

Índice

PRÓLOGO	IX
----------------	-----------

UNIDAD DIDÁCTICA I	
Teoría de Filtrado Óptimo	1

1. Representación de Estado de Sistemas Lineales	5
1.1. Representación de Estado en Tiempo Continuo	5
1.2. Matriz de Transición	10
1.2.1. Definición y Propiedades	10
1.2.2. Matriz de Transición en Sistemas de Dinámica Inva- riante	13
1.3. Evolución del Vector de Estado en Sistemas Forzados	15
1.4. Formulación Discreta	17
1.4.1. Representación de Estado en Tiempo Discreto	17
1.4.2. Representaciones equivalentes	18
1.5. Observabilidad y Controlabilidad de Sistemas	20
1.5.1. Observabilidad	20
1.5.2. Controlabilidad	23
1.5.3. Multiplicidad de Modelos	25
1.6. Matriz de Covarianza	26
1.7. Propagación de errores	29
2. Filtro de Kalman	33
2.1. Introducción	33
2.2. Filtros Recursivos	34
2.3. Formulación Discreta del Filtro de Kalman	36
2.3.1. Descripción del Problema e Hipótesis	36

2.3.2. Deducción de la Solución	38
2.3.3. Compendio de los Resultados Obtenidos	42
2.4. Ejemplo de Aplicación	44
2.5. Aplicación a la Identificación de Procesos	46
El Ejercicios de la Unidad Didáctica I	50
 UNIDAD DIDÁCTICA II	
Identificación de Procesos desde la Perspectiva de la Optimización	63
 3. Identificación por Mínimos Cuadrados	67
3.1. Introducción	67
3.2. Formulación General	68
3.2.1. Planteamiento del problema mediante un ejemplo ilustrativo	68
3.2.2. Generalización del planteamiento	69
3.2.3. Solución del problema	70
3.2.4. Cambio de notación	71
3.2.5. Solución al ejemplo ilustrativo	71
3.3. Interpretación Geométrica	72
3.4. Forma Recursiva de los Mínimos Cuadrados	74
3.4.1. Planteamiento	74
3.4.2. Resolución general	75
3.4.3. Una forma práctica para la inicialización del algoritmo	78
3.5. Implementación del Método por Computador	79
3.6. Interpretación Estadística	79
3.6.2. Estimador de máxima verosimilitud	82
3.6.3. Ejemplo ilustrativo de un estimador de máxima verosimilitud	83
3.6.4. Máxima verosimilitud en el estimador por mínimos cuadrados	84
3.7. Conexiones con el Filtro de Kalman	84
3.8. Conclusiones	87
 4. Problemática de la Aplicación Real	89
4.1. Introducción	89

4.2. Parámetros Variables con el Tiempo	90
4.2.1. Naturaleza del proceso real	90
4.2.2. El factor de olvido	91
4.2.3. Formulación recursiva	92
4.2.4. Análisis del algoritmo	94
4.3. Correlación en las Variables del Modelo	95
4.3.1. Naturaleza de la correlación	95
4.3.2. Métodos de la Respuesta Impulsional y de los Mínimos Cuadrados Extendidos	96
4.4. Identificación en Lazo Cerrado	99
4.4.1. Correlación debido a la realimentación	99
4.4.2. Elección de una realimentación con vistas a la identificación	100
4.5. Conclusiones	101
El Ejercicios de la Unidad Didáctica II	103
 UNIDAD DIDÁCTICA III	
Identificación de Procesos desde la Perspectiva de la Estabilidad	111
 5. Introducción a los Sistemas Adaptativos desde la Perspectiva de la Estabilidad	115
5.1. Introducción	115
5.2. Escenarios para el Análisis y el Diseño	116
5.3. Descripción del Sistema Adaptativo en el Caso Ideal	119
5.3.1. Ejemplo de proceso sin retardos puros	120
5.3.2. Ejemplo de proceso con retardos puros	122
5.4. Descripción del Sistema Adaptativo en el Caso Real	126
5.4.1. Descripción del proceso	126
5.4.2. Descripción de las Ecuaciones del Modelo Adaptativo	128
5.5. Diseño desde una perspectiva de estabilidad	130
 6. Análisis y Síntesis del Sistema Adaptativo en el Caso Ideal	133
6.1. Introducción	133
6.2. Una estrategia para la resolución del problema de síntesis .	134
6.3. Ejemplo de síntesis del sistema adaptativo	135
6.4. Relación entre los Errores de Estimación a priori y a posteriori	138

6.5. Una Expresión General para el Mecanismo de Adaptación	139
6.6. Secuencia de Operaciones en un Ejemplo Ilustrativo	140
6.7. Convergencia de los parámetros del modelo adaptativo	141
6.8. Análisis de los resultados	143
7. Análisis y Síntesis del Sistema Adaptativo en el Caso Real sin Diferencia de Estructuras	147
7.1. Introducción	147
7.2. Estrategia para la solución	148
7.3. Ejemplo de solución al problema de síntesis	151
7.4. Propiedades del sistema adaptativo	154
7.5. Conclusiones	157
El Ejercicios de la Unidad Didáctica III	160
APÉNDICES	
A. Operaciones con Vectores y Matrices	177
A.1. Operaciones con Vectores	177
A.2. Operaciones con Matrices	180
A.3. Operaciones con Vectores y Matrices	189
B. Probabilidad y Procesos Aleatorios	193
B.1. Probabilidad	193
B.2. Variables Aleatorias	197
B.3. Procesos Aleatorios	205

Capítulo 1

Representación de Estado de Sistemas Lineales

1.1. Representación de Estado en Tiempo Continuo

Los primeros trabajos en la teoría de control y estimación consideraron la descripción y el análisis de sistemas en el dominio de las frecuencias. En contraste, trabajos posteriores (Pontryagin, Belman, Lyapunov, Kalman y otros) consideraron la descripción de sistemas en el dominio temporal, y particularmente la denominada representación de estado que ofrece la ventaja de una gran simplicidad matemática y es especialmente útil en la descripción estadística del comportamiento de los sistemas.

La evolución dinámica de sistemas lineales puede ser representada genéricamente por una ecuación diferencial vectorial-matricial de primer orden, tal como:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = F(t) \mathbf{x}(t) + G(t) \mathbf{w}(t) + L(t) \mathbf{u}(t) \quad (1.1)$$

donde $\mathbf{x}(t)$ es el vector estado del sistema, $\mathbf{w}(t)$ es una perturbación aleatoria, $\mathbf{u}(t)$ es una entrada (señal de control) determinística que actúa sobre el sistema, y $F(t)$, $G(t)$, $L(t)$ son matrices que determinan la dinámica en cuestión. Esta ecuación ha sido comúnmente empleada en la denominada teoría de estimación y control óptimo. El vector de estado esta compuesto

por un conjunto de variables suficientes para describir completamente la evolución autónoma del sistema en cuestión. El vector de estado en un instante de tiempo, y una descripción de la perturbación aleatoria y la señal de control, a partir de ese instante, permiten calcular el vector de estado en cualquier tiempo futuro. El vector de estado no es único en el sentido de que cualquier otro conjunto de variables $\mathbf{x}'(t)$ obtenido a partir de una transformación no singular de $\mathbf{x}(t)$ tal como:

$$\mathbf{x}'(t) = A(t) \mathbf{x}(t) \quad (1.2)$$

responde asimismo a las propiedades que definen al vector de estado.

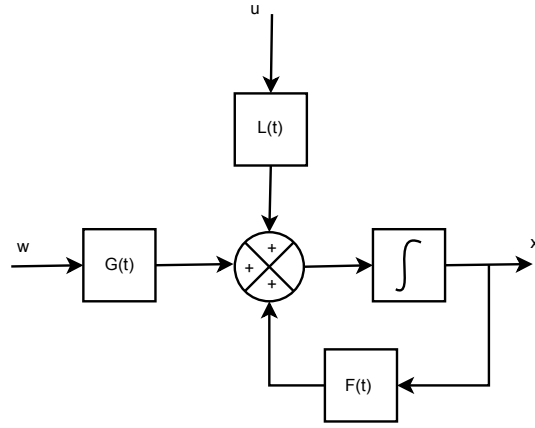


Figura 1.1: Diagrama de Bloques de la Evolución Dinámica de Sistemas Lineales.

Dada la ecuación diferencial lineal de orden n :

$$\left[\frac{d^n}{dt^n} + a_{n-1}(t) \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} + \dots + a_1(t) \frac{d}{dt} + a_0(t) \right] y(t) = w(t) \quad (1.3)$$

podemos definir un conjunto de variables de estado $x_1(t), \dots, x_n(t)$ tal que:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= y(t) \\ x_2(t) &= \dot{x}_1(t) = \frac{dy(t)}{dt} \\ &\vdots \\ &\vdots \\ x_n(t) &= \dot{x}_{n-1}(t) = \frac{d^{n-1}y(t)}{dt^{n-1}} \end{aligned} \quad (1.4)$$

Estas relaciones pueden ser escritas como un conjunto de n ecuaciones diferenciales de primer orden

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= x_3(t) \\ &\vdots \\ \dot{x}_n(t) &= -a_0(t)x_1(t) - a_1(t)x_2(t) - \dots - a_{n-1}(t)x_n(t) + w(t) \end{aligned} \quad (1.5)$$

Las primeras $n - 1$ ecuaciones anteriores se deducen directamente de la definición de las variables de estado y la última se deriva a partir de dicha definición y la ecuación (1.3). Expresando las ecuaciones (1.5) en su forma vectorial-matricial, obtenemos:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ w \end{bmatrix} \quad (1.6)$$

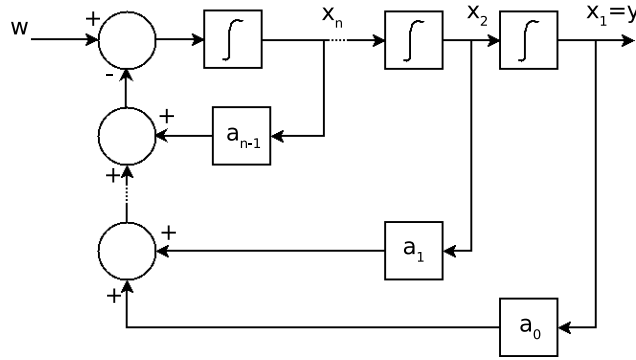


Figura 1.2: Representación de Diagrama de Bloques de la Ecuación 1.6.

La ecuación (1.6) es un caso particular de la ecuación genérica (1.1), es equivalente a la ecuación (1.3), y se conoce como forma canónica de esta

última. La matriz del sistema dinámico F es cuadrada y de dimensión n , correspondiendo al orden de la ecuación diferencial.

En algunos sistemas lineales de interés, las funciones de perturbación y de control son multivariantes, es decir, algunas componentes individuales de $\mathbf{w}(t)$ y $\mathbf{u}(t)$ pueden ser funciones no nulas que influyen en varias variables de estado simultáneamente, haciendo $G(t)$ y $L(t)$ ser matrices con elementos significativos en localizaciones fuera de la diagonal principal. La ecuación dinámica que sigue el comportamiento de un sistema queda determinada generalmente por su naturaleza física. La expresión de la ecuación genérica (1.1) puede generalizarse en la forma:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & \dots & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & \dots & f_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{n1} & f_{n2} & \dots & f_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & \dots & g_{1r} \\ g_{21} & g_{22} & \dots & g_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ g_{r1} & g_{r2} & \dots & g_{rr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \ell_{11} & \ell_{12} & \dots & \ell_{1s} \\ \ell_{21} & \ell_{22} & \dots & \ell_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \ell_{s1} & \ell_{s2} & \dots & \ell_{ss} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_s \end{bmatrix} \quad (1.7)$$

Donde las funciones $\mathbf{w}$ y $\mathbf{u}$ no necesariamente han de ser de dimensión n , por ejemplo en (1.7) se considera que la dimensión de $\mathbf{w}$ es r y la de $\mathbf{u}$ es s . Sin embargo, es necesario que los productos de $G\mathbf{w}$ y $L\mathbf{u}$ sean de dimensión n .

Ejemplo 1.1-1

Consideremos el contenedor de la Figura 1.3, donde una masa m esta conectada a la pared izquierda por un muelle con constante de elasticidad k y por un amortiguador con constante de amortiguación c . La masa se apoya sobre ruedas en la base, pero no consideraremos los efectos de fricción de las ruedas. El desplazamiento x se medirá (sentido positivo hacia la izquierda) entre los indicadores, tal y como se representa en la figura. El contenedor está sometido a una aceleración $w(t)$ dirigida hacia la derecha. Entonces, el

sistema está sometido a un movimiento de traslación unidimensional, por lo que el desplazamiento x y la velocidad $\dot{x}$ son apropiadas para tomarlas como variables de estado.

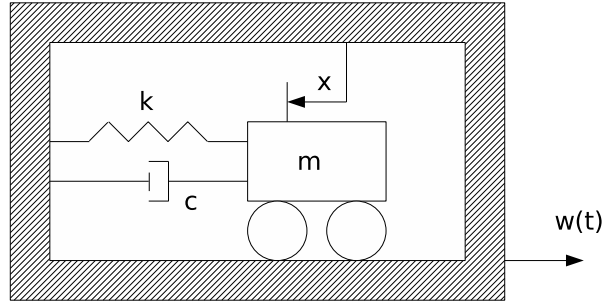


Figura 1.3: Sistema Físico de Segundo Orden.

La ecuación del movimiento del sistema se obtiene a partir de la segunda ley de Newton

$$\sum f_x = ma$$

Las fuerzas que actúan en el sistema son $\sum f_x = -k \cdot x - c \cdot \dot{x}$, correspondientes al muelle y al amortiguador. La aceleración total es $a = \ddot{x} - w(t)$. Sustituyendo estos valores, la ecuación del movimiento resulta:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = mw(t)$$

Si definimos el vector de estado como:

$$\begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix}$$

la ecuación de estado del sistema será:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k/m & -c/m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ w(t) \end{bmatrix}$$

■

1.2. Matriz de Transición

1.2.1. Definición y Propiedades

En esta sección analizaremos la solución de la ecuación de estado previamente considerada para la descripción de los sistemas físicos. En primer lugar, analizaremos la solución en el caso de un sistema autónomo, sobre el que no actúan ni perturbaciones, ni entradas o señal de control, y por tanto descrito por:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = F(t) \mathbf{x}(t) \quad (1.8)$$

Supongamos que en un instante de tiempo, t_0 , todas las variables de estado menos una valen cero. También supongamos que la variable de estado distinta de cero es igual a 1. La evolución del vector de estado para todo instante de tiempo t , donde $t \geq t_0$, puede expresarse en términos de un "vector de evolución" variable con el tiempo, $\varphi_i(t, t_0)$, donde el subíndice indica la variable de estado no nula.

$$\varphi_i(t, t_0) = \begin{bmatrix} x_1(t, t_0)_i \\ x_2(t, t_0)_i \\ \vdots \\ x_n(t, t_0)_i \end{bmatrix} \quad (1.9)$$

Si la condición inicial de la variable de estado no nula fuera diferente de la unidad (consideremos que fuera c , por ejemplo) debido al comportamiento lineal del sistema, puede escribirse:

$$\varphi_i(t, t_0, c) = c \varphi_i(t, t_0) \quad (1.10)$$

Ahora, aplicando el principio de superposición de los sistemas lineales, si dos variables de estado i y j tienen valores iniciales no nulos c_i y c_j en el instante t_0 , la evolución del sistema resulta de la suma de los vectores de evolución previamente considerados para cada una de las variables en cuestión y, en consecuencia, puede escribirse:

$$\varphi_i(t, t_0, c_i, c_j) = c_i \varphi_i(t, t_0) + c_j \varphi_j(t, t_0) \quad (1.11)$$

La ecuación (1.11) puede expresarse como el producto de la matriz:

$$\begin{bmatrix} \varphi_i & \varphi_j \end{bmatrix}$$

y el vector:

$$\begin{bmatrix} c_i \\ c_j \end{bmatrix}$$

En general, cada variable de estado tendrá un valor distinto de cero en t_0 ; este conjunto de valores definirán el vector de estado $x(t_0)$. La evolución del vector de estado será la suma de los vectores de evolución para cada una de las variables, que puede escribirse en la forma:

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} \varphi_1(t, t_0) & \varphi_2(t, t_0) & \dots & \varphi_n(t, t_0) \end{bmatrix} \mathbf{x}(t_0) \quad (1.12)$$

que en forma compacta puede escribirse:

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t, t_0) \mathbf{x}(t_0) \quad (1.13)$$

La matriz $\Phi(t, t_0)$ es llamada matriz de transición. Como hemos visto la matriz de transición permite calcular en ausencia de perturbaciones el vector estado en el instante t , si se conoce el vector de estado en t_0 .

A partir de (1.8) y (1.9), podemos deducir que los vectores de evolución en esta última considerados obedecen a ecuaciones diferenciales de la forma:

$$\frac{d\varphi_i(t, t_0)}{dt} = F(t) \varphi_i(t, t_0) \quad (1.14)$$

donde

$$\varphi_i(t, t) = \epsilon_i$$

$$\epsilon_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \epsilon_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \text{etc} \quad (1.15)$$

De forma similar, la matriz de transición, compuesta por los vectores φ_i , obedece a la ecuación

$$\frac{d}{dt} \Phi(t, t_0) = F(t) \Phi(t, t_0), \quad \Phi(t, t) = I \quad (1.16)$$

La matriz de transición $\Phi(t_1, t_0)$ determina el cambio de $\mathbf{x}(t_0)$ a $\mathbf{x}(t_1)$;

$$\mathbf{x}(t_1) = \Phi(t_1, t_0) \mathbf{x}(t_0) \quad (1.17)$$

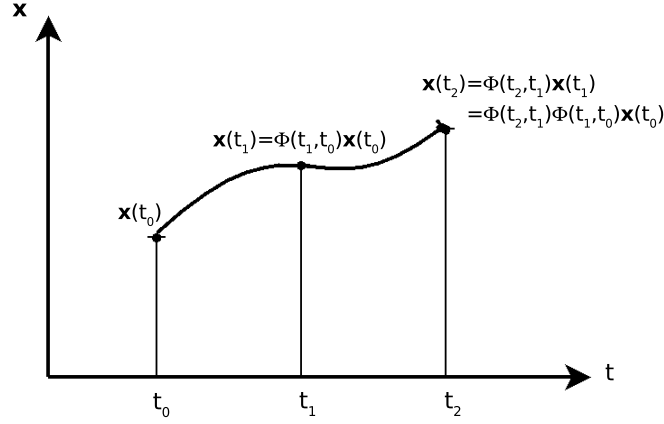


Figura 1.4: Representación gráfica de la evolución del vector de estado.

De la misma forma, para un segundo instante de tiempo t_2 , tenemos que:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t_2) &= \Phi(t_2, t_1) \mathbf{x}(t_1) \\ &= \Phi(t_2, t_1) \Phi(t_1, t_0) \mathbf{x}(t_0) \end{aligned} \quad (1.18)$$

En consecuencia,

$$\Phi(t_2, t_0) = \Phi(t_2, t_1) \Phi(t_1, t_0) \quad (1.19)$$

lo que es una propiedad general de la matriz de transición de estados, independientemente del orden de t_0 , t_1 y t_2 . Dado que para todo t ,

$$\Phi(t, t) = \Phi(t, t_0) \Phi(t_0, t) = I \quad (1.20)$$

premultiplicando por $\Phi^{-1}(t, t_0)$ obtenemos la relación:

$$\Phi^{-1}(t, t_0) = \Phi(t_0, t) \quad (1.21)$$

Puesto que la inversa de $\Phi(t, t_0)$ debe existir, se cumple que:

$$|\Phi(t, t_0)| \neq 0 \quad (1.22)$$

Otras propiedades del determinante de la matriz de transición que presentamos sin demostración son;

$$\frac{d}{dt} |\Phi(t, t_0)| = \text{traza}[F(t)] |\Phi(t, t_0)| \quad (1.23)$$

y

$$|\Phi(t, t_0)| = \exp \left[\int_{t_0}^t \text{traza}[F(\tau)] d\tau \right] \quad (1.24)$$

1.2.2. Matriz de Transición en Sistemas de Dinámica Invariante

Para un sistema de dinámica invariante la matriz F es constante en el tiempo y la matriz de transición depende solo del intervalo de tiempo considerado, es decir:

$$\Phi(t, t_0) = \Phi(t - t_0) \quad (1.25)$$

Expandiendo $\mathbf{x}(t)$ en un desarrollo en serie de Taylor, alrededor del instante de tiempo t_0 , obtenemos:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t_0) + \dot{\mathbf{x}}(t_0)(t - t_0) + \ddot{\mathbf{x}}(t_0) \frac{(t - t_0)^2}{2!} + \dots \quad (1.26)$$

Siendo F constante, a partir de (1.8) podemos deducir:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t_0) &= F \mathbf{x}(t_0) \\ \ddot{\mathbf{x}}(t_0) &= F \dot{\mathbf{x}}(t_0) = F^2 \mathbf{x}(t_0) \\ &\vdots \\ &\vdots \\ &\vdots \\ &\text{etc} \end{aligned} \quad (1.27)$$

A partir de (1.26) y (1.27) obtenemos:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= \mathbf{x}(t_0) + F(t - t_0) \mathbf{x}(t_0) + \frac{F^2(t - t_0)^2}{2!} \mathbf{x}(t_0) + \dots \\ &= \left[I + F(t - t_0) + \frac{1}{2!} F^2(t - t_0)^2 + \dots \right] \mathbf{x}(t_0) \end{aligned} \quad (1.28)$$

Como se ha considerado en el Apéndice B una matriz exponencial puede expandirse en la forma:

$$e^A = I + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \dots \quad (1.29)$$

En consecuencia, a partir de (1.28) y (1.29) la matriz de transición para sistemas de dinámica invariante puede expresarse en la forma:

$$\Phi(t - t_0) = e^{F(t-t_0)} \quad (1.30)$$

la cual depende únicamente de la dinámica del sistema estacionario F y el intervalo $t - t_0$.

Ejemplo 1.2-1

Consideremos el circuito de la Figura 1.5, compuesto por una fuente de tensión v , una resistencia R , y un inductor L . Aplicando la primera ley de Kirchhoff al circuito obtenemos:

$$v = iR + L \frac{di}{dt}$$

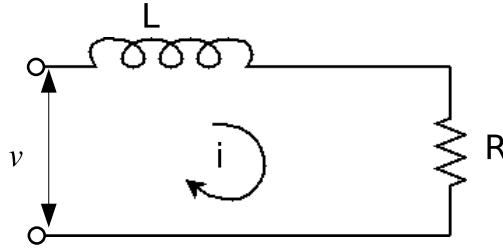


Figura 1.5: Circuito Eléctrico.

Asumimos que $i = i_0$ en $t = t_0$ y $v = 0$ en cualquier instante de tiempo t . Si aplicamos estas condiciones a la ecuación que rige nuestro circuito obtenemos:

$$\frac{di}{dt} = -\frac{R}{L}i \quad (1.31)$$

La matriz del sistema F es en esta ecuación la cantidad escalar $-R/L$. Empleando técnicas básicas de resolución de ecuaciones diferenciales obtenemos:

$$i(t) = i_0 e^{-\frac{R}{L}(t-t_0)}$$

como solución a la ecuación 1.31. En esta solución identificamos la matriz de transición:

$$\Phi(t, t_0) = e^{-\frac{R}{L}(t-t_0)}$$

Verificaremos a continuación las propiedades de la matriz de transición vistas en la sección 1.2.1. Para los instantes de tiempo t_0, t_1, t_2 , tenemos:

$$\Phi(t_2, t_1) = e^{-\frac{R}{L}(t_2-t_1)}$$

$$\Phi(t_1, t_0) = e^{-\frac{R}{L}(t_1-t_0)}$$

consecuentemente podemos escribir:

$$\begin{aligned} \Phi(t_2, t_1)\Phi(t_1, t_0) &= e^{-\frac{R}{L}(t_2-t_1)}e^{-\frac{R}{L}(t_1-t_0)} \\ &= e^{-\frac{R}{L}(t_2-t_0)} \\ &= \Phi(t_2, t_0) \end{aligned}$$

■

1.3. Evolución del Vector de Estado en Sistemas Forzados

En esta sección consideraremos la evolución del vector de estado en un sistema forzado descrito por la ecuación:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = F(t)\mathbf{x}(t) + L(t)\mathbf{u}(t) \quad (1.32)$$

A partir de (1.32) podemos considerar que el efecto de la entrada $u(t)$ en la variable de estado i del vector $x(t)$, sobre un pequeño intervalo $(\tau-\Delta\tau, \tau)$, es un impulso cuya área es la fila i del segundo sumando de (1.32) en τ , $L(\tau)\mathbf{u}(\tau)$, por el intervalo $\Delta\tau$. El cambio en la variable de estado i , debido a este impulso puede escribirse:

$$\Delta x_i(\tau) = [L(\tau)\mathbf{u}(\tau)]_i \Delta\tau \quad (1.33)$$

El cambio en el conjunto del vector de estado puede ser expresado como:

$$\Delta\mathbf{x}(\tau) = \begin{bmatrix} \Delta x_1(\tau) \\ \Delta x_2(\tau) \\ \vdots \\ \Delta x_n(\tau) \end{bmatrix} = L(\tau)\mathbf{u}(\tau)\Delta\tau \quad (1.34)$$