

ÍNDICE

Capítulo 1

Modelo de rigidez de engrane, error de transmisión y reparto de carga para engranajes rectos

- 1.1. Rigidez de la pareja de dientes
- 1.2. Modelo de contacto teórico
- 1.3. Modelo de contacto extendido
- 1.4. Modelo de contacto con rebaje
- 1.5. Engranajes de alto grado de recubrimiento
- 1.6. Engranajes con dimensiones no estándar
- 1.7. Anexo. Longitud de los intervalos de contacto adicionales

Capítulo 2

Modelo de rigidez de engrane, error de transmisión y reparto de carga para engranajes helicoidales

- 2.1. Planteamiento general
- 2.2. Rigidez de la pareja de dientes
- 2.3. Modelo de contacto teórico
- 2.4. Modelo de contacto extendido
- 2.5. Modelo de contacto con rebaje
- 2.6. Consideraciones acerca del modelo con rebaje

Capítulo 3

Geometría de los engranajes cilíndricos de dentado interior

- 3.1. Geometría del piñón cortador
- 3.2. Geometría del diente interior generado
- 3.3. Geometría del engrane de piñón y corona

Capítulo 4

Modelo de rigidez de engrane, error de transmisión y reparto de carga para engranajes rectos interiores

- 4.1. Rigidez de la pareja de dientes
- 4.2. Modelo de contacto teórico
- 4.3. Modelo de contacto extendido
- 4.4. Modelo de contacto con rebaje
- 4.5. Engranajes de alto grado de recubrimiento
- 4.6. Engranajes con dimensiones no estándar
- 4.7. Engranajes de alto grado de recubrimiento inducido por la deformación
- 4.8. Anexo. Longitud de los intervalos de contacto adicionales

Capítulo 5

Modelo de rigidez de engrane, error de transmisión y reparto de carga para engranajes planetarios rectos

- 5.1. Consideraciones geométricas
- 5.2. Modelos de contacto teórico, extendido y con rebaje
- 5.3. Influencia de la modificación del perfil

Apéndice

Glosario de términos

CAPÍTULO 1

MODELO DE RIGIDEZ DE ENGRANE, ERROR DE TRANSMISIÓN Y REPARTO DE CARGA PARA ENGRANAJES RECTOS

En este documento se recoge el desarrollo del modelo de rigidez de engrane, error de transmisión y reparto de carga para engranajes rectos exteriores. Se presenta de manera ordenada y sistemática la evolución completa del conocimiento adquirido, partiendo del modelo teórico –sin considerar deformaciones–, siguiendo por el modelo extendido –considerando deformaciones–, y terminando por el modelo con rebaje –considerando modificaciones de perfil–. A partir de aquí se podrán incluir nuevos factores, como desgaste, errores de fabricación, etc. Servirá también para fijar la nomenclatura de posteriores modelos para engranajes helicoidales o de dentado interior.

1.1. RIGIDEZ DE LA PAREJA DE DIENTES

Se ha de distinguir entre la **rigidez de la pareja de dientes**, que es la fuerza con la que ha de empujar un diente a su contrario para que se produzca una deformación de una unidad de longitud, medida en la línea de presión, de la **rigidez de engrane**, que es la rigidez de todas las parejas de dientes en contacto simultáneo, en un instante dado (o posición de engrane dada). Se designarán por K_M y K_T , respectivamente.

En el Documento Técnico EC-III/5 se obtuvo una fórmula aproximada para la rigidez de la pareja de dientes, que se expresaba como:

$$K_M(\xi) = K_{Mmax} \cos[b_0(\xi - \xi_m)]$$

definida sobre el intervalo de contacto $[\xi_{inn}, \xi_{out}]$, y, naturalmente, igual a cero fuera de ese intervalo. K_{Mmax} es un parámetro todavía no estudiado en profundidad. De momento ha de calcularse por integración numérica de las ecuaciones del potencial elástico, o mediante

técnicas de elementos finitos. En este documento se utilizarán valores *normalizados* de la rigidez $[K_M/K_{Mmax}]$ para las representaciones gráficas.

Para presentar el cálculo de b_0 y ξ_m es necesario hacer antes unas consideraciones previas. La ecuación anterior se obtuvo para engranajes con altura de cabeza igual al módulo, y radios de cabeza y distancia entre centros nominales con desplazamiento. Se llamará engranaje estándar asociado al engranaje considerado, y se designará con el superíndice **, a un engranaje con altura de cabeza igual al módulo, radios de cabeza y distancia entre centros nominales con desplazamiento, y resto de parámetros geométricos como los del engranaje considerado; es decir:

$$\begin{aligned} h_a^{**} &= 1 \\ r_{out}^{**} &= r_p + m(x + 1) \\ C^{**} &= r_{p1} + r_{p2} + m(x_1 + x_2) \end{aligned}$$

Este engranaje estándar asociado tendrá un grado de recubrimiento ε_α^{**} y un punto medio del intervalo de engrane ξ_m^{**} que vendrán dados por:

$$\begin{aligned} \varepsilon_\alpha^{**} &= \xi_{out1}^{**} + \xi_{out2}^{**} - \frac{Z_1 + Z_2}{2\pi} \operatorname{tg} \alpha_t'^{**} \\ \xi_m^{**} &= \xi_{out1}^{**} - \frac{\varepsilon_\alpha^{**}}{2} \end{aligned}$$

Estos parámetros, en concreto ε_α^{**} y ξ_m^{**} , han de calcularse sin tener en cuenta ningún tipo de restricción de interferencia o apuntamiento, puesto que se trata de un engranaje ficticio, sobre el que más adelante se harán las correcciones oportunas.

Si ahora se modifica la distancia entre centros, para hacerla coincidir con la del engranaje considerado, se llega a un engranaje intermedio, que se designará por el superíndice *, cuyo grado de recubrimiento y punto medio del intervalo de engrane serán:

$$\begin{aligned} \varepsilon_\alpha^* &= \xi_{out1}^{**} + \xi_{out2}^{**} - \frac{Z_1 + Z_2}{2\pi} \operatorname{tg} \alpha_t'^* \\ \xi_m^* &= \xi_{out1}^{**} - \frac{\varepsilon_\alpha^*}{2} \end{aligned}$$

Finalmente, si se ajustan las alturas de cabeza efectivas –considerando, por tanto, la posibilidad de engrane en vacío–, se llega al engranaje considerado, para el cual:

$$\begin{aligned} \alpha_t' &= \alpha_t'^* \\ \varepsilon_\alpha &= \xi_{out1} + \xi_{out2} - \frac{Z_1 + Z_2}{2\pi} \operatorname{tg} \alpha_t' \\ \xi_m &= \xi_m^* \end{aligned}$$

donde ξ_m ya no es el punto medio del intervalo de contacto sino el punto de rigidez máxima. El punto inferior de contacto se puede calcular con la ecuación:

$$\xi_{inn1} = \frac{Z_1 + Z_2}{2\pi} \operatorname{tg} \alpha'_t - \xi_{out2}$$

Hechas estas consideraciones previas, los parámetros de la ecuación aproximada de la rigidez de la pareja de dientes b_0 y ξ_m se calculan de la siguiente manera:

$$b_0 = \left[\frac{1}{2} \left(\kappa_1 + \frac{\varepsilon_{\alpha}^{**}}{2} \right)^2 - \kappa_2 \right]^{-\frac{1}{2}}$$

$$\xi_m = \xi_{out1}^{**} - \frac{\varepsilon_{\alpha}^*}{2}$$

donde κ_1 y κ_2 son coeficientes que dependen del enfoque con que se quiera estimar la rigidez del empotramiento y del contacto. En este documento, para las figuras, se considerarán los valores del enfoque II, $\kappa_1 = 1,11$ y $\kappa_2 = 1,17$.

En adelante, el parámetro ξ se identificará con una coordenada lineal a lo largo de la línea de presión, y su valor en cada punto será igual al del parámetro ξ_1 de la rueda conductora cuando su evolvente –o su prolongación– pasa por él, es decir:

$$\xi = \frac{Z}{2\pi} \sqrt{\frac{r_{c1}^2}{r_{b1}^2} - 1}$$

En el punto de tangencia de la línea de presión con la circunferencia de base de la rueda conductora $\xi = 0$, y en el punto de tangencia con la circunferencia de base de la rueda conducida $\xi = \frac{Z_1 + Z_2}{2\pi} \operatorname{tg} \alpha'_t$.

1.2. MODELO DE CONTACTO TEÓRICO

Para el modelo teórico, es decir, sin tener en cuenta las deformaciones de los dientes, una vez calculados los valores de b_0 y ξ_m , y los límites del intervalo de contacto ξ_{inn} y ξ_{out} , la rigidez de la pareja de dientes se puede expresar como:

$$\begin{aligned} K_M(\xi) &= 0 && \text{para } \xi \leq \xi_{inn} \\ K_M(\xi) &= K_{Mmax}^* b \cos(b_0(\xi - \xi_m)) && \text{para } \xi_{inn} \leq \xi \leq \xi_{out} \\ K_M(\xi) &= 0 && \text{para } \xi_{out} \leq \xi \end{aligned}$$

En esta ecuación se ha hecho $K_{Mmax} = K_{Mmax}^* b$, de manera que K_{Mmax}^* no depende del ancho de cara. La rigidez de engrane en una posición dada será la suma de las rigideces de las parejas de dientes en contacto en ese instante:

$$K_{T-th}(\xi) = \sum_j K_{Mj}(\xi) = \sum_j K_M(\xi + j)$$

Aplicando el principio de mínimo potencial de deformación se obtiene que la fracción de

carga soportada por la pareja de dientes i en cada posición de engrane viene dada por:

$$R_{i-th}(\xi) = \frac{K_{Mi}(\xi)}{K_{T-th}(\xi)}$$

y, consecuentemente, la deformación de la pareja de dientes en la misma posición será:

$$\delta_{th}(\xi) = \frac{F_i(\xi)}{K_{Mi}(\xi)} = \frac{R_{i-th}(\xi)F_T}{K_{Mi}(\xi)} = \frac{F_T}{\sum_j K_M(\xi + j)}$$

En esta última ecuación se puede apreciar que la deformación de la pareja de dientes i no depende de i , de donde se puede concluir que:

La deformación de todas las parejas de dientes en contacto simultáneo en un instante dado es la misma.

Esto quiere decir que la deformación de los dientes por efecto de la carga se traduce en un retraso de la rueda conducida respecto de su posición conjugada con la de la rueda conductora, razón por la que se denomina error de transmisión cuasi estático. En adelante, y por simplificar, se denominará sencillamente error de transmisión, pero debe tenerse en cuenta que hay otros factores que influyen en el error de transmisión, como desalineamientos, errores de fabricación, efectos vibratorios, etc. En la Figura 1.1 se muestra el desfase entre las ruedas conductora y conducida por efecto de la deformación. En general, el error de transmisión se puede expresar en términos de desfase angular (ángulo φ_2 en la figura) o en términos de desfase lineal en la línea de presión (distancia \overline{cd} en la figura, equivalente a δ_{th} en la última ecuación). En este documento se empleará este enfoque lineal.

Las tres últimas ecuaciones constituyen el modelo teórico de rigidez de engrane, reparto de carga y error de transmisión. En la Figura 1.2 se representan las curvas correspondientes,

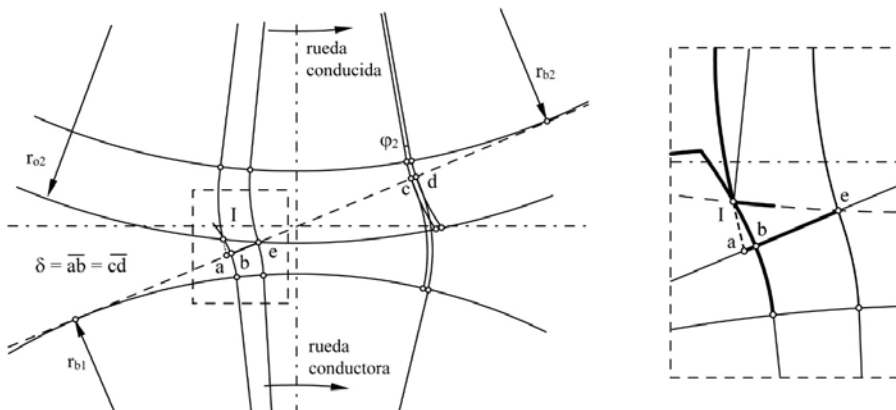


Figura 1.1. Retraso de la rueda conducida por efecto de la deformación de los dientes.

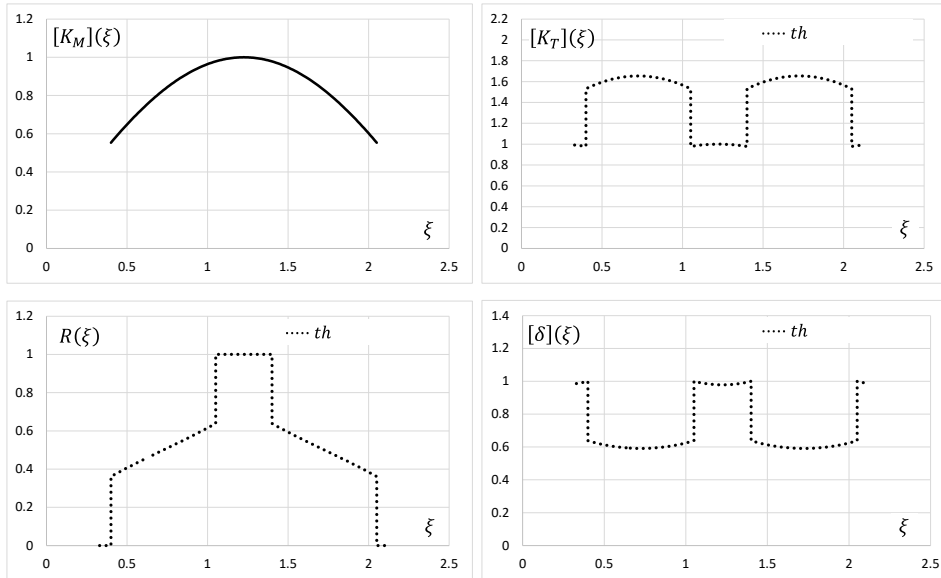


Figura 1.2. Modelo de contacto teórico: rigidez de la pareja de dientes, rigidez de engrane, reparto de carga y error de transmisión de engranajes rectos con grado de recubrimiento estándar.

junto con la curva de rigidez de la pareja de dientes, para un engranaje de grado de recubrimiento estándar, esto es, entre 1 y 2.

1.3. MODELO DE CONTACTO EXTENDIDO

En la Figura 1.1 se puede apreciar que la deformación de los dientes –el error de transmisión– tiene otro efecto importante en el engrane de los dientes, que consiste en un adelanto del inicio del contacto (y un retraso de la finalización del mismo, no representado en la figura). En efecto, en la posición representada en la figura, en que el perfil de la rueda conductora pasa por el punto b , si no hubiera retraso en la rueda conducida –si no hubiera carga– la prolongación de su perfil también pasaría por b , y no habría contacto hasta alcanzar el punto e , que es el punto inferior de contacto. Sin embargo, debido a la deformación, el diente conducido no pasa por b sino por a , y se produce contacto en el punto l . Ello se traduce en un intervalo de contacto adicional al inicio del contacto, que corresponderá al intervalo \overline{be} en la línea de presión, y otro intervalo adicional de contacto parecido a la finalización del engrane.

Los límites de este intervalo de contacto extendido se designarán por ξ_{\min} y ξ_{\max} . Obviamente, sus valores dependen de la carga transmitida, pero lo que parece claro a la vista de la Figura 1.1 es que dichos valores serán función de los valores de la deformación δ en ese instante (de la distancia \overline{cd} en la figura, que es igual a la distancia \overline{ab}) y de la geometría de

los dientes. Esta relación, puramente geométrica, entre δ y la distancia \overline{be} , se puede expresar como la distancia δ_G que se habría de aproximar el diente conductor al conducido en el intervalo adicional de contacto, es decir, fuera del intervalo $[\xi_{inn}, \xi_{out}]$, para tocar la base del diente conducido. Esa distancia se puede aproximar con mucha precisión mediante la ecuación:

$$\begin{aligned} \delta_G(\xi) &= \left(\frac{2\pi}{Z_1}\right)^2 C_{p-inn} r_{b1} (\xi_{inn} - \xi)^2 & \text{para } \xi \leq \xi_{inn} \\ \delta_G(\xi) &= 0 & \text{para } \xi_{inn} \leq \xi \leq \xi_{out} \\ \delta_G(\xi) &= \left(\frac{2\pi}{Z_1}\right)^2 C_{p-out} r_{b1} (\xi - \xi_{out})^2 & \text{para } \xi_{out} \leq \xi \end{aligned}$$

donde C_{p-inn} y C_{p-out} son constantes cuyo procedimiento de cálculo se describe en el anexo de este documento. Esa misma ecuación se puede utilizar para calcular los límites del intervalo de contacto extendido. En efecto, si en esa ecuación se hace $\delta_G(\xi)$ igual a la deformación en el punto inferior (o superior) de contacto extendido y se despeja ξ , se obtendrá el valor de ξ_{min} (o ξ_{max}), pero ello requerirá de un procedimiento iterativo puesto que, como es evidente, no es posible calcular la deformación en esos puntos antes de conocer esos puntos. No obstante, se puede evitar este proceso iterativo si se admite que la deformación en ξ_{min} y ξ_{max} será muy parecida a la deformación teórica en ξ_{inn} y ξ_{out} , de manera que:

$$\begin{aligned} \xi_{min} &= \xi_{inn} - \frac{Z_1}{2\pi} \sqrt{\frac{\delta_{th}(\xi_{inn})}{C_{p-inn} r_{b1}}} \\ \xi_{max} &= \xi_{out} + \frac{Z_1}{2\pi} \sqrt{\frac{\delta_{th}(\xi_{out})}{C_{p-out} r_{b1}}} \end{aligned}$$

Se puede comprobar que la rigidez de la pareja de dientes en los intervalos de contacto adicionales, siempre que estos sean pequeños, como sucede siempre, es prácticamente constante. En consecuencia, la expresión de la rigidez de la pareja de dientes se puede generalizar de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} K_M(\xi) &= K_{Mmax}^* b \cos(b_0(\xi_{inn} - \xi_m)) & \text{para } \xi_{min} \leq \xi \leq \xi_{inn} \\ K_M(\xi) &= K_{Mmax}^* b \cos(b_0(\xi - \xi_m)) & \text{para } \xi_{inn} \leq \xi \leq \xi_{out} \\ K_M(\xi) &= K_{Mmax}^* b \cos(b_0(\xi_{out} - \xi_m)) & \text{para } \xi_{out} \leq \xi \leq \xi_{max} \end{aligned}$$

Con las expresiones de K_M , δ_G , ξ_{min} y ξ_{max} se puede proceder a la formulación del modelo de contacto extendido. La fuerza que soporta una pareja de dientes en un punto dentro del intervalo teórico de contacto $[\xi_{inn}, \xi_{out}]$ es igual a la rigidez de la pareja en ese punto multiplicada por el error de transmisión en ese instante. Esto es así porque dentro del intervalo teórico de contacto los dos dientes de la pareja están en contacto incluso cuando no hay carga, y por tanto la deformación de los dientes es igual al error de transmisión. Sin embargo, en el intervalo de contacto adicional esto no es así porque para iniciar el contacto los dientes se han de acercar una distancia δ_G , de manera que la deformación efectiva será la diferencia

$\delta - \delta_G$. Y como δ_G es igual a 0 en todo el intervalo de contacto teórico, se puede poner con toda generalidad:

$$F_j(\xi) = K_{Mj}(\xi) (\delta_{ext}(\xi) - \delta_{Gj}(\xi)) = K_M(\xi + j)(\delta_{ext}(\xi) - \delta_G(\xi + j))$$

La fuerza total transmitida será la suma de la fuerza sobre cada una de las parejas en contacto, y por tanto:

$$F_T = \sum_j F_j(\xi) = \delta_{ext}(\xi) \sum_j K_M(\xi + j) - \sum_j K_M(\xi + j)\delta_{Gj}(\xi + j)$$

donde $\delta_{ext}(\xi)$ se ha sacado fuera del sumatorio puesto que es igual para todas las parejas de dientes, y por tanto independiente de j . En consecuencia, el error de transmisión se puede obtener sencillamente despejándolo de esta ecuación:

$$\delta_{ext}(\xi) = \frac{F_T + \sum_j K_M(\xi + j)\delta_G(\xi + j)}{\sum_j K_M(\xi + j)}$$

El reparto de carga se puede obtener sustituyendo la expresión de $\delta_{ext}(\xi)$ en la de $F_j(\xi)$:

$$R_{ext}(\xi) = \frac{F(\xi)}{F_T} = \frac{K_M(\xi)}{F_T} \left(\frac{F_T + \sum_j K_M(\xi + j)\delta_G(\xi + j)}{\sum_j K_M(\xi + j)} - \delta_G(\xi) \right)$$

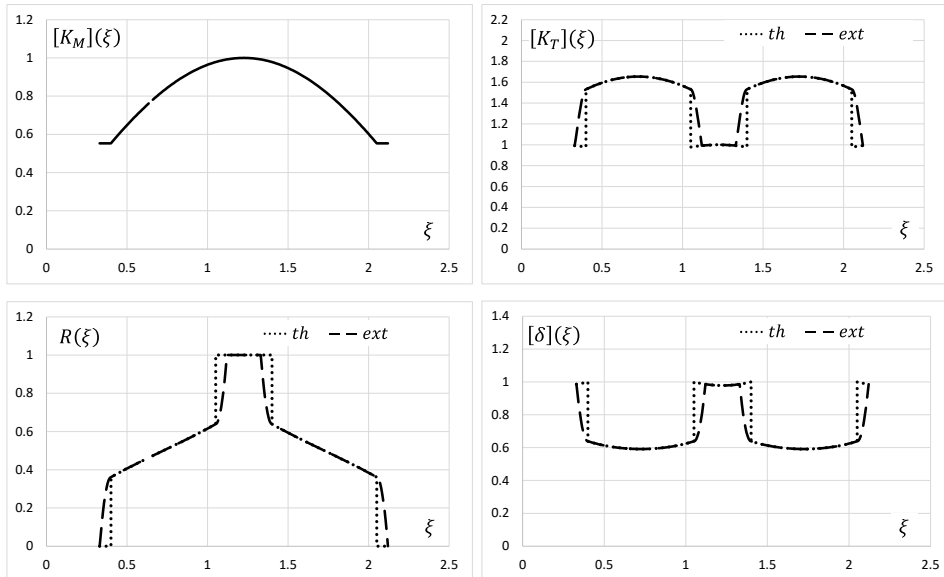


Figura 1.3. Modelo de contacto extendido: rigidez de la pareja de dientes, rigidez de engrane, reparto de carga y error de transmisión de engranajes rectos con grado de recubrimiento estándar.

Por último, la rigidez de engrane se obtiene a partir de la fuerza total y el error de transmisión:

$$K_{T-ext}(\xi) = \frac{F_T}{\delta_{ext}(\xi)} = \frac{F_T \sum_j K_M(\xi + j)}{F_T + \sum_j K_M(\xi + j) \delta_G(\xi + j)}$$

Las tres últimas ecuaciones constituyen el modelo extendido de rigidez de engrane, reparto de carga y error de transmisión. En la Figura 1.3 se representan las curvas correspondientes, junto con la curva de rigidez de la pareja de dientes extendida, para el engranaje de grado de recubrimiento estándar de la figura anterior. Es digna de mención la forma parabólica de las curvas durante los intervalos de carga de las parejas de dientes, así como el alargamiento del intervalo de contacto efectivo y el correspondiente acortamiento del intervalo de contacto único.

1.4. MODELO DE CONTACTO CON REBAJE

El prematuro inicio del contacto provocado por el error de transmisión no sólo se traduce en un intervalo adicional de contacto. En la Figura 1.1 se aprecia que este contacto prematuro tiene lugar fuera de la línea de presión, de manera que no es un contacto conjugado, por lo que las componentes de la velocidad en la dirección normal a los perfiles de un diente y otro no son iguales. Esto se traduce en la presencia de un choque al inicio del contacto, y un empuje a la finalización del mismo, que son fuente de sobrecargas dinámicas, ruido y vibraciones.

La manera más eficaz, y más frecuentemente empleada, de mitigar estos indeseables efectos es la modificación del perfil. En la Figura 4 se aprecia, de manera muy gráfica, el efecto de un rebaje en la cabeza del diente conducido en el retraso del inicio del contacto. Es evidente que si se elimina material de la cabeza del diente conducido el contacto no se produce en el punto I (en esa posición los perfiles no se pueden acercar más; su separación viene impuesta por la deformación de las parejas de dientes que ya están contactando), sin que se desplazará a un punto posterior, más a la derecha de I . Incluso, si la profundidad de rebaje es la adecuada, el punto de inicio de contacto se podrá desplazar hasta el punto de inicio teórico (el punto e), dentro de la línea de presión, evitando por tanto el impacto de inicio mencionado.

Para definir un rebaje se han de conocer tres parámetros: la profundidad, la longitud y la forma. Existen diversas maneras de definir cada uno de ellos –por decirlo de algún modo, distintos sistemas de referencia–; en este documento se expresarán todos en función del parámetro de contacto ξ . Así, la **profundidad de rebaje** Δ_R será la diferencia entre los parámetros ξ correspondientes a la posición de contacto representada en la Figura 1.4 (ξ del punto b) y a la posición de contacto de un perfil imaginario (o avanzado) del diente conductor que pasara por el punto de cabeza del perfil rebajado. La **longitud de rebaje** $\Delta\xi_R$ es la diferencia de parámetros ξ correspondientes al punto de cabeza y al punto de entronque del rebaje con el perfil de evolvente, del diente rebajado. La **forma del rebaje** es la ecuación que define la profundidad de rebaje en cada punto del mismo. Los rebajes más habituales son el lineal y el

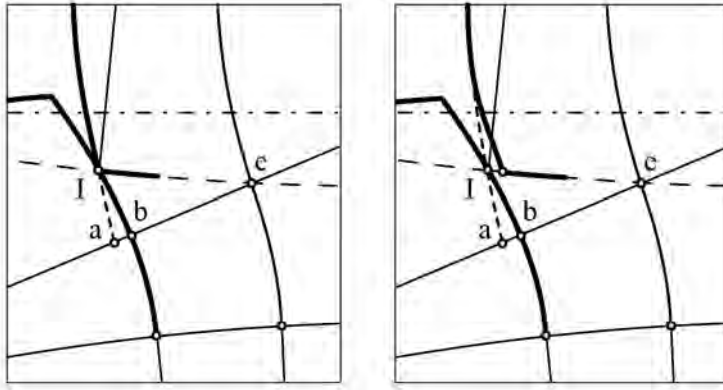


Figura 1.4. Retraso en el inicio del contacto producido por el rebaje del diente.

parabólico, que se expresarían de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 \delta_R(\xi) &= \Delta_{R-inn} && \text{para} && \xi_{min} \leq \xi \leq \xi_{inn} \\
 \delta_R(\xi) &= \Delta_{R-inn} \left(1 - \frac{\xi - \xi_{inn}}{\Delta\xi_{R-inn}}\right)^j && \text{para} && \xi_{inn} \leq \xi \leq \xi_{inn} + \Delta\xi_{R-inn} \\
 \delta_R(\xi) &= 0 && \text{para} && \xi_{inn} + \Delta\xi_{R-inn} \leq \xi \leq \xi_{out} - \Delta\xi_{R-out} \\
 \delta_R(\xi) &= \Delta_{R-out} \left(1 - \frac{\xi_0 - \xi}{\Delta\xi_{R-out}}\right)^j && \text{para} && \xi_{out} - \Delta\xi_{R-out} \leq \xi \leq \xi_{out} \\
 \delta_R(\xi) &= \Delta_{R-out} && \text{para} && \xi_{out} \leq \xi \leq \xi_{max}
 \end{aligned}$$

con $j = 1$ para rebaje lineal y $j = 2$ para rebaje parabólico.

La profundidad de rebaje en cada punto δ_R es una nueva holgura entre los dientes en contacto, es decir, una distancia adicional que los dientes tienen que aproximarse entre sí para contactar, y por tanto una cantidad que hay que descontar al error de transmisión para calcular la deformación de los dientes, como sucedía con δ_G en el intervalo de contacto adicional. Así pues, siguiendo el mismo procedimiento, la fuerza que soporta una pareja de dientes en contacto es:

$$F_j(\xi) = K_{Mj}(\xi) (\delta_r(\xi) - \delta_{Gj}(\xi) - \delta_{Rj}(\xi)) = K_M(\xi + j) (\delta_r(\xi) - \delta_G(\xi + j) - \delta_R(\xi + j))$$

Como en el caso anterior, la fuerza total transmitida será la suma de la fuerza sobre cada una de las parejas en contacto:

$$F_T = \sum_j F_j(\xi) = \delta_r(\xi) \sum_j K_M(\xi + j) - \sum_j K_M(\xi + j) (\delta_G(\xi + j) + \delta_R(\xi + j))$$

y, despejando $\delta_r(\xi)$, se obtiene el error de transmisión:

$$\delta_r(\xi) = \frac{F_T + \sum_j K_M(\xi + j)(\delta_G(\xi + j) + \delta_R(\xi + j))}{\sum_j K_M(\xi + j)}$$

El reparto de carga se puede obtener sustituyendo la expresión de $\delta_r(\xi)$ en la de $F_j(\xi)$:

$$R_r(\xi) = \frac{F(\xi)}{F_T} = \frac{K_M(\xi)}{F_T} \left(\frac{F_T + \sum_j K_M(\xi + j)(\delta_G(\xi + j) + \delta_R(\xi + j))}{\sum_j K_M(\xi + j)} - (\delta_G(\xi) + \delta_R(\xi)) \right)$$

y la rigidez de engrane se obtiene a partir de la fuerza total y el error de transmisión:

$$K_{T-r}(\xi) = \frac{F_T}{\delta_r(\xi)} = \frac{F_T \sum_j K_M(\xi + j)}{F_T + \sum_j K_M(\xi + j)(\delta_G(\xi + j) + \delta_R(\xi + j))}$$

Las tres últimas ecuaciones constituyen el modelo con rebaje de rigidez de engrane, reparto de carga y error de transmisión. Pero a pesar de que el modelo queda completamente definido por esas ecuaciones, las posibilidades que ofrece el rebaje son muy diversas, y requieren una discusión más detallada.

En primer lugar se ha de analizar la influencia de la profundidad de rebaje. Se ha indicado más arriba que si la profundidad de rebaje es la adecuada, el inicio del contacto se puede desplazar hasta el punto de inicio de contacto teórico $\xi = \xi_{inn}$, con la ventaja de que el contacto se produce dentro de la línea de presión, las velocidades perpendiculares a los perfiles son iguales en ambos, y no se produce impacto de inicio. Esta profundidad de rebaje se denominará **profundidad ajustada**. Para calcular esta profundidad de rebaje ajustada bastará con imponer la condición $R_r(\xi_{inn}) = 0$, y por tanto:

$$\delta_r(\xi_{inn}) - (\delta_G(\xi_{inn}) + \delta_R(\xi_{inn})) = 0$$

De las expresiones de δ_G y δ_R se tiene que $\delta_G(\xi_{inn}) = 0$ y $\delta_R(\xi_{inn}) = \Delta_{R-inn}$, de manera que la profundidad de rebaje ajustada resulta ser:

$$(\Delta_{R-inn})_{ad} = \delta_r(\xi_{inn})$$

$$(\Delta_{R-out})_{ad} = \delta_r(\xi_{out})$$

En realidad, se podía haber llegado a esta misma conclusión mediante la simple observación de la Figura 1.4. En todo caso, para calcular el valor de Δ_{R-inn} (y lo mismo cabría decir de Δ_{R-out}) basta con sustituir ese valor en la expresión del error de transmisión:

$$(\Delta_{R-inn})_{ad} = \frac{F_T + \sum_j K_M(\xi_{inn} + j)(\delta_G(\xi_{inn} + j) + \delta_R(\xi_{inn} + j))}{\sum_j K_M(\xi_{inn} + j)}$$

y despejar Δ_{R-inn} , teniendo en cuenta que $\delta_R(\xi_{inn} + j)$ depende linealmente de él. En el caso de un engranaje con grado de recubrimiento entre 1 y 2, cuya longitud de rebaje sea tal que no afecte al punto de contacto único superior, es decir, que $\delta_R(\xi_{inn} + 1) = 0$, la ecuación anterior queda de la forma:

$$\begin{aligned}
 (\Delta_{R-inn})_{ad} &= \frac{F_T + K_M(\xi_{inn})(0 + (\Delta_{R-inn})_{ad}) + K_M(\xi_{inn} + 1)(0 + 0)}{K_M(\xi_{inn}) + K_M(\xi_{inn} + 1)} \\
 &= \frac{F_T + K_M(\xi_{inn})(\Delta_{R-inn})_{ad}}{K_M(\xi_{inn}) + K_M(\xi_{inn} + 1)}
 \end{aligned}$$

de donde:

$$(\Delta_{R-inn})_{ad} = \frac{F_T}{K_M(\xi_{inn} + 1)}$$

Si la profundidad de rebaje es menor que la ajustada (o, lo que es equivalente, la carga

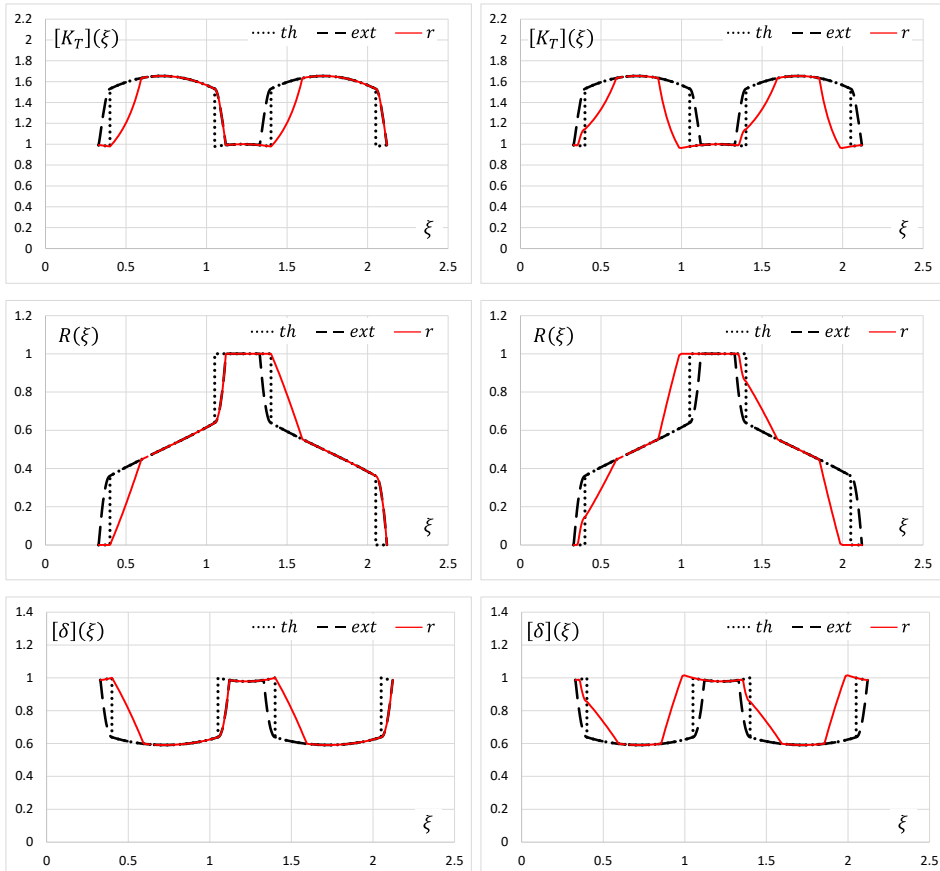


Figura 1.5. Modelo de contacto con rebaje: rigidez de engrane, reparto de carga y error de transmisión con rebaje lineal ajustado a la entrada (izquierda) y con rebaje menor a la entrada y mayor a la salida (derecha).

mayor que la nominal), el punto de inicio de contacto se acercará al punto de inicio de contacto teórico, pero sin alcanzar su posición, se producirá contacto fuera de la línea de presión, y por tanto impacto de inicio. Si la profundidad de rebaje es mayor que la ajustada (o la carga menor que la nominal), el contacto se iniciará después del punto de inicio de contacto teórico, dentro de la línea de presión y sin impacto de inicio; no obstante, se reducirá el intervalo de contacto efectivo, y por tanto el grado de recubrimiento.

La Figura 1.5 muestra las curvas de rigidez de engrane, reparto de carga y error de transmisión de dos parejas de engranajes iguales, a la primera de las cuales se le ha practicado un rebaje de profundidad ajustada al principio del engrane –en la cabeza de la rueda conducida– únicamente, mientras que a la segunda se le han rebajado ambas ruedas, con profundidad menor de la ajustada al inicio, y mayor a la finalización. Se aprecia el proceso de carga parabólico a la entrada, característico de la presencia del impacto de inicio, y la reducción del intervalo de contacto efectivo a la salida. Se aprecia también que en los intervalos de rebaje la rigidez de engrane disminuye, el error de transmisión consecuentemente aumenta, y la carga soportada por la pareja de dientes disminuye, lo que hace que aumente en la pareja en contacto simultáneo, resultados todos ellos esperables.

La aplicación del rebaje únicamente al inicio del engrane, es decir, en la cabeza de la rueda conducida, tiene sentido por el hecho de que el impacto de inicio es mucho más peligroso que el empuje de salida, y por ello es frecuente en la práctica. Se denominará **rebaje de entrada**, y se practicará en la cabeza de la rueda conducida. Cuando se practica en ambas ruedas se denominará **rebaje de entrada y salida**. Cuando ambos rebajes, de entrada y salida, sean iguales (es decir, cuando $\Delta_{R-inn} = \Delta_{R-out}$ y $\Delta\xi_{R-inn} = \Delta\xi_{R-out}$), se denominará **rebaje simétrico**.

Finalmente, parece razonable imponer a la longitud de rebaje la condición de que en todo momento haya al menos una pareja de dientes engranando evolvente contra evolvente, y por tanto con el punto de contacto dentro de la línea de presión. Esta condición se expresa de la siguiente manera:

$$\Delta\xi_{R-inn} + \Delta\xi_{R-out} \leq \varepsilon_\alpha - 1$$

Se llamará **rebaje largo** al que no cumpla esa condición.

La Figura 1.6 muestra las curvas de rigidez de engrane, reparto de carga y error de transmisión para una pareja de engranajes con rebaje largo de entrada y con rebaje largo simétrico. Se puede apreciar que en ambos casos el rebaje largo reduce la amplitud de variación tanto de la rigidez de engrane como del error de transmisión. Este resultado es importante porque la sobrecarga dinámica inducida está gobernada por la amplitud pico-pico del error de transmisión. En efecto, si el error de transmisión mide el desfase entre la posición de la rueda de salida y su posición ideal, la variación temporal del error de transmisión medirá la variación de la velocidad de dicha rueda, es decir, la aceleración a que está sometida en cada punto, que origina la sobrecarga dinámica. En definitiva, se puede afirmar que la sobrecarga dinámica en cada punto es proporcional a la pendiente de la curva de error de transmisión en ese punto, y por lo tanto, la sobrecarga dinámica media estará relacionada con la amplitud de variación del error de transmisión, aunque esta variación pueda no ser ya directamente proporcional. Se puede apreciar también en la Figura 1.6 que el rebaje largo de entrada produce

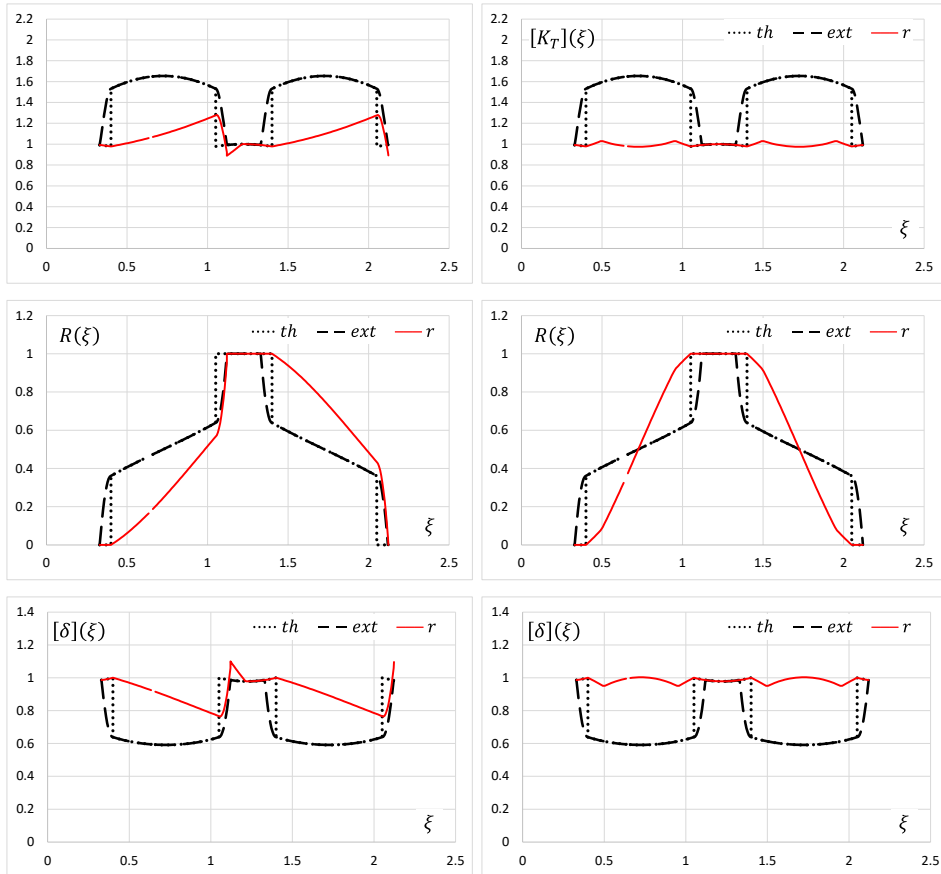


Figura 1.6. Modelo de contacto con rebaje: rigidez de engrane, reparto de carga y error de transmisión con rebaje lineal ajustado largo a la entrada (izquierda) y ajustado largo simétrico (derecha).

una repentina reducción de la rigidez de engrane en la parte del intervalo de contacto único afectada por el rebaje, y paralelamente un repentino aumento del error de transmisión, que ocasiona la aparición de un pico en dicha zona. El rebaje largo simétrico provoca reducciones ostensibles de la amplitud pico-pico del error de transmisión, lo que ofrece interesantes posibilidades de diseño.

1.5. ENGRANAJES DE ALTO GRADO DE RECUBRIMIENTO

El modelo para engranajes de alto grado de recubrimiento no presenta estrictamente ninguna diferencia con el de engranajes de recubrimiento estándar. Todas las ecuaciones

El caso de rebajes largos se muestra en la Figura 1.8. Como en el caso anterior, el rebaje largo reduce la amplitud de variación de la rigidez de engrane y del error de transmisión. En el caso de rebaje largo de entrada se produce una repentina reducción de la rigidez de engrane, y un pico en la curva de error de transmisión, en los puntos del intervalo de contacto doble afectados por el rebaje. Además, la reducción de la carga transmitida por la pareja de dientes al inicio del intervalo inferior de contacto doble debido al rebaje provoca por compensación un pico de carga en la pareja de dientes en contacto simultaneo, es decir, al inicio del intervalo de contacto doble. Este resultado puede tener importancia para el cálculo resistente de los dientes, pues no es inhabitual el caso de que la presión de contacto crítica, que se presenta en el intervalo inferior de contacto doble, sea más restrictiva que la tensión de rotura en la base crítica, que se presenta al inicio del intervalo superior de contacto doble. Se aprecia que con un rebaje de entrada largo se reduciría la presión de contacto crítica a costa de aumentar la tensión de rotura en la base crítica, lo que aumentaría la capacidad de carga de la transmisión.

El rebaje largo simétrico provoca, como antes, reducciones de la amplitud pico-pico del error de transmisión, en este caso hasta niveles extraordinariamente bajos. En contrapartida, la carga aumenta en la parte central del intervalo de contacto, lo que puede afectar a las tensiones críticas a rotura en la base y a presión superficial, y por tanto a la resistencia de los dientes.

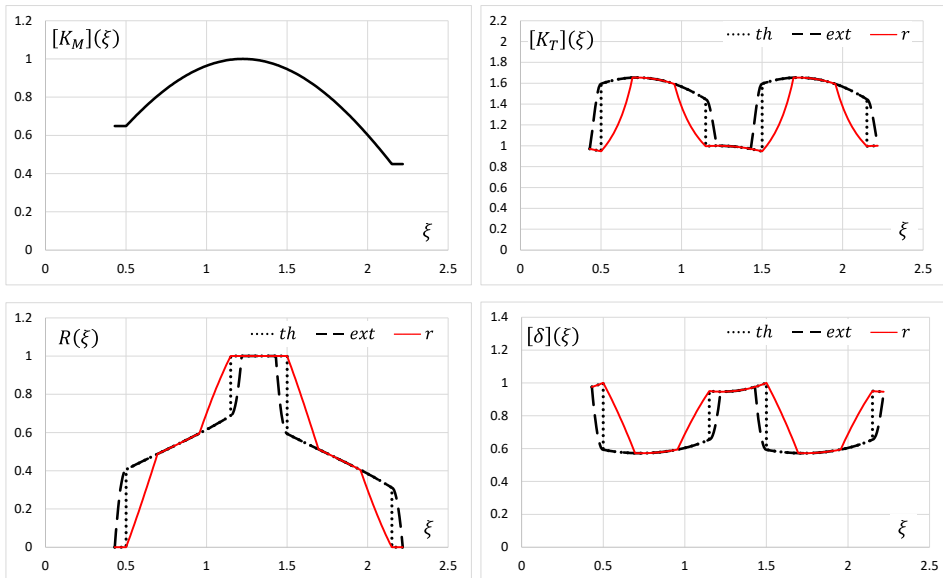


Figura 1.9. Engranaje de grado de recubrimiento estándar y altura de cabeza menor que 1 en la rueda conducida y mayor que 1 en la rueda conductora, con rebaje de entrada y salida ajustados.

1.6. ENGRANAJES CON DIMENSIONES NO ESTÁNDAR

Tampoco se ha hecho en los desarrollos anteriores ninguna hipótesis acerca de las dimensiones de los dientes. El modelo y todas las ecuaciones presentadas son válidos, por tanto, para cualquier valor de los parámetros geométricos de la pareja de engranajes, normalizados o no. Sin embargo, todas las figuras presentadas se refieren a engranajes con altura de cabeza igual al módulo, es decir, $h_a = 1$. Un valor distinto de la altura de cabeza no alterará el aspecto de ninguna de esas curvas; tan sólo hará variar el grado de recubrimiento y, por tanto, la longitud del intervalo de engrane.

Pero el modelo es igualmente válido para alturas de cabeza diferentes en una y otra rueda. Es un caso relativamente poco frecuente, pero se puede dar en casos de interferencia en la base –en que se ha de reducir el radio de cabeza de la rueda contraria–, o en casos de penetración con engrane en vacío –en que el radio de cabeza efectivo de la rueda de la rueda contraria se reduce con la penetración–. En este caso, la simetría que presentan respecto del punto medio del intervalo de contacto las curvas teóricas y extendidas –incluso las curvas con rebaje si se trata de rebaje simétrico– se pierde.

En las Figuras 1.9 a 1.11 se presentan las curvas de rigidez de la pareja de dientes, rigidez de engrane, reparto de carga y error de transmisión, para distintos casos con altura de cabeza diferente en ambas ruedas:

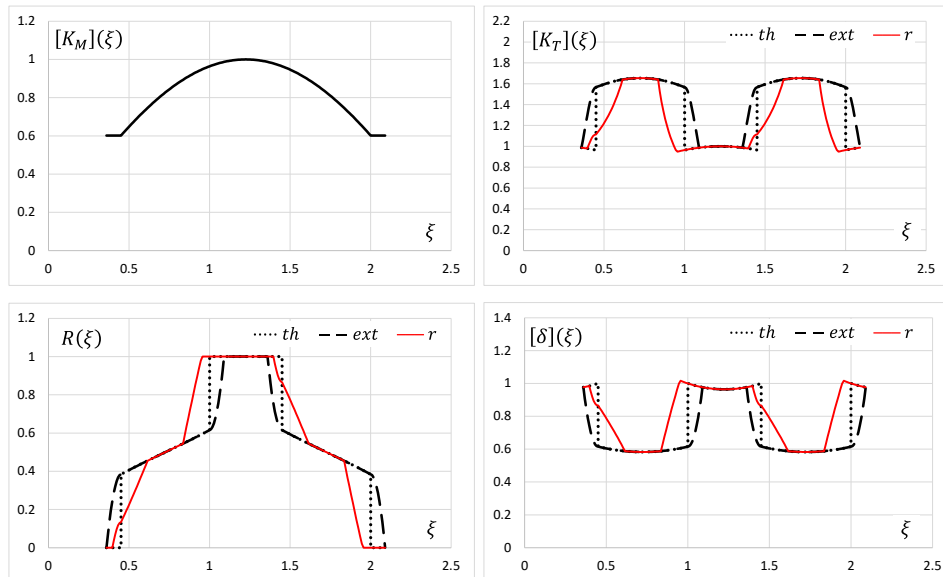


Figura 1.10. Engranaje de grado de recubrimiento estándar y altura de cabeza menor que 1 en ambas ruedas, con rebaje de entrada de profundidad menor que la ajustada, y mayor en el rebaje de salida.