol{\gamma} = \nabla w \quad (2E2.8)$$

y en el contorno

$$w = w_s \quad (2E2.9)$$

Las ecuaciones de comportamiento relacionan tensiones con deformaciones y en este caso (ver figura 2E2.2), se tiene

$$\mathbf{Q} = \mathbf{T} \boldsymbol{\gamma} \quad (2E2.10)$$

con los significados antes señalados.

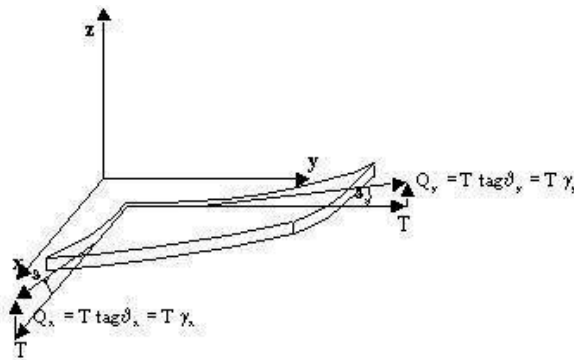


FIGURA 2E2.2

Si se sustituyen las ecuaciones de compatibilidad (2E2.8) en las de comportamiento (2E2.10)

$$\mathbf{Q} = \mathbf{T} \nabla w \quad (2E2.11)$$

que al ser introducida en las ecuaciones de equilibrio

$$\nabla^T (\mathbf{T} \nabla w) + \mathbf{p} = 0 \quad \text{en } \Omega \quad (2E2.12)$$

Que es la ecuación de campo del problema en estudio, a la que habrá que añadir las condiciones de contorno, que pueden ser:

- De desplazamiento (Dirichlet)

$$w = w_s \quad \text{en } \delta\bar{\Omega} \quad (2E2.13)$$

que se van a considerar en adelante homogéneas $w = w_s = 0$ en este caso.

- De fuerza (Neumann)

$$\mathbf{n}^T \mathbf{Q}_s = \mathbf{p}_s \quad \text{en } \delta\bar{\bar{\Omega}} \quad (2E2.14)$$

donde $\delta\Omega = \delta\bar{\Omega} \cup \delta\bar{\bar{\Omega}}$

EJEMPLO 2.3

En este ejemplo se estudia el caso de una barra recta sometida a esfuerzos axiales, torsores, de flexión y cortantes. La formulación diferencial o fuerte, se plantea, como siempre, a partir de las ecuaciones básicas.

En el caso de barras también es conveniente expresar las condiciones de equilibrio en términos de resultados de tensiones, que es lo que se denominan "esfuerzos", mejor que en función de las propias tensiones.

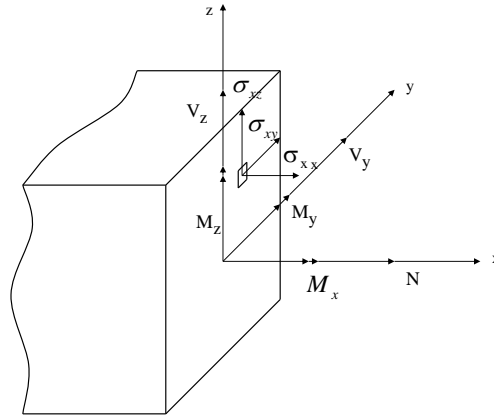


FIGURA 2E3.1

Del equilibrio entre las tensiones en la sección y los esfuerzos sobre la sección, se puede escribir:

Axil:
$$N = \int_A \sigma_{xx} dA$$

Cortantes:
$$V_y = \int_A \sigma_{xy} dA \quad ; \quad V_z = \int_A \sigma_{xz} dA$$

Torsor:
$$M_z = - \int_A (\sigma_{xy} \cdot z - \sigma_{xz} \cdot y) dA$$

Flectores:
$$M_y = \int_A \sigma_x \cdot z dA \quad ; \quad M_x = - \int_A \sigma_x \cdot y dA$$

Para obtener los esfuerzos es pues necesario integrar las tensiones, pero al ser éstas función de las otras coordenadas, el problema se convierte en complejo de resolver. Por ejemplo, el momento flector M_y es función de la tensión σ_{xx} que a su vez es función de las coordenadas y, z .

Con objeto de simplificar, lo normal es introducir la hipótesis de Navier, eso es suponer que las secciones planas normales a la directriz de la barra antes de la deformación, permanecen planas y normales a la directriz tras la deformación. Así mismo se desprecian las tensiones σ_{yz}, σ_{zz} y σ_{yy} .

- Esfuerzo axial

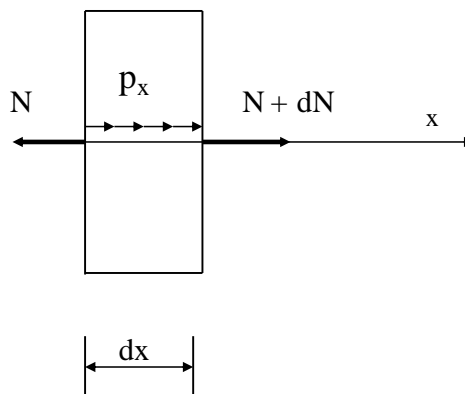


FIGURA 2E3.2

- Relación deformación-desplazamientos:

$$\epsilon_{xx} = \frac{du_x}{dx} \tag{2E3.1}$$

Capítulo II.- EL PRINCIPIO DE LOS TRABAJOS VIRTUALES Y
TEOREMAS DE LA ENERGIA

- Ecuación de comportamiento:

$$N = E A \epsilon_{xx} \quad (2E3.2)$$

- Ecuación de equilibrio:

$$\frac{dN}{dx} = -p_x \quad (2E3.3)$$

Sustituyendo (2E3.1) en (2E3.2) y posteriormente esta en (2E3.3.) se obtiene

$$\frac{d}{dx} \left(EA \frac{du_x}{dx} \right) = -p_x \quad (2E3.4)$$

- Condiciones de contorno:

$$\left. \begin{array}{l} EA \frac{du_x}{dx} = \bar{N} \\ \text{ó} \\ u_x = \bar{u}_x \end{array} \right\} \text{en } x = 0 \quad \text{y} \quad x = 1 \quad (2E3.5)$$

- Momentos flectores.

En este caso se considera únicamente el plano xy , es decir el momento M_z , siendo análogo para el momento flector M_y en el plano xz .

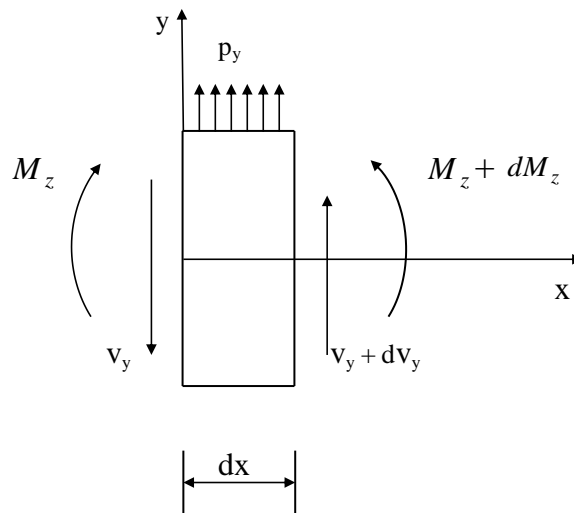


FIGURA 2E3.3

- Relación deformación-desplazamientos:

$$\chi_z = \frac{d^2 u_y}{dx^2} \quad (2E3.6)$$

- Ecuación de comportamiento:

$$M_z = E I_z \chi_z \quad (2E3.7)$$

- Ecuación de equilibrio:

$$\frac{d^2 M_z}{dx^2} = p_y \quad (2E3.8)$$

Capítulo II.- EL PRINCIPIO DE LOS TRABAJOS VIRTUALES Y TEOREMAS DE LA ENERGIA

En las que I_z y χ_z son el momento de inercia y la curvatura respecto al eje z respectivamente.

Sustituyendo (2E3.6) en (2E3.7) y la resultante en (2E3.8), se obtiene:

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(EI_z \frac{d^2 u_y}{dx^2} \right) = p_y \quad (2E3.9)$$

- Condiciones de contorno

Con las posibles condiciones de contorno (deben ser cuatro ya que al ser una ecuación diferencial de orden cuatro aparecerán cuatro constantes de integración).

$$EI_z \frac{d^2 u_y}{dx^2} = \bar{M}_z, \quad \frac{du_y}{dx} = \bar{\phi}_y \quad \text{en } x = 0 \text{ y } x = l \quad (2E3.10)$$

• Esfuerzo cortante

Sin considerar la deformación a cortante. Como en el caso anterior sólo se estudia el plano xy.

- Relación deformación-desplazamientos:

$$\gamma_{xy} = \frac{du_y}{dx} \quad (2E3.11)$$

- Ecuación de comportamiento:

$$V_y = G A_y \gamma_{xy} \quad (2E3.12)$$

- Ecuación de equilibrio:

$$\frac{dV_y}{dx} = -p_y \quad (2E3.13)$$

donde A_y es el área a cortante, de valor $A_y = KA$ si se tiene en cuenta lo indicado en el capítulo anterior.

Sustituyendo (2E3.11) en (2E3.12) y la resultante en (2E3.13), se obtiene:

$$\frac{d}{dx} \left(G A_y \frac{du_y}{dx} \right) = -p_y \quad (2E3.14)$$

- Condiciones de contorno

$$G A_y \frac{du_y}{dx} = \bar{V}_y \quad \text{ó} \quad u_y = \bar{u}_y \quad \text{en } x = 0 \text{ y } x = l \quad (2E3.15)$$

• Torsión:

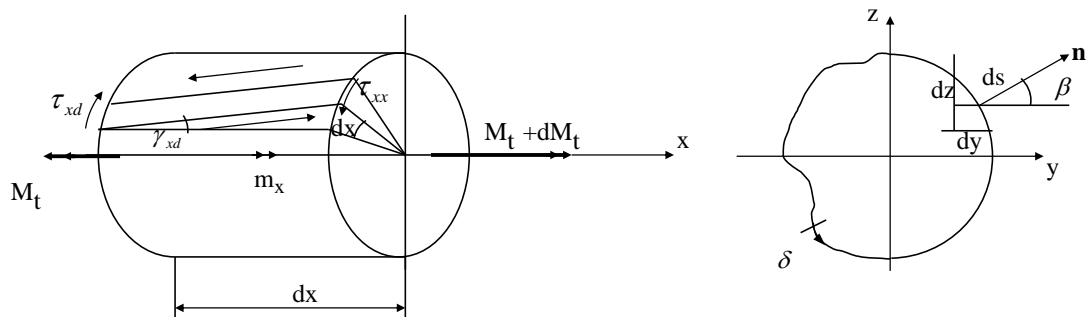


FIGURA 2E3.4

Capítulo II.- EL PRINCIPIO DE LOS TRABAJOS VIRTUALES Y
TEOREMAS DE LA ENERGIA

En el caso de sección circular, debido a la simetría, las secciones normales al eje de la barra permanecen planas y no se deforman en su plano. La distribución de tensiones cortantes, como se sabe, es en este caso

$$\sigma_{x\alpha} = \frac{M_x r}{J} \quad (2E3.16)$$

donde J es el momento de inercia polar de la sección.
El ángulo girado por unidad de longitud es:

$$\theta = \frac{d\alpha}{dx} = \frac{M_x}{GJ} \quad (2E3.17)$$

donde GJ es la denominada rigidez a torsión de la sección y $d\alpha$ el ángulo girado por dos secciones separadas de una distancia dx .

En el caso de barras prismáticas, al no haber simetría respecto a cualquier eje que pase por el centro de la sección, no se puede aplicar la teoría de Coulomb, ya que las secciones perpendiculares a la directriz no permanecen planas produciéndose alabeo. Si se supone que no se impide el alabeo, la expresión (2E3.17) sigue siendo válida con

$$J = \int_A \left(z^2 + y^2 + y \frac{\partial \phi}{\partial z} - z \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) dy dz \quad (2E3.18)$$

donde ϕ es una función armónica denominada función de alabeo.

El análisis se realizará obteniendo la función de alabeo mediante la resolución de la ecuación diferencial

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \quad (2E3.19)$$

con las condiciones de contorno en cada sección

$$\frac{d\phi}{dn} = -y \frac{dz}{dn} + z \frac{dy}{dn} \quad \text{en el contorno}$$

Con esto se obtiene el desplazamiento y y $J(x)$ mediante la ecuación (2E3.18).
Para mayor detalle ver (Ref. 9).

- Relación deformación-desplazamientos:

$$\frac{d\alpha}{dx} = \theta \quad (2E3.20)$$

- Ecuación de comportamiento:

$$M_x = G J \theta \quad (2E3.21)$$

- Ecuación de equilibrio:

$$\frac{dM_x}{dx} = -m_x \quad (2E3.22)$$

donde m_x es el momento torsor distribuido por unidad de longitud.

Sustituyendo (2E3.20) en (2E3.21) y la resultante en (2E3.22) se obtiene:

$$\frac{d}{dx} \left(G J \frac{d\alpha}{dx} \right) = -m_x \quad (2E3.23)$$

- Condiciones de contorno

$$GJ \frac{d\alpha}{dx} = \bar{M}_x \text{ ó } \alpha = \bar{\alpha} \text{ en } x = 0 \text{ y } x = 1 \quad (2E3.24)$$

2.3 TRABAJO, ENERGIA DE DEFORMACIÓN Y SUS COMPLEMENTARIOS

Se considera en primer lugar una barra de una estructura articulada con una longitud inicial L_0 , que sometida a ciertas condiciones adquiere la longitud:

$$L = L_0 + \Delta l \quad (2.3.1)$$

en la que la variación de longitud Δl se puede expresar en general de la forma:

$$\Delta l = e + \lambda \quad (2.3.2)$$

donde e es la variación de longitud debida a un esfuerzo axial N y λ la correspondiente a otras condiciones tales como, por ejemplo, la temperatura.

Si hay una relación unívoca fuerza-desplazamiento, que para un caso general (no lineal) será de la forma indicada en la figura 2.3.1, el área bajo la curva es el trabajo realizado para estirar la barra una cantidad e , que en el caso de que la fuerza se aplique gradualmente de forma que la energía cinética sea cero (sistema conservativo) es igual a la energía potencial de la barra en la posición alargada y se denomina energía de deformación:

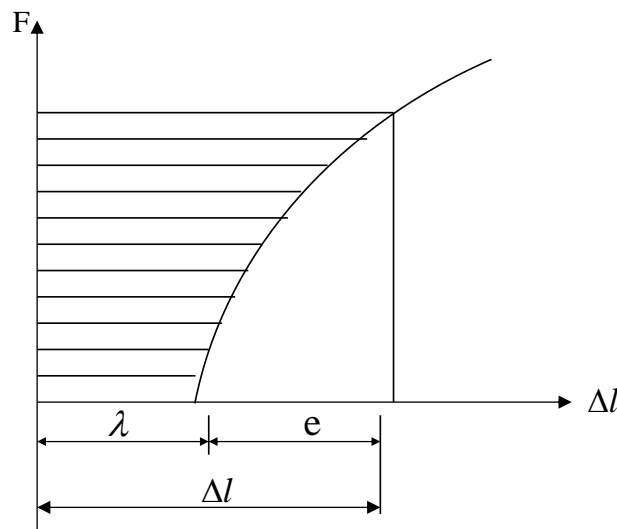


FIGURA 2.3.1

$$U = \int_0^e N de \quad (2.3.3)$$

La energía de deformación para toda la estructura de barras articuladas es:

$$U = \sum_{n=1}^{N^{\circ} \text{ barras}} \int_0^e N de \quad (2.3.4)$$

En general se puede escribir la energía de deformación para cualquier tipo de esfuerzo como:

$$U = \int_0^e F de \quad (2.3.5)$$

Como es sabido, el trabajo realizado por una carga P sobre un desplazamiento u es:

$$W = \int_0^u P du \quad (2.3.6)$$

La energía complementaria se define en general como:

$$C = \int_0^F e dF \quad (2.3.7)$$

y no tiene un significado físico, debiendo su nombre a que es una cantidad complementaria de la energía de deformación, en el sentido de que:

$$U + C = F e \quad (2.3.8)$$

De forma análoga se define el trabajo complementario como:

$$W_c = \int_0^F u dp \quad (2.3.9)$$

En el caso de la barra a que nos hemos referido al comienzo de este punto, la energía complementaria es:

$$C = N\lambda + \int_0^N e dN \quad (2.3.10)$$

es decir que tal como se indica en (2.3.8)

$$U + C = N \Delta l = N (\lambda + e) \quad (2.3.11)$$

La energía complementaria para toda la estructura se define de la forma:

$$C = \sum_{n=1}^{N^{\circ} \text{ barras}} \left[N\lambda + \int_0^N e dN \right] \quad (2.3.12)$$

Otra cantidad que será de utilidad es el potencial total ϕ , que se define como:

$$\phi = U + V \quad (2.3.13)$$

en la que U es la energía de deformación de la estructura y V la energía potencial de las cargas exteriores.

Para el caso de una estructura articulada plana, la energía potencial de las cargas exteriores es:

$$V = - \sum_{n=1}^{N^{\circ} \text{ de Nudos}} \left[P_x u_x + P_y u_y \right] \quad (2.3.14)$$

en la que P_x y P_y son las componentes de la fuerza que actúa sobre cada nudo y u_x , u_y las componentes del movimiento de dicho nudo según las direcciones x e y.

La energía potencial de las cargas exteriores, en general, vendrá dada por la expresión:

$$V = -\int_{\Omega} \mathbf{u}^T \mathbf{f} d\Omega - \int_{\delta\Omega} \mathbf{u}^T \mathbf{T}^n d\delta\Omega \quad (2.3.15)$$

en la \mathbf{u} que es el vector de desplazamientos, \mathbf{f} son las fuerzas por unidad de volumen sobre el dominio Ω y \mathbf{T}^n son las fuerzas por unidad de superficie sobre el contorno $\delta\Omega$.

Si se supone ahora un elemento elástico de volumen dv como el representado en la figura 2E3.1, perteneciente a una barra de sección uniforme, sobre el que actúa únicamente una tensión σ_{xx} que produce una deformación ε_{xx} , relacionadas por la curva de la figura 2.3.2a.

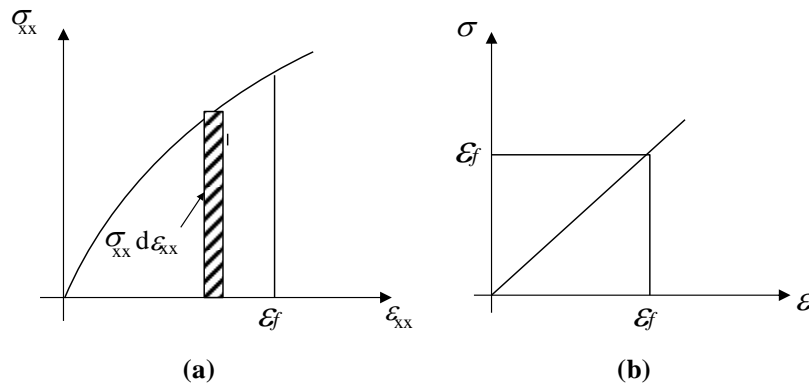


FIGURA 2.3.2

La energía de deformación o energía potencial elástica almacenada por el elemento es:

$$dU = dv \int_0^{\varepsilon_f} \sigma_{xx} d\varepsilon_{xx} \quad (2.3.16)$$

Si el material obedece a la Ley de Hooke, la curva tensión-deformación es una recta (ver figura 2.3.2 (b)) y la energía de deformación por unidad de volumen es $\frac{1}{2} \sigma_f \varepsilon_f$, o como algunos autores llaman densidad de energía de deformación, obtenida al integrar la expresión (2.3.15) en dichas condiciones.

Cualquier estructura se puede pensar que está compuesta por elementos diferenciales sometidos a unas tensiones $\boldsymbol{\sigma}$ con unas deformaciones $\boldsymbol{\varepsilon}$. Puesto que las mismas consideraciones anteriores se pueden hacer cuando sobre el elemento actúan las seis componentes de la tensión, la energía de deformación total para el caso lineal, que es en el que nos centraremos a lo largo de estas notas, es:

$$U = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\varepsilon} d\Omega \quad (2.3.17)$$

o también:

$$U = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} d\Omega = \sum_{i=1}^6 \int_{\Omega} \int_0^{\varepsilon_{fi}} \sigma_i d\varepsilon_i d\Omega \quad (2.3.18)$$

en la que σ_i y ε_i son los valores de las seis componentes de la tensión y deformación respectivamente.

Como se sabe, en el caso más general para un material homogéneo e isótropo que obedece a la Ley de Hooke, la relación tensión-deformación (ver Capítulo I) es:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.3.19)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{S} \boldsymbol{\sigma} \quad (2.3.20)$$

en las que \mathbf{C} y \mathbf{S} son las matrices que aparecen en las expresiones (2.3.19) y (2.3.21).

Por tanto, la energía de deformación es para este caso:

$$U = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{S} \boldsymbol{\sigma} d\Omega \quad (2.3.21)$$

ó

$$U = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon} d\Omega \quad (2.3.22)$$

A modo de ejercicio se van a obtener a continuación las expresiones de la energía de deformación para los casos de fuerza axial, momento flector, esfuerzo cortante y torsión, para elementos homogéneos e isótropos que siguen la Ley de Hooke. Para el caso de que aparezcan juntos varios de estos tipos de fuerzas internas, la energía de deformación total es la suma de los valores correspondientes a los diferentes tipos de esfuerzos.

EJEMPLO 2.4

- *Energía de deformación debida a una fuerza axial.*

En el caso de una barra de longitud L y sección transversal A , sometida a un esfuerzo axial N según la directriz x (ver figura 2E4.1).

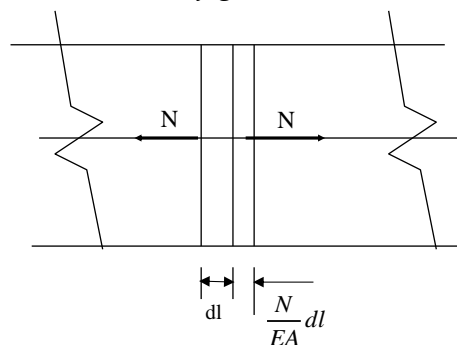


FIGURA 2E4.1

La tensión normal es:

$$\sigma_{xx} = \frac{N}{A} \quad (2E4.1)$$

y la deformación, para el caso de que el módulo de elasticidad sea E , es:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{N}{EA} \quad (2E4.2)$$

por lo que, según la expresión 2.3.17, la energía de deformación es: