Índice general

Capítulo 4

Oscilaciones

OBJETIVOS DIDÁCTICOS ESPECÍFICOS

- Definir los conceptos de amplitud, periodo, frecuencia, frecuencia angular y fase de un movimiento oscilatorio.
- Escribir la ecuación de movimiento de un oscilador armónico simple.
- Calcular la energía cinética, potencial y total de un oscilador armónico en función del tiempo y del desplazamiento.
- Escribir y resolver la ecuación de movimiento de un oscilador armónico amortiguado.
- Calcular la energía disipada por un oscilador amortiguado. Definir y calcular el factor de calidad.
- Escribir y resolver la ecuación de movimiento de un oscilador armónico amortiguado y forzado.
- Definir el fenómeno de la resonancia. Interpretar una curva de resonancia y el papel que juega en ella la disipación.

4.1. Introducción

No hace falta buscar mucho para encontrar ejemplos cotidianos de oscilaciones. Sin ir más lejos, el habla es consecuencia de la vibración de las cuerdas vocales, y el sentido del oído se basa en la vibración de la membrana del tímpano. Las vibraciones, o mejor, la forma de evitarlas es un problema técnico de gran importancia en el diseño de puentes, edificios, máquinas, automóviles, etc. No es sólo cuestión de que puedan ser molestas para el usuario sino que pueden afectar a su propia seguridad. Pensemos, por ejemplo, en la fatiga del ala de los aviones o en un automóvil con amortiguadores en mal estado. La atmósfera, los mares y los continentes vibran en su conjunto bajo terremotos, explosiones volcánicas, etc.

En general, las oscilaciones se producen como reacción de un sistema que se encuentra en un estado de equilibrio estable al ser perturbado. Consideremos un sistema en un estado de equilibrio estable al que desplazamos ligeramente de su punto de equilibrio, el sistema experimenta una fuerza recuperadora que se opone al desplazamiento y que empuja al sistema hacia su posición de equilibrio. Pero si el sistema tiene inercia puede ocurrir que en su movimiento de regreso sobrepase el punto de equilibrio y se encuentre de nuevo alejado del equilibrio, de manera que el proceso se repite sucesivamente constituyendo una oscilación. En la figura 4.1 se dan varios ejemplos de sistemas mecánicos oscilantes, pero hay muchos otros y no sólo en mecánica. Así pues, se requieren dos ingredientes para que se produzca un

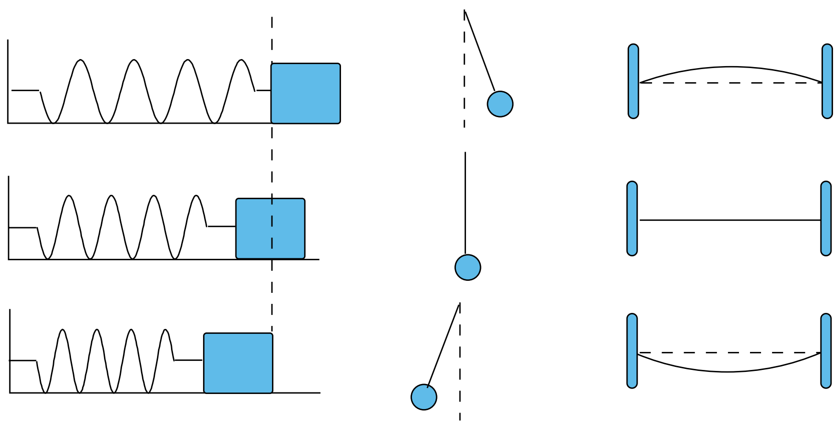

Figura 4.1: Una masa unida con un muelle, un péndulo y una cuerda tensa son ejemplos de sistemas oscilando. Cada uno de ellos está representado en tres posiciones, de las cuales la del centro corresponde al estado de equilibrio

movimiento oscilatorio: una fuerza recuperadora e inercia. Otro ingrediente que no es necesario pero que en la realidad casi siempre está presente es el amortiguamiento. Como veremos más adelante, para que haya oscilaciones el amortiguamiento tiene que ser lo bastante débil como para que el sistema en su recuperación sobrepase el punto de equilibrio.

4.2. Movimiento armónico simple

4.2.1. Ecuación de movimiento

El **movimiento armónico simple** es el tipo de oscilación más sencillo y se caracteriza porque la aceleración es proporcional a la posición. Un ejemplo de movimiento armónico simple es el de un cuerpo de masa m unido a un muelle que desliza sin rozamiento sobre un plano horizontal como se representa en la figura 4.2. Este sistema está en equilibrio cuando el muelle

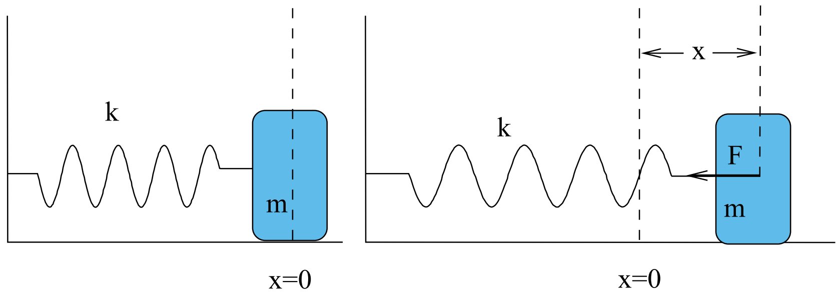

Figura 4.2: Cuerpo unido a un muelle que desliza sobre un plano horizontal. En la figura de la izquierda se encuentra en su posición de equilibrio y en la de la derecha con un desplazamiento o deformación del muelle x y sometido a una fuerza recuperadora F.

se encuentra sin deformar, $x = 0$, y en reposo. Si la masa se desplaza una distancia x de la posición de equilibrio el muelle se deforma y ejerce una fuerza elástica dirigida a lo largo del eje x proporcional a la deformación, **ley de Hooke**,

$$\vec{F} = -kx\,\vec{e}_x \tag{4.1}$$

donde k es la constante elástica del muelle y $\vec{e}_x$ el vector unitario en la dirección del eje X. El signo menos indica que la fuerza es recuperadora, es decir, que se opone a la dirección del desplazamiento de manera que siempre trata de llevar el cuerpo hacia la posición de equilibrio. La deformación del muelle es la distancia x entre el centro de la masa en cada instante y su posición de equilibrio y puede ser positiva o negativa según que el muelle esté estirado o comprimido. Como ésta es la única fuerza presente, podemos escribir la segunda ley de Newton como

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx. \tag{4.2}$$

El término de la izquierda, el producto de la masa por la aceleración, es el término de inercia y el de la derecha es el término elástico. Esta ecuación se puede escribir de la forma

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x, \tag{4.3}$$

que nos indica que la aceleración es proporcional al desplazamiento, condición que caracteriza el movimiento armónico simple.

En la figura 4.3 se muestra una forma de obtener experimentalmente la solución $x(t)$ de la ecuación (4.3). Es pues, razonable considerar que la solución $x(t)$ de la ecuación de movimiento sea de la forma:

$$x = A\cos(\omega_0 t + \delta) \tag{4.4}$$

donde A, ω_0 y δ son constantes. Para ver si (4.4) es solución de (4.3) calcu-

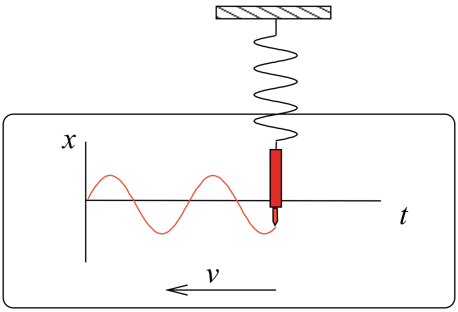

Figura 4.3: Si el papel se mueve con velocidad constante el lápiz dibuja el desplazamiento $x(t)$ de la masa en el tiempo. En este caso se ha tomado x positivo cuando el muelle se comprime.

lamos la primera y segunda derivada temporal de x

$$\frac{dx}{dt} = -A\omega_0 \operatorname{sen}(\omega_0 t + \delta) \tag{4.5}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \delta) \tag{4.6}$$

y sustituimos en (4.3) obteniendo que

$$-A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \delta) = -\frac{k}{m} A \cos(\omega_0 t + \delta). \tag{4.7}$$

Simplificando finalmente nos queda que

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m} \tag{4.8}$$

Es decir, que la función (4.4) es solución de la ecuación (4.3) si se cumple (4.8).

La constante A, ver figura 4.4, es el desplazamiento máximo o **amplitud**. Al argumento del coseno, $(\omega_0 t + \delta)$, se llama **fase**, siendo δ la **constante de fase**. Tanto esta constante como la amplitud quedan determinadas por el valor de x y de v en el instante inicial $t = 0$. El significado de ω_0 se entiende fácilmente a partir de la definición del **período**, esto es, el tiempo T que transcurre entre dos máximos consecutivos de x. En efecto, si tenemos que

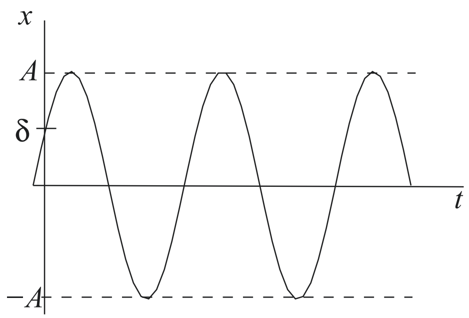

Figura 4.4: Posición x de la masa en función del tiempo. El máximo desplazamiento o amplitud A, el valor de la fase en $t = 0$ o constante de fase δ y el periodo T.

$$x(t) = x(t + T) = A, \tag{4.9}$$

se verifica que

$$\cos(\omega_0 t + \delta) = \cos(\omega_0 t + \omega_0 T + \delta) = 1 \tag{4.10}$$

lo que implica que $\omega_0 T = 2\pi$. Así pues,

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{4.11}$$