Índice

1. INTRODUCCIÓN A LOS MOVIMIENTOS DEL PLANO

En primer lugar vamos a realizar un repaso de los movimientos del plano.

Supongamos que tenemos un papel cuadrado muy grande, cuyo lado mide varios metros y que está sobre el suelo. Nosotros nos encontramos situados al lado de una de las esquinas de dicho papel. En otra de las esquinas hay dibujado un triángulo y nos preguntan si tal triángulo es un triángulo isósceles. Nadie se preocuparía si nosotros comenzáramos por **mover** el papel y acercar hacia nosotros el triángulo para poder medir sus lados y saber si es o no isósceles. Al mover el papel, sin romperlo por supuesto, las distancias entre los puntos del papel no cambian, ni tampoco cambia la propiedad de ser triángulos isósceles. Ahora bien es importante saber qué movimientos o transformaciones se pueden hacer sobre el papel para que se conserven las distancias y propiedades geométricas y puedan ayudar a resolver problemas geométricos. En el desarrollo de esta sección se verán ejemplos más sofisticados donde la utilización de movimientos ayuda a hacer geometría.

Los *movimientos del plano* o *isometrías* son transformaciones del plano que conservan las distancias entre los puntos. Es decir, un movimiento es una regla que asocia a cada punto del plano P otro punto P', de modo que si dos puntos Q y R están a distancia d entonces los puntos transformados Q' y R' están también a distancia d.

Se trata de mover los puntos del plano manteniendo las longitudes de los segmentos. El hecho de conservar las longitudes y distancias es suficiente para que permanezcan invariantes muchas otras propiedades de las figuras del plano, prácticamente todas las propiedades geométricas que se suelen entender como tales. Se mantienen las formas. Podemos ir aun más lejos, las propiedades geométricas son precisamente las propiedades que se mantienen al mover las figuras, es decir, sometiendo al plano a un movimiento cualquiera las propiedades de las figuras que se conservan son las propiedades que estudia la geometría, esta fue la revolucionaria idea de geometría que propuso el matemático Félix Klein en 1872.

En lenguaje matemático, un movimiento del plano es una aplicación de los puntos del plano en los puntos del plano que conserva la distancia entre cada par de puntos. Continuando con la notación matemática, si E^2 es el conjunto de puntos del plano y $d(P,Q)$ denota la distancia entre los puntos P y Q, una aplicación

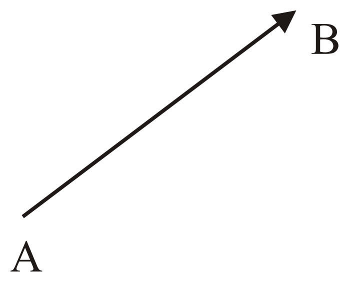

Figura 1

$$m : E^2 \to E^2$$

es un *movimiento* si

$$d(P, Q) = d(m(P), m(Q)),$$

para todo par de puntos P y Q del plano.

Como consecuencia de la misma definición los movimientos son aplicaciones inyectivas, es decir, si m es un movimiento y $P \neq Q$ entonces $m(P) \neq m(Q)$. En efecto, si $P \neq Q$ entonces la distancia entre P y Q no es cero y por ello $d(m(P), m(Q)) \neq 0$, con lo que $m(P) \neq m(Q)$.

A continuación vamos a describir los movimientos del plano que se clasifican en cinco tipos distintos:

Traslaciones, Reflexiones, Rotaciones, Identidad y Reflexiones con deslizamiento.

1.1. Traslación

Para describir este tipo de movimiento es útil conocer el concepto de vector. Suponemos que todos los lectores han estudiado alguna vez este concepto. Nosotros lo recordamos ahora muy rápidamente. Un vector fijo es un par ordenado de puntos del plano, $\overrightarrow{AB}$, o bien es un segmento orientado del plano, es decir, un segmento donde uno de los extremos A es el origen y el otro B es el fin. Se dibujan normalmente con una flecha: Figura 1.

Dos vectores fijos que no están en la misma recta son equivalentes si al unir los orígenes y los extremos por medio de segmentos se obtiene un paralelogramo (un cuadrilátero con los lados paralelos dos a dos). Dos vectores fijos contenidos en la

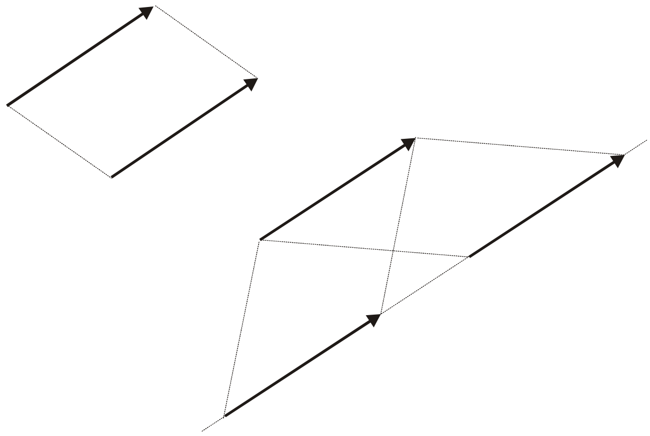

Figura 2

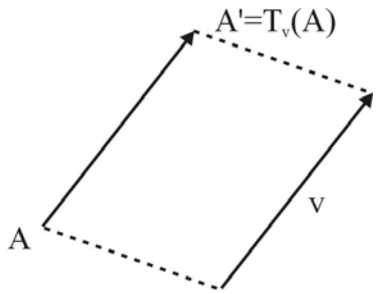

Figura 3

misma recta son equivalentes si ambos son equivalentes a un tercero que está fuera de la recta: Figura 2.

Una clase de equivalencia de vectores fijos se denomina vector libre o simplemente vector (es decir, un vector está formado por todos los vectores fijos equivalentes a un cierto vector dado).

Una *traslación* o *traslación de vector* $\overrightarrow{v}$ es una transformación que hace corresponder a cada punto del plano A un punto del plano A' de modo que $\overrightarrow{AA'}$ está en la clase de equivalencia definida por el vector $\overrightarrow{v}$, es decir $\overrightarrow{AA'}$ es un representante del vector $\overrightarrow{v}$. Denotaremos la traslación de vector $\overrightarrow{v}$ por $T_{\overrightarrow{v}}$, así $T_{\overrightarrow{v}}(A) = A'$. Figura 3.

Las traslaciones transforman cada recta en otra paralela y algunos autores llaman a este tipo de transformaciones traslaciones paralelas. Las rectas que son paralelas a las rectas que contienen a los vectores fijos en la clase de $\overrightarrow{v}$, que define la traslación,

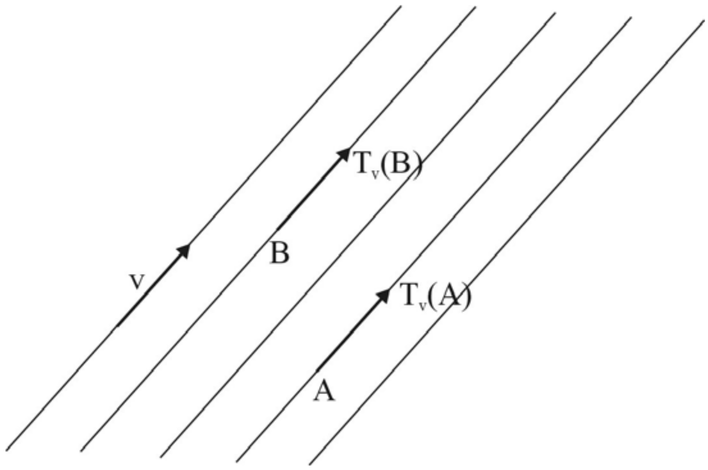

Figura 4

se transforman en ellas mismas, es decir quedan invariantes. Así una forma de ver esta transformación es considerar todas las rectas paralelas que contienen a los vectores de la clase $\overrightarrow{v}$ y a continuación hacer avanzar todos los puntos sobre dichas rectas una longitud igual a la longitud de $\overrightarrow{v}$ (y en la dirección señalada por $\overrightarrow{v}$). Figura 4.

Al considerar un sistema de referencia cartesiano que nos permita definir coordenadas podemos identificar el plano E^2 con el plano real $\mathbb{R}^2$, es decir el producto cartesiano

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) : x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}. \text{ Figura 5.}$$

Cada vector también se puede representar por un elemento de $\mathbb{R}^2$. Dado un vector $\overrightarrow{w}$ basta tomar un representante de $\overrightarrow{w}$ con origen en $(0, 0)$ y entonces el final es un punto del plano con coordenadas $(w_1, w_2) \in \mathbb{R}^2$, y viceversa, cada punto determina un vector. Así si $\overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^2$ es un vector, la traslación $T_{\overrightarrow{v}}$ se define por la fórmula $T_{\overrightarrow{v}}(A) = A + \overrightarrow{v}$, para todo $A \in \mathbb{R}^2$. Es decir, si $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2)$, entonces

$$T_{\overrightarrow{v}}(a_1, a_2) = (a_1 + v_1, a_2 + v_2).$$

Las traslaciones $T_{\overrightarrow{v}}$, con $\overrightarrow{v} \neq 0$, no dejan ningún punto fijo del plano, es decir, no hay ningún punto P tal que $T_{\overrightarrow{v}}(P) = P$. En efecto, si

$$(p_1 + v_1, p_2 + v_2) = T_{\overrightarrow{v}}(P) = P = (p_1, p_2),$$

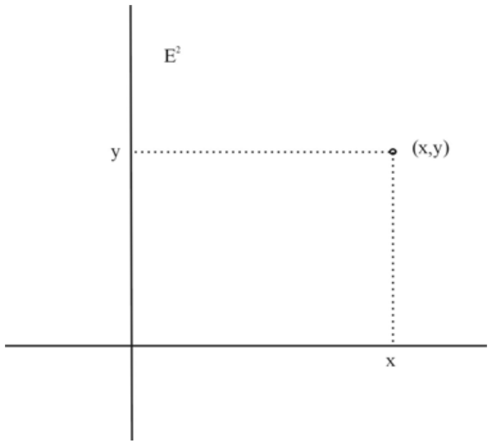

Figura 5

entonces

$$\overrightarrow{v} = (v_1, v_2) = (0, 0),$$

es decir, $\overrightarrow{v} = 0$, en contra de la hipótesis.

Si $\overrightarrow{v} = 0$, la traslación en realidad no mueve nada, se trata de la identidad: un movimiento muy especial que estudiaremos con más extensión más adelante.

Si primero realizamos una traslación y después otra se obtiene de nuevo una traslación, vamos a volver a decir lo anterior con símbolos. Sean $T_{\overrightarrow{v}}$ y $T_{\overrightarrow{w}}$ dos traslaciones y P con coordenadas (p_1, p_2) un punto cualquiera del plano, al aplicar primero la traslación $T_{\overrightarrow{v}}$ obtenemos $T_{\overrightarrow{v}}(P) = P + \overrightarrow{v} = (p_1 + v_1, p_2 + v_2) = P'$, ahora aplicamos la traslación $T_{\overrightarrow{w}}$ y el resultado es:

$$T_{\overrightarrow{w}}(P') = T_{\overrightarrow{w}}(P + \overrightarrow{v}) = P + \overrightarrow{v} + \overrightarrow{w} = (p_1 + v_1 + w_1, p_2 + v_2 + w_2) =$$
$$P + (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) = T_{\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w}}(P).$$

Recuérdese la operación de suma de vectores: la suma de dos vectores $\overrightarrow{v}$ y $\overrightarrow{w}$ con coordenadas (v_1, v_2) y (w_1, w_2) respectivamente es otro vector $\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}$ con coordenadas $(v_1 + w_1, v_2 + w_2)$, geométricamente la Figura 6 muestra como se suman vectores.

Cuando realizamos primero una traslación y luego otra diremos que estamos haciendo el producto de tales traslaciones, así el producto de las traslaciones $T_{\overrightarrow{v}}$ y $T_{\overrightarrow{w}}$ es la traslación $T_{\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w}}$. Esto que acabamos de decir se escribe matemáticamente:

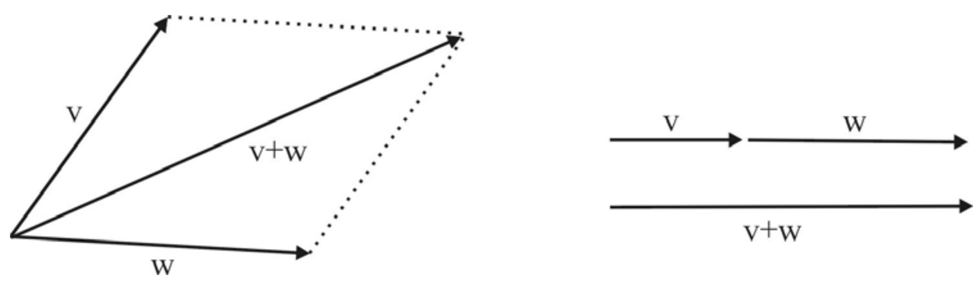

Figura 6

$$T_{\overrightarrow{w}} \circ T_{\overrightarrow{v}} = T_{\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w}}.$$

La operación producto de traslaciones que acabamos de describir es una operación que se puede definir entre dos movimientos cualesquiera.

1.2. Operación producto de movimientos

Dados dos movimientos del plano f y g, podemos construir a partir de f y g un tercer movimiento $g \circ f$, la composición o el producto de los dos movimientos dados, primero realizando f y después g.

En lenguaje matemático: la composición $g \circ f$ de dos movimientos f y g se define por la fórmula:

$$(g \circ f)(P) = g(f(P)),$$

para cualquier punto P del plano.

La transformación $g \circ f$ así definida es realmente un movimiento, pues dado que f y g conservan las distancias también lo hace $g \circ f$. Se dice así que la composición define un producto o una operación en el conjunto de los movimientos que da lugar a una estructura algebraica de grupo que será de gran importancia en todo este curso.

Obsérvese que la fórmula del producto de traslaciones: $T_{\overrightarrow{w}} \circ T_{\overrightarrow{v}} = T_{\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w}}$, relaciona dos operaciones en dos ambientes diferentes:

- la composición de movimientos,

- la suma de vectores $\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}$.

Un caso particular de producto de dos movimientos es el que acabamos de estudiar más arriba: el producto de traslaciones. Ahora bien, si consideramos un vector

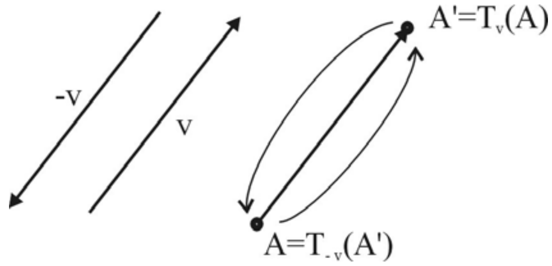

Figura 7

$\overrightarrow{v}$, que está representado por el vector fijo $\overrightarrow{AB}$ de la Figura 7 siguiente, podemos construir el vector opuesto $-\overrightarrow{v}$, uno de cuyos representantes es $\overrightarrow{BA}$, ¿qué ocurre entonces con la composición $T_{\overrightarrow{v}} \circ T_{-\overrightarrow{v}}$?, que es la traslación de vector $\overrightarrow{0}$, es decir, un movimiento que no mueve nada: el movimiento identidad.

1.3. Identidad

Se trata del movimiento que no mueve nada, es decir, la identidad id se define por $id(P) = P$, para todo punto P del plano. La verdad es que estamos tentados a decir que la identidad no sirve para nada, pero en primer lugar verifica todas las condiciones de nuestra definición de movimiento: transformación del plano que conserva las distancias y por otro lado permite definir la estructura algebraica de grupo sobre los movimientos y grupos de simetrías utilizando la composición como operación. La identidad desempeña un papel parecido al cero en los números, como todos sabemos un número ¡bastante importante! La identidad se puede considerar como una traslación de vector nulo o una rotación de ángulo cero como veremos a continuación.

1.4. Rotación

Sea O un punto del plano y α un número real. La rotación alrededor de O y con ángulo α es una transformación R_O^α que lleva cada punto A en un punto A' de modo que $d(O, A) = d(O, A')$ y el ángulo con vértice O, primer lado OA y segundo lado OA' es α. El ángulo se mide con signo, positivo si el sentido es el contrario a las agujas del reloj. Figuras 8 y 9.

El ángulo de una rotación puede ser siempre un número comprendido entre 0

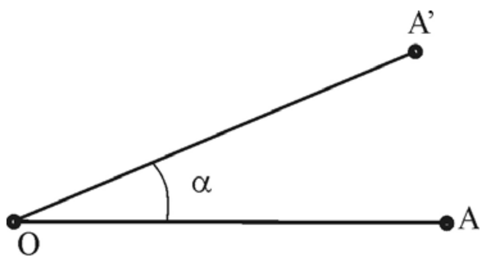

Figura 8

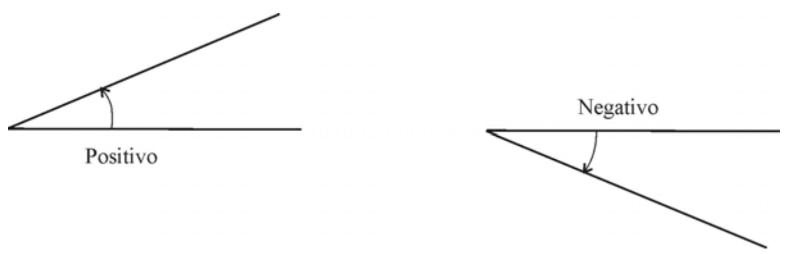

Figura 9

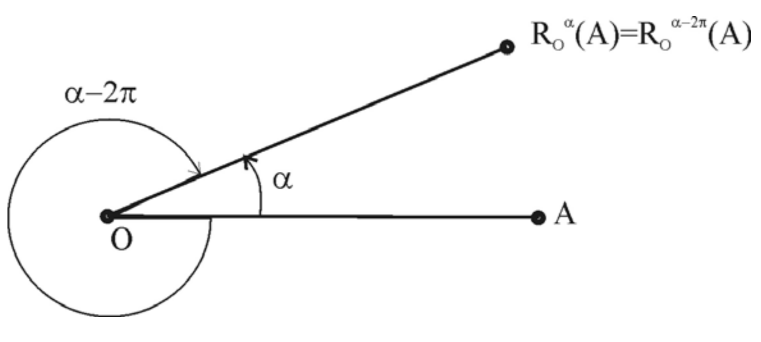

Figura 10

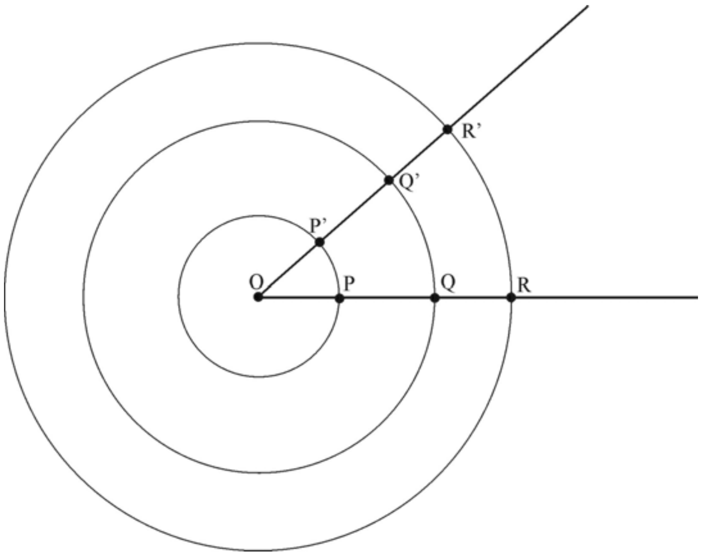

Figura 11

y 2π (mediremos normalmente los ángulos en radianes) pero ya veremos que es útil haber definido rotación de ángulo cualquier número real, así obsérvese que $R_O^{\frac{3}{2}\pi} = R_O^{-\frac{\pi}{2}}$, Figura 10 (en general $R_O^{\alpha} = R_O^{\alpha+2k\pi}$, donde k es un número entero: $-3, -2, -1, 0, 1, 2, ...$).

Obsérvese que $R_O^{\alpha}(O) = O$. Si $\alpha \neq 0$ entonces el único punto fijo de R_O^{α} es O y si $\alpha = 0$, entonces $R_O^{\alpha} = id$. Nótese que la imagen de cualquier punto P se encuentra en la circunferencia de centro O que pasa por P, así las circunferencias con centro O permanecen invariantes al realizar la rotación R_O^{α}. Figura 11.

Es también inmediato darse cuenta de que:

$$R_O^{\alpha} \circ R_O^{\beta} = R_O^{\alpha+\beta}.$$

La fórmula anterior, como en el caso de las traslaciones, relaciona dos operaciones: la composición de rotaciones con el mismo centro y la suma de números reales.

Un caso particular importante es $(R_O^{\pi})^2 = R_O^{\pi} \circ R_O^{\pi} = R_O^{2\pi} = R_O^{0} = id$. Estas rotaciones, las rotaciones de ángulo π (180^o), se llaman medias vueltas y tienen la propiedad de que al repetirse dos veces se obtiene la identidad. También se dice que R_O^{π} tiene orden 2.

Las rotaciones de ángulo $2\pi/3$ (120^o) tienen orden 3, repetidas tres veces dan la identidad:

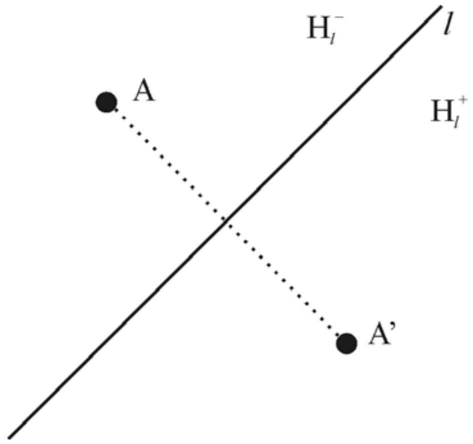

Figura 12

$(R_O^{2\pi/3})^3 = R_O^{2\pi/3+2\pi/3+2\pi/3} = R_O^{2\pi} = R_O^0 = id.$

Obsérvese que lo mismo sucede con las rotaciones de $4\pi/3$ (240^o).

En general las rotaciones de ángulo múltiplo racional de 2π al repetirlas o hacer su producto unas cuantas veces dan lugar a la identidad. Más matemáticamente: $(R_O^{\frac{p}{q}2\pi})^q = id$. Estas rotaciones o rotaciones de orden finito serán las más utilizadas en nuestro estudio.

Cuidado: ¡Hay rotaciones de orden infinto, por ejemplo $R_O^{\sqrt{2}\pi}$!

Un problema que puede que esté rondando en su cabeza es ¿qué movimiento es $R_O^\alpha \circ R_{O'}^\beta$, cuando $O \neq O'$? Con ayuda de otro tipo de movimientos será más fácil dar solución a este problema:

1.5. Reflexión

Sea l una recta cualquiera del plano. La reflexión de eje l es una transformación que envía cada punto A en otro A' de modo que la recta l es la mediatriz del segmento AA'. Llamaremos S_l a la reflexión sobre la recta l, así $S_l(A) = A'$. Figura 12.

Si H_l^+ y H_l^- son los semiplanos determinados por l, $S_l(H_l^+) = H_l^-$ y $S_l(H_l^-) = H_l^+$. Dada una figura F en uno de los semiplanos H_l^+ definidos por l, la figura F' que se produce al reflejar F en un espejo situado sobre la recta l es precisamente $S_l(F)$.

Una observación importante es que todos los puntos de la recta l permanecen fijos al realizar la reflexión sobre la recta l.

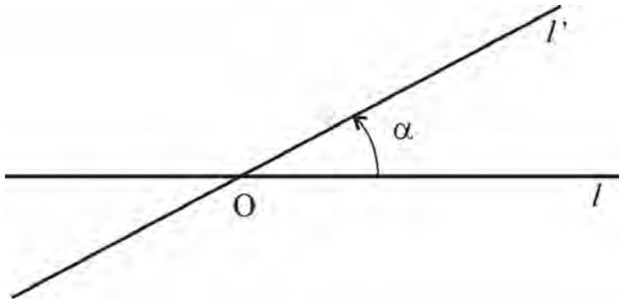

Figura 13

Vamos ahora a practicar con el producto. La primera observación es que si repetimos dos veces la misma reflexión nos quedamos como estábamos, es decir:

$$S_l \circ S_l = id.$$

Si $S_l(A) = A'$ es decir l es la mediatriz del segmento AA', claramente l también es la mediatriz del segmento $A'A$, por tanto $S_l(A') = A$.

Así pues, como en el caso de las medias vueltas se dice que las reflexiones tienen orden dos, incluso a las medias vueltas se les llama, por analogía con las reflexiones, reflexiones con respecto a un punto (el centro de rotación de la media vuelta).

Ahora bien si l y l' son dos rectas distintas cualesquiera del plano hay dos opciones:

- l y l' se cortan en un punto O formando un ángulo α, Figura 13, entonces:

$$S_{l'} \circ S_l = R_O^{2\alpha} \qquad (1)$$

Es decir, la composición de dos reflexiones cuyos ejes se cortan en un punto O es una rotación cuyo centro es el punto de corte de los ejes O y el ángulo de rotación es el doble del ángulo que forman los ejes al cortarse. Figura 14.

Una observación importante es que si $S_{l'} \circ S_l = R_O^{2\alpha}$ entonces $S_l \circ S_{l'} = R_O^{-2\alpha}$, es decir, ¡**no** se produce el mismo efecto al cambiar el orden en el producto de dos movimientos! El producto de movimientos **no** es *conmutativo.*

La fórmula $S_{l'} \circ S_l = R_O^{2\alpha}$ es muy importante como sabe todo aquel que ha tenido que trabajar con movimientos del plano. Lo que se suele hacer en muchos

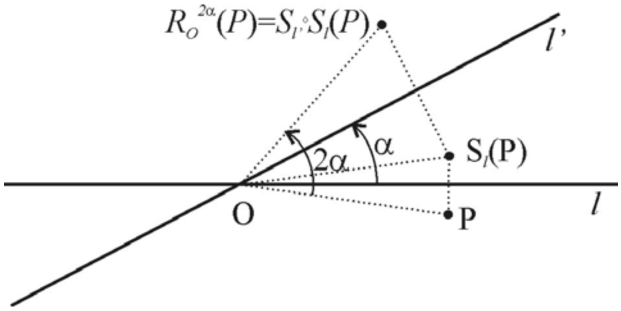

Figura 14

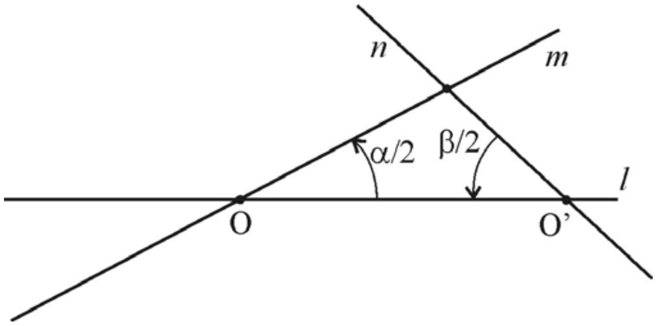

Figura 15

problemas es descomponer las rotaciones en producto de reflexiones. Por ejemplo en el problema que dejamos abierto al estudiar las rotaciones:

Vamos a estudiar cuanto vale el producto $R_O^\alpha \circ R_{O'}^\beta$:

Considérese la siguiente Figura 15.

Por lo que acabamos de ver $R_O^\alpha = S_m \circ S_l$, donde las rectas m y l se cortan en O y forman un ángulo de $\alpha/2$ (de l a m). También $R_{O'}^\beta = S_l \circ S_n$, donde las rectas l y n se cortan en O' y forman un ángulo $\beta/2$. Así tenemos:

$R_O^\alpha \circ R_{O'}^\beta = S_m \circ S_l \circ S_l \circ S_n = S_m \circ id \circ S_n = S_m \circ S_n.$

(En la expresión de arriba estamos escribiendo $S_m \circ S_l \circ S_l \circ S_n$, dando a entender que la operación producto de movimientos es *asociativa*, esta es una observación que más adelante será explicada mejor al recordar la estructura de grupo)

Por tanto $R_O^\alpha \circ R_{O'}^\beta$ se reduce al producto de dos reflexiones $S_m \circ S_n$ luego el resultado es:

- o bien una rotación $R_{O''}^{\alpha+\beta}$, si $\alpha+\beta$ no es múltiplo de 2π, cuyo centro es el punto de corte de m y n, Figura 16,

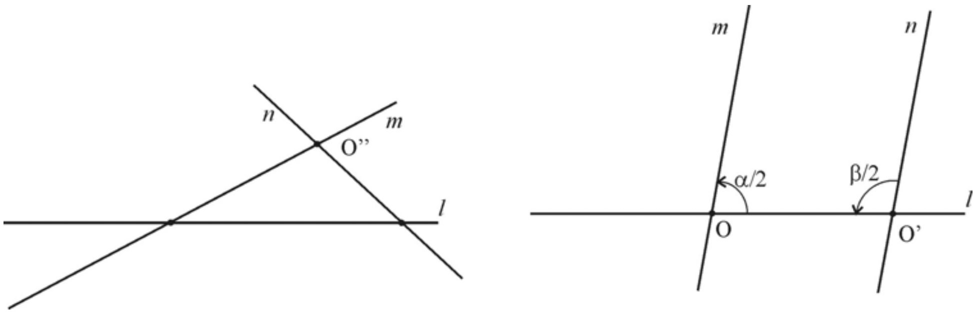

Figura 16

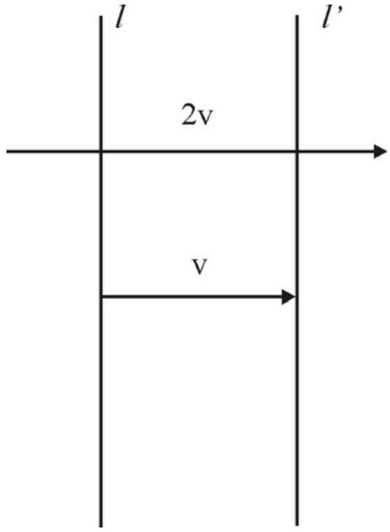

Figura 17

- o bien una traslación, si $\alpha + \beta$ es múltiplo de 2π las rectas m y n son paralelas y se aplica el punto siguiente (composición de reflexiones con ejes paralelos). Ver Figura 16.

- l y l' son paralelas y sea $\overrightarrow{v}$ un vector perpendicular a l y l' con su origen en l y su extremo en l', Figura 17, entonces:

$$S_{l'} \circ S_l = T_{2\overrightarrow{v}} \qquad (2)$$

Recuérdese la operación multiplicación de número por vector (con la suma la otra operación esencial en la estuctura de *espacio vectorial*): Figura 18.

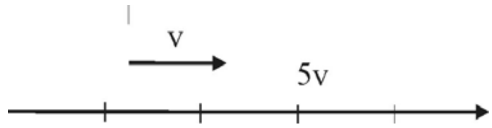

Figura 18

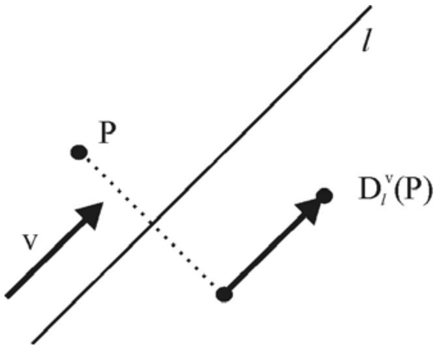

Figura 19

Las fórmulas (1) y (2) nos dicen que todo movimiento, de los estudiados hasta ahora, es producto de reflexiones, pues bien, también se verifica esta propiedad para los movimientos del último tipo las reflexiones con deslizamiento:

1.6. Reflexión con deslizamiento o reflexión sesgada

Hay un tipo final de movimientos que precisamente se va a definir usando la operación producto:

Una reflexión con deslizamiento o reflexión sesgada con eje l y vector $\overrightarrow{v}$, $D_l^{\overrightarrow{v}}$, donde $\overrightarrow{v} \neq 0$ es un vector paralelo a l, es un movimiento que es el producto de una reflexión cuyo eje es l y una traslación de vector $\overrightarrow{v}$, es decir $D_l^{\overrightarrow{v}} = T_{\overrightarrow{v}} \circ S_l$. Figura 19.

Una reflexión con deslizamiento $D_l^{\overrightarrow{v}}$ no deja ningún punto fijo y sólo deja invariante (como conjunto) el eje l. Así:

$$D_l^{\overrightarrow{v}}(P) \neq P \text{ para todo } P \text{ del plano y para cada } P \in l \text{ se tiene que } D_l^{\overrightarrow{v}}(P) \in l.$$

Por otra parte una reflexión con deslizamiento se puede expresar como producto de tres reflexiones. En efecto si $D_l^{\overrightarrow{v}} = T_{\overrightarrow{v}} \circ S_l$, basta ahora tener en cuenta que

$T_{\vec{v}} = S_m \circ S_n$ (aplicando (2) de 1.5) y así $D_l^{\vec{v}} = S_m \circ S_n \circ S_l$. Además una reflexión con deslizamiento no se puede poner como producto de menos de tres reflexiones.

Obsérvese que:

$$D_l^{\vec{v}} = T_{\vec{v}} \circ S_l = S_l \circ T_{\vec{v}}.$$

Es decir, que los movimientos S_l y $T_{\vec{v}}$ pueden ser cambiados de orden en el producto anterior, ocasionando al final el mismo efecto. De aquí ya podemos ver qué ocurre al hacer el producto de una reflexión con deslizamiento consigo misma:

$$D_l^{\vec{v}} \circ D_l^{\vec{v}} = T_{\vec{v}} \circ S_l \circ T_{\vec{v}} \circ S_l = T_{\vec{v}} \circ S_l \circ S_l \circ T_{\vec{v}} = T_{\vec{v}} \circ T_{\vec{v}} = T_{\vec{2v}},$$

El "cuadrado" de una reflexión con deslizamiento es una traslación.

1.7. Teorema de clasificación de movimientos del plano

¿Hay más tipos de movimientos en el plano?, la respuesta es el teorema de clasificación de movimientos:

Teorema.

Todo movimiento del plano es la identidad, una traslación, una rotación, una reflexión o una reflexión con deslizamiento.

1.8. Orientación

Hay algunas propiedades que la mayor parte de las personas aceptan como geométricas pero que sin embargo no son conservadas por los movimientos (al menos no por todos). Por ejemplo los dos cuadriláteros que aparecen en la Figura 20, ¿son o no son iguales? Si suponemos que los cuadriláteros son de madera y tomamos por definición de igualdad que se puedan superponer sin cambiar la cara que está sobre la mesa, tales cuadriláteros no son iguales.

Pero existe un movimiento, la reflexión sobre el eje l que transforma uno de los cuadriláteros en el otro, luego tomando por definición el hecho de que se pueda transformar uno en otro por un movimiento, los cuadriláteros son iguales. Algo parecido sucede con una fotografía de la mano izquierda y otra de la derecha. También los triángulos de la siguiente Figura 21 tienen todos los lados iguales pero no se pueden superponer.

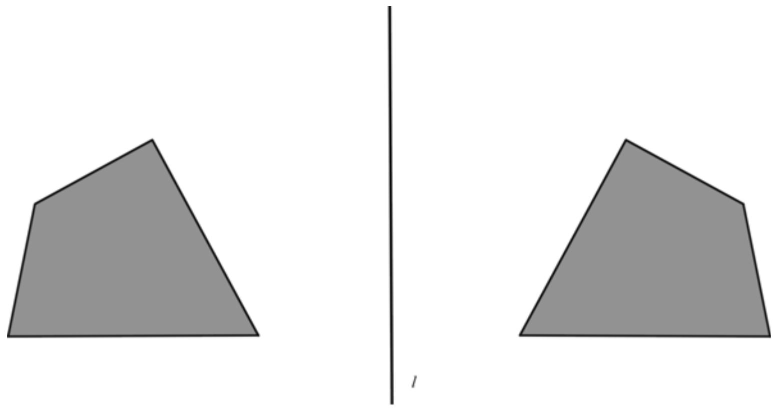

Figura 20

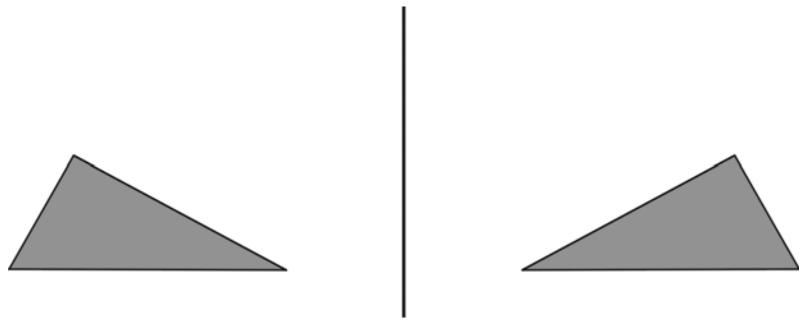

Figura 21

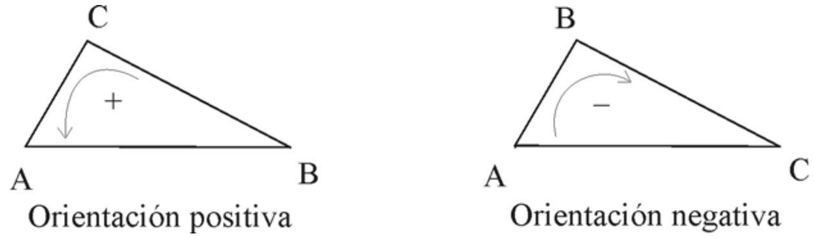

Figura 22

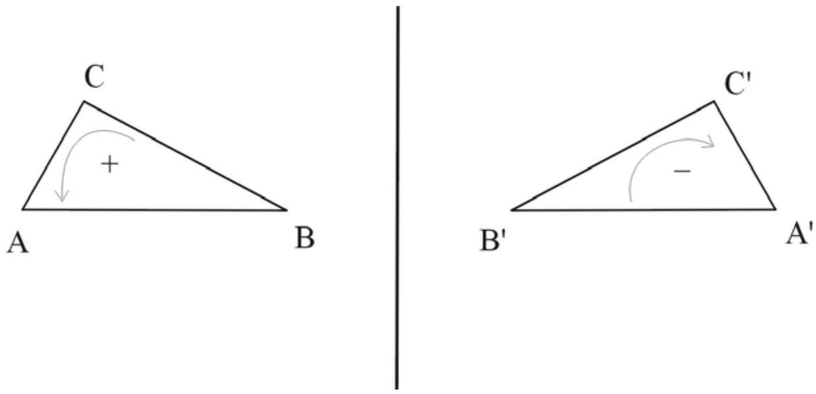

Figura 23

Esto nos lleva a definir una propiedad que es conservada sólo por algunos movimientos: la orientación. Vamos a definir orientación de triángulos: un triángulo ABC se dice que está orientado *positivamente* si al recorrer los vértices de A a B, de B a C y de C a A se lleva a cabo un recorrido del borde de ABC en el sentido contrario a las agujas del reloj: Figura 22, izquierda.

En caso contrario se dice que el triángulo está orientado negativamente (Figura 22, derecha).

Las traslaciones, rotaciones e identidad son movimientos que conservan la orientación: transforman triángulos orientados positivamente (negativamente) en triángulos orientados positivamente (resp. negativamente). Las reflexiones y reflexiones sesgadas invierten la orientación: transforman triángulos orientados positivamente en triángulos orientados negativamente y viceversa. Figura 23.

Así se pueden clasificar los movimientos en dos tipos: directos, si conservan la orientación, e inversos en caso contrario. Obsérvese que los movimientos directos son productos de un número par de reflexiones mientras que los inversos son producto de un número impar. Téngase en cuenta que al hacer el producto de movimientos el caracter inverso-directo sigue la regla de los signos: si cambiamos dos veces la orientación de un triángulo volvemos a la orientación original, así el producto de dos movimientos inversos es un movimiento directo. El producto de cualquier número de movimientos directos es directo. El producto de un número impar de movimientos que invierten la orientación también invierte la orientación, mientras que el producto de un número par de movimientos inversos es un movimiento directo. Así el producto de un número impar de reflexiones no puede ser la identidad.

La propiedad de la orientación es muy importante por sus aplicaciones, por ejemplo en química es un hecho bien estudiado la existencia de moléculas de compuestos cuya única diferencia es la orientación y sin embargo las propiedades son distintas (ver en la historia de la simetría de la siguiente sección el año 1860).