

Índice general

7-8	INTRODUCCIÓN
9-43	TEMA 1. PRIMEROS PASOS CON R
10-13	1.1. Zona de trabajo (“Workspace”)
11-11	1.1.1. Ayudas
11-12	1.1.2. Scripts
13-13	1.1.3. Paquetes R
13-18	1.2. Sintaxis del lenguaje R
14-18	1.2.1. Cálculo
19-24	1.3. Vectores
19-22	1.3.1. Vectores numéricos
22-22	1.3.2. Vectores lógicos
22-23	1.3.3. Valores ausentes (“missing values”)
23-23	1.3.4. Vectores de caracteres
23-34	1.3.5. Factores
24-33	1.4. Matrices y “arrays”
27-31	1.4.1. Operaciones con matrices
31-33	1.4.2. Tablas de contingencia
33-38	1.5. Bases de datos
33-34	1.5.1. Listas
34-38	1.5.2. Data frames
38-39	1.6. Distribuciones de probabilidad
40-43	1.7. Programación
40-43	1.7.1. Estructuras de control
45-77	TEMA 2. INTRODUCCIÓN A LA SIMULACIÓN
48-51	2.1. Tipos de simulación
51-55	2.2. Sistemas, modelos y simulación
55-56	2.2.1. Fases de un estudio de simulación
56-56	2.2.2. Software para simulación

56-59	2.3. Números aleatorios y pseudoaleatorios
57-59	2.3.1. Generadores congruenciales
59-68	2.4. Contrastes de bondad de ajuste
60-65	2.4.1. Contrastes de Kolmogorov-Smirnov
65-68	2.4.2. Contraste de la Chi-Cuadrado
69-77	2.5. Contrastes de aleatoriedad e independencia
69-72	2.5.1. Contraste de las rachas (RUNS)
73-77	2.5.2. Contraste de los huecos (GAPS)
79-136	TEMA 3. GENERACIÓN DE VARIABLES ALEATORIAS
79-83	3.1. Dos métodos sencillos
79-80	3.1.1. Mediante el Teorema Central del Límite
81-83	3.1.2. Algoritmo de Box-Muller
83-121	3.2. Métodos generales de simulación
84-90	3.2.1. Transformación inversa
90-100	3.2.2. Aceptación-rechazo
100-115	3.2.3. Razón de uniformes
115-121	3.2.4. Composición (Simulación de mixturas)
121-123	3.3. Métodos específicos de simulación de variables aleatorias continuas
123-136	3.4. Métodos específicos de simulación de variables aleatorias discretas
123-127	3.4.1. Transformación inversa
127-130	3.4.2. Búsqueda indexada
130-136	3.4.3. Método alias
137-149	TEMA 4. GENERACIÓN DE PROCESOS DE POISSON
138-140	4.1. Procesos de Poisson homogéneos
141-149	4.2. Procesos de Poisson no homogéneos
143-149	4.2.1. Mejora del procedimiento de simulación
151-193	TEMA 5. APLICACIONES DE LA SIMULACIÓN
151-153	5.1. Simulación de Sucesos Discretos
152-153	5.1.1. Conceptos Generales
153-171	5.2. Modelos de colas
154-163	5.2.1. Cola con un servidor
163-167	5.2.2. Cola con dos servidores en serie
167-171	5.2.3. Cola con dos servidores en paralelo
171-174	5.3. Modelos de inventario (Control de stocks)

175-177	5.4. Problemas de mantenimiento
177-185	5.5. Integración Monte Carlo
185-193	5.6. Simulación Estocástica Bayesiana
186-188	5.6.1. Inferencia Bayesiana
188-193	5.6.2. Muestreador de Gibbs (“Gibbs Sampler”)
195-199	TEMA 6. ANÁLISIS ESTADÍSTICO DE DATOS SIMULADOS
195-196	6.1. Los estimadores media y varianza muestral
196-199	6.2. Determinación del número de simulaciones
196-197	6.2.1. Desigualdad de Tchebychev
197-198	6.2.2. Teorema Central del Límite
198-199	6.2.3. Intervalo de confianza para la media
201-216	TEMA 7. TÉCNICAS DE REDUCCIÓN DE LA VARIANZA
201-203	7.1. Variables antitéticas
203-205	7.2. Variables de control
205-212	7.3. Muestreo por importancia
209-212	7.3.1. Algoritmo SIR
212-216	7.4. Condicionamiento
217-257	APÉNDICE: EJERCICIOS RESUELTOS SUPLEMENTARIOS
218-232	APÉNDICE A. MÉTODO DE ACEPTACIÓN-RECHAZO
233-237	APÉNDICE B. SIMULACIÓN DE VARIABLES ALEATORIAS CONTINUAS
238-252	APÉNDICE C. SIMULACIÓN DE VARIABLES ALEATORIAS DISCRETAS
253-254	BIBLIOGRAFÍA

Tema 2

Introducción a la Simulación

En el mundo actual, el término de “simulación” ya forma parte del lenguaje cotidiano y está en la base del conocimiento general. Vemos simulaciones en numerosos campos donde interesa analizar el comportamiento de determinados procesos en diferentes escenarios, así como evaluar el efecto que ciertas alteraciones en el planteamiento producen en las conclusiones finales, aplicando análisis de sensibilidad. La posibilidad de visualizar e incluso intervenir en la evolución de un determinado fenómeno resulta tremendamente atractiva, sobre todo en los casos en los que la complejidad de las relaciones entre los elementos intervinientes hace prácticamente inviable la representación mediante un modelo analítico tratable.

En definitiva, la simulación es ya un elemento que aparece de forma habitual en nuestras vidas, pero sin duda la competitividad creciente, que demanda mejores productos y procedimientos, colocará a la simulación en puestos todavía más relevantes como herramienta de uso general en un futuro cercano.

En esta monografía, se va a tratar, en particular, la *Simulación Estocástica* que corresponde a la representación de situaciones en las que algún elemento es incierto. También se incluyen los casos en los que, a pesar de ser determinísticos en su planteamiento, se introduce de forma artificial una componente aleatoria que simplifica el manejo del problema, son los *Métodos de Monte Carlo*.

Por supuesto, no hay que olvidar la importancia del diseño de un buen modelo inicial para resolver problemas, pero al incorporar la simulación, éste puede ser considerado como una estructura abierta que irá mejorándose según se obtienen simulaciones, ya que es posible evaluar los fallos, si es que se detectan y cuantificar el efecto de los cambios o de la aplicación de modelos alternativos.

Como casos particulares que pueden presentarse en la práctica y en los que es totalmente adecuado aplicar los procedimientos que se van desarrollar, cabe citar los siguientes:

- Un empresario, que ha estado en el negocio de la alimentación durante muchos años con una gran cadena de tiendas pequeñas, ha inaugurado recientemente el primero de un nuevo tipo de *Supertienda*. La idea que hay detrás de este nuevo concepto es la de proporcionar una gran tienda, con numerosos tipos de marcas disponibles y rápida, con servicio amable y cercano. Esta primera *Supertienda* se utiliza para probar el diseño y procedimientos de operación de una gran cadena de hipermercados que el empresario espera abrir.

La primera tienda ha estado abierta durante seis meses, y se sigue teniendo un problema con la contratación de personal para las cajas durante las horas punta. Se han recibido muchas quejas de los clientes acerca de las largas colas en las mismas. Se dispone de 20 cajas que se pueden utilizar, pero no se ha desarrollado un plan de contratación de personal adecuado para eliminar las largas esperas y por tanto se solicita a una empresa de consultoría un plan de personal económico que satisfaga ciertos requisitos, en cuanto al nivel de atención al cliente, durante dicho intervalo de tiempo.

- Una agencia de viajes está en el proceso de transformación de las actuales pequeñas oficinas de viaje, hacia dos nuevas ubicaciones que se encargarán de todas las solicitudes por teléfono. Con la reciente reducción en el negocio de los viajes y el estado general de la industria de viajes, creen que es necesario reducir el coste de operación. El plan actual es localizar la primera oficina en el país de la empresa y la segunda en un sitio del extranjero todavía por determinar. La oficina del país manejaría todas las llamadas entre las 7 de la mañana y las 7 de la tarde y las llamadas que pasarían a la oficina del extranjero, serían entre las 7 de la tarde y las 7 de la mañana, hora local.

La empresa ha contratado a varios consultores para recopilar datos y llevar a cabo un diseño para la nueva propuesta. A pesar de que se ha recibido información suficiente para proceder con la puesta en práctica del diseño, se cuestiona el coste de funcionamiento real del nuevo sistema. Los dos costes principales están asociados con los empleados y las líneas de teléfono, pero la presencia de incertidumbre asociada al coste de operación, les obliga a pedir recomendaciones. Entonces, solicitan evaluar, mediante simulación, el diseño y proponer una configuración que se apoyará en la minimización de costes operativos y al mismo tiempo en la consecución de unos niveles de servicio al cliente admisibles.

- Un empresario comenzó con una pequeña tienda de carne y pescado, hace varios años, en un barrio de la periferia con el concepto de proporcionar las carnes frescas y el pescado de alta calidad a un precio razonable. La primera tienda fue un gran éxito y a petición de sus clientes, ha ampliado recientemente la tienda añadiendo un mostrador “delicatessen”. La tienda ofrece una amplia gama de platos precocinados, así como bocadillos para los clientes del almuerzo.

Esta ampliación parece haber sido muy bien aceptada, pero está teniendo dificultades para dotarla del personal adecuado, debido a la alta variabilidad en las llegadas de los clientes. Como además está considerando la apertura de varias tiendas nuevas en el próximo año y posiblemente, franquiciar su concepto de negocio si las tiendas siguen teniendo éxito, ha decidido contratar a un consultor para evaluar sus necesidades de personal. Esto no sólo le permitirá minimizar sus gastos, sino que servirá de base para sus estimaciones de presupuesto en la apertura de nuevas tiendas.

En la evolución de las situaciones anteriores siempre hay componentes interconectadas, como los instantes en que se producen las llamadas o las llegadas de clientes y el tiempo que se tarda en atender a cada uno, según sea la demanda planteada y por tanto el tiempo en que la línea o el empleado está ocupado. Además, aunque estos instantes o intervalos de tiempo pueden seguir ciertos patrones de comportamiento, no se les puede adjudicar unos valores fijos. Por lo tanto, la representación de toda esta casuística conlleva una importante estructura computacional, pero apoyada en una modelización del problema soportada a su vez por resultados teóricos que permiten la representación de la incertidumbre mediante modelos de probabilidad.

Una definición bastante general puede ser la siguiente:

Simulación: Reproducción de un problema real en un entorno (ordenador u otro dispositivo) controlado por el experimentador.

Obviamente, al analizar los ejemplos expuestos, la mayoría de los tiempos de realización de tareas son aleatorios, pero se pueden presentar también duraciones de operaciones estándar con valores fijos. Estos conceptos se formalizan brevemente a continuación.

2.1. Tipos de simulación

Aunque pueden distinguirse muchas clases, según los elementos que intervienen y los ambientes en que se desarrollan, básicamente puede considerarse que hay dos tipos de simulación:

- a) *Determinística*: Incluye los procedimientos en los que, mediante modelos matemáticos, se representan situaciones donde siempre que se introduzcan los mismos valores como entrada, se obtienen idénticos resultados como salida.
- b) *Estocástica*: Se refiere a los casos en los que los fenómenos que hay que representar tienen, de forma natural o introducidos artificialmente, elementos aleatorios.

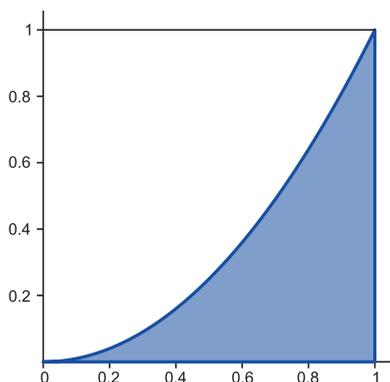
Dado que nos vamos a centrar en la *Simulación Estocástica*, se puede comenzar con algunos ejemplos sencillos que ayudarán a comprender la puesta en escena, los conceptos y resultados que se tratarán seguidamente en el texto.

1. Cálculo de una integral. Sea el problema determinístico de hallar la integral

$$I = \int_0^1 f(x)dx$$

donde $f(x)$ se representa en la figura 2.1

Una buena aproximación para el cálculo de la integral mediante simulación consistirá en la generación de n observaciones aleatorias y uniformes en el cuadrado $[0, 1] \times [0, 1]$, es decir, como si se lanzasen al azar n dardos sobre el

Figura 2.1. Área determinada por $f(x)$

cuadrado unidad y como valor aproximado de la integral se anotase

$$\hat{I} = \frac{\text{n}^\circ \text{ de observaciones debajo de la curva } f}{n}.$$

En efecto, se puede demostrar que \hat{I} , la proporción de individuos que caen debajo de la curva, es la media muestral para una muestra de tamaño n de una Bernoulli de parámetro I , considerando como éxito el caer debajo de la curva. En consecuencia, por las Leyes de los Grandes Números, \hat{I} converge a la media poblacional I cuando $n \rightarrow \infty$, de forma que $\hat{I} \approx I$, para n suficientemente grande.

Estos métodos, que introducen algún elemento aleatorio en un contexto determinístico, se denominan métodos de *Monte Carlo* y serán tratados en profundidad más adelante.

△

2. Recorridos entre ciudades. Supóngase que una persona viaja entre 4 ciudades A, B, C y D según la figura 2.2. El primer día sale necesariamente de A .

Por tanto, de A puede ir a B y D , de B puede ir sólo a C , de C puede ir a A y D , para finalmente poder ir sólo de D a B . No obstante, la elección de los posibles movimientos entre ciudades, cuando sea posible elegir el destino, se decide según un sorteo con determinadas probabilidades:

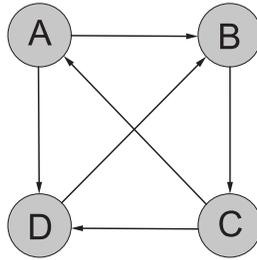


Figura 2.2. Posibles rutas entre las ciudades

$A \rightarrow B$ con probabilidad 0.7
 $A \rightarrow D$ con probabilidad 0.3
 $C \rightarrow D$ con probabilidad 0.7
 $C \rightarrow A$ con probabilidad 0.3

Por último, se establece un número de cinco viajes al día. Entonces, se pueden representar las posibles rutas diarias según este modelo. Así, por ejemplo, después de efectuar los sorteos necesarios se podrían especificar las siguientes rutas para los dos primeros días.

Simulación de rutas diarias

Día ①

$$A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow B \rightarrow C$$

Día ②

$$C \rightarrow D \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow A \rightarrow D$$

Se pueden añadir, a los movimientos entre ciudades, duraciones aleatorias para los trayectos y así ajustarlo más a una situación real.

△

3. Atención al cliente Se consideran llegadas a un mostrador de atención al cliente en general, que puede ser de facturación en un aeropuerto o de petición

de citas en un centro de salud. Lo que es común a todos ellos es que las llegadas se producen de forma aleatoria y con un tiempo de atención al cliente también variable. Por otra parte, en este modelo la única cola de clientes para el mostrador puede ir cambiando de tamaño según entran y salen clientes. Esquemáticamente, la evolución del sistema se puede describir según la figura 2.3

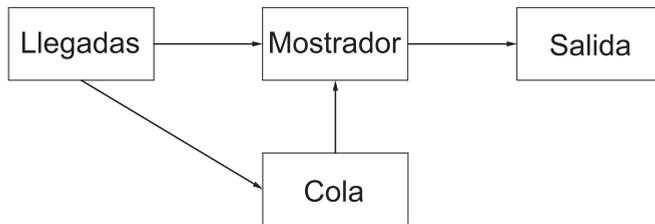


Figura 2.3. Esquema de evolución de un modelo de cola

Así, el proceso de simulación incorporará, de forma ordenada, los instantes de llegada y los tiempos de atención simulados para hacer evolucionar secuencialmente los diferentes movimientos de llegada, salida y paso al mostrador que pueden producirse.

△

Después de observar estos ejemplos introductorios, se hace necesario dar una estructura formal a los problemas y a los conceptos que han ido apareciendo en cada uno de ellos. Se comenzará con algunas definiciones fundamentales para continuar con ciertos aspectos a tener en cuenta, finalizando con un recorrido por el software disponible ya que, como dijimos al comienzo, no se puede hablar de simulación sin contar con herramientas computacionales apropiadas.

2.2. Sistemas, modelos y simulación

Un primer paso, que puede evitar muchos errores posteriores, es la delimitación del proyecto propuesto eliminando los aspectos irrelevantes que sólo pueden causar ruido, complicando e incluso perturbando la obtención de las conclusiones solicitadas. Para ello deben tenerse claros los objetivos y con qué elementos se cuenta. Las definiciones que se incluyen en el siguiente apartado

pueden aplicarse en distintos tipos de problemas y son de gran ayuda para los fines anteriores.

■ Elementos de un problema de simulación

- **SISTEMA:** Conjunto de actividades, elementos o cualquier tipo de componentes que están interrelacionadas entre sí como una unidad para la consecución de un fin. Es muy importante fijar la frontera entre sistema y entorno.
- **MODELO:** Representación controlada del sistema, particionando los elementos que intervienen y estableciendo las relaciones entre ellos para generar observaciones que sean una buena aproximación de las que produciría el sistema real.
- **SIMULACIÓN:** Diseño y puesta en funcionamiento del MODELO como aproximación del SISTEMA.

Otros términos utilizados en simulación son:

- **Entidad:** Objeto de interés en el sistema.
- **Atributo:** Propiedad de una entidad.
- **Actividad:** Periodo de tiempo de longitud especificada.
- **Estado del Sistema (SS):** Colección de elementos necesarios para describir el sistema en un instante cualquiera, siempre en relación a los objetos de estudio.
- **Sucesos:** Ocurrencias que pueden cambiar el estado del sistema.

Todos estos elementos pueden ser *Endógenos*, si están dentro del sistema o *Exógenos* si están fuera del mismo.

Naturalmente, puede observarse que, a pesar de las buenas cualidades generales de un proceso de simulación, como venimos insistiendo hasta ahora, hay situaciones en las que no es conveniente iniciar un estudio de simulación.

Por esta razón vamos a fijar algunas características muy positivas, pero otras negativas de la resolución de problemas mediante simulación, porque consideramos que debe de incorporarse siempre un periodo pre-

vio de reflexión con las aportaciones de los expertos sobre viabilidad del procedimiento antes de su desarrollo.

Una vez valorada positivamente la realización de un proceso de simulación, se pueden aplicar todas las herramientas disponibles, que son muchas, para facilitar la obtención de conclusiones fiables.

■ **La simulación es apropiada para:**

- Analizar modelos complejos, tan presentes en los casos reales actualmente por la enorme cantidad de información disponible en todos los campos.
- La observación de alteraciones irreversibles en un entorno lo que puede evitar, por ejemplo, daños irrecuperables motivados por la intervención directa en ciertos ecosistemas.
- Orientar la investigación de un fenómeno o incluso de resultados teóricos, evaluando la factibilidad de las diferentes vías a seguir. Así se pueden descartar ciertas líneas de trabajo que, según se ha observado mediante simulación, pueden llevar a conclusiones no deseables.
- Verificar la importancia de unas variables frente a otras en cualquier contexto. De esta forma, se pueden fijar distintos escenarios de simulación interviniendo en las variables para valorar su efecto en la evolución del sistema.
- La enseñanza de conceptos y procedimientos en ambiente de incertidumbre. Este aspecto metodológico es muy importante, por ejemplo, en la docencia de la estadística, porque tratar la aleatoriedad en el muestreo es fundamental para la comprensión de los modelos que se utilizan y sin embargo es difícil de transmitir. Así, se puede observar la evolución de la media muestral para diferentes muestras de un determinado tamaño extraídas o simuladas de una población normal de parámetros dados y enlazando con estas representaciones, demostrar el resultado teórico visualizado.
- Prevenir los efectos adversos de ciertas políticas antes de implantarlas, ya que a veces ocurren situaciones totalmente impredecibles

y que se pueden producir solo con la intervención de todos los elementos interconectados ocasionando auténticas catástrofes, de lo que se tienen numerosos ejemplos.

- Validar ciertas soluciones analíticas y los procedimientos aplicados para obtenerlas, pues en muchas ocasiones la demostración teórica es prácticamente inviable. Sin embargo, simulando en sucesivos casos particulares se pueden contrastar estas aportaciones.

■ **La simulación no es apropiada**

- Cuando el problema tiene una solución analítica clara y sencilla, aplicando el principio de parsimonia, lo más simple es lo mejor.
- Cuando los costes de la simulación superan el posible ahorro que podría implicar su aplicación.

Este tipo de consideraciones lleva a la especificación concreta de los aspectos positivos y negativos del tratamiento de algunos problemas mediante su representación por simulación.

■ **Ventajas**

- Éticas, cuando el proceso implica la experimentación con humanos o seres vivos en general, que puede provocar sufrimiento o efectos imprevisibles.
- Se pueden probar nuevos elementos o técnicas con menor coste, dado que no hay que efectuar la compra de los dispositivos necesarios, ni afrontar las pérdidas que pueden surgir de actividades no apropiadas.
- Implantación de nuevas políticas sin detener el proceso real, evitando así los costes de parada que eso conllevaría.
- Visualización del funcionamiento real del sistema con la posibilidad de intervenir en el mismo. Este apartado quizá sea de los más interesantes como sistema de ayuda a la decisión, porque permi-

te establecer diferentes escenarios y observar la evolución de los mismos.

■ **Inconvenientes**

- A veces la interpretación es difícil sobre todo por la mala presentación de los resultados.
- Los modelos evolucionan y pueden quedarse obsoletos si no son actualizados, por lo que deben tratarse como modelos en desarrollo no dando por cerrada su resolución, lo que redundará en el conocimiento real de los sistemas de interés.

2.2.1. Fases de un estudio de simulación

Aunque la construcción de un modelo de simulación depende mucho del marco en el que se desarrolla, se pueden establecer unas pautas que permiten estructurar la mayoría de las situaciones.

1. Formulación del problema, estableciendo claramente lo que se quiere representar.
2. Elaboración del proyecto, fijando alternativas, tareas, elementos implicados y sus relaciones.
3. Construcción del modelo, lo que efectivamente puede considerarse un arte, sobre todo si se pretenden alcanzar objetivos de eficiencia y simplicidad.
4. Recopilación de datos, que suele realizarse junto con el apartado anterior.
5. Traducción del modelo para su ejecución con ordenador, utilizando el software apropiado. En este texto se utilizará el software de código abierto R, pero se mostrarán otras alternativas.
6. Verificación de la salida del ordenador, validando los aspectos de la programación para detectar errores y aumentar la eficiencia computacional.

7. Validación estadística de los datos simulados para contrastar si se aproximan al modelo real.

Para concluir esta sección se recogen algunas herramientas computacionales para implementar un modelo de simulación estocástica.

2.2.2. Software para simulación

- Cualquier lenguaje de programación como Fortran, C y sus variantes o Python.
- Software matemático como MATLAB.
- Software estadístico que puede ser de código abierto como *R*.
- Software específico de simulación:
 - GPSS (General Purpose Simulation System, 1961). Basado en lenguaje Fortran que ha ido evolucionando con el paso del tiempo.
 - ARENA con sus *Arena Student Competitions* donde plantean problemas reales para su resolución por grupos de estudiantes con este software.
 - SIMIO también con *Student Simulation Competition* y un apartado muy importante de sus productos dedicado al mundo académico.
 - Simulación Bayesiana con el software de código abierto WINBUGS, versión Windows del original BUGS (Bayesian inference Using Gibbs Sampling), que utiliza *Métodos MCMC* (Markov Chain Monte Carlo) para el análisis Bayesiano de modelos estadísticos.

2.3. Números aleatorios y pseudoaleatorios

Lo primero que se tiene que considerar, al tratar un problema de simulación estocástica, es la introducción de una fuente de aleatoriedad. Históricamente se utilizaron dispositivos mecánicos como la ruleta, el lanzamiento de dados o la extracción de cartas, pero al aparecer los ordenadores se hizo necesario diseñar

otro tipo de procedimientos. En concreto algoritmos numéricos que produzcan secuencias de números que son validadas mediante pruebas estadísticas, como sucesiones de observaciones aleatorias.

Definición 2.3.1. Una sucesión de números pseudoaleatorios, $\{U_i\}_{i=1}^k$, es una secuencia de números entre 0 y 1, obtenida por técnicas determinísticas, con las mismas propiedades estadísticas que una colección de observaciones de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas (v.a.i.i.d.) según una $U(0, 1)$.

El siguiente resultado de probabilidad nos permite utilizar la generación de números pseudoaleatorios como herramienta suficiente para generar cualquier otro tipo de observaciones aleatorias.

Teorema 2.3.1. Si U es una variable aleatoria uniforme $U(0, 1)$ y $F(x)$ es una función de distribución, entonces $X = F^{-1}(U)$ es una variable aleatoria con función de distribución $F(x)$, considerando como definición de función inversa

$$F^{-1}(u) = \inf\{x : F(x) \geq u\}.$$

Por tanto, si se consigue simular correctamente una variable aleatoria uniforme $U(0, 1)$ se podrá, al menos teóricamente, simular cualquier otra variable aleatoria.

Definición 2.3.2. Un generador de números pseudoaleatorios es cualquier algoritmo que a partir de u_0 (semilla) produce $\{u_1, \dots, u_k\}$ números pseudoaleatorios.

Entonces, la primera tarea será construir un buen generador que produzca observaciones al azar entre 0 y 1. En la presente monografía no se va a profundizar en este tema, porque está más relacionado con otros enfoques de la simulación centrados en aspectos computacionales.

2.3.1. Generadores congruenciales

Estos generadores son los más utilizados y desde hace más tiempo. A veces reciben el nombre de su creador [11] y consisten en una fórmula recursiva que, a partir de un valor inicial o semilla, va obteniendo los sucesivos números que

permitirán determinar las observaciones pseudoaleatorias de interés. Sirvan de ejemplo los que introducimos a continuación.

Generador multiplicativo o de Lehmer

Dados $m \in \mathbb{Z}^+$, $a \in \mathbb{Z}^+$ y una semilla $x_0 \in \mathbb{Z}^+$, se van generando

$$x_n = ax_{n-1} \pmod{m}$$

o sea, x_n igual al resto de dividir ax_{n-1} por m y así $x_n \in \{0, 1, \dots, m-1\}$, lo que permite obtener los números pseudoaleatorios

$$u_n = \frac{x_n}{m}$$

Ejemplo 2.3.1 $m = 16$, $a = 5$, $x_0 = 1$

Aplicando la definición se va generando la secuencia

$$x_i = 1, 5, 9, 13, 1, \dots$$

que da lugar a los números pseudoaleatorios

$$u_i = 0.063, \quad 0.313, \quad 0.563, \quad 0.813, \quad 0.063 \dots$$

△

Ejemplo 2.3.2 $m = 11$, $a = 6$, $x_0 = 3$

En este caso el bloque de valores que se repite es mayor

$$x_i = 3, 7, 9, 10, 5, 8, 4, 2, 1, 6, 3, 7, \dots$$

obteniéndose

$$u_i = 0.636, \quad 0.818, \quad 0.909, \quad 0.455, \quad 0.727, \quad 0.364, \quad 0.182, \quad 0.091, \quad 0.545, \\ 0.273, \dots$$

△