# Índice general

**Prólogo** ..... 11

**1 Introducción. Aproximación Clásica** ..... 15

1.1 Introducción ..... 15
1.2 Planteamiento del Problema ..... 15
1.3 El Método Directo de Rigidez ..... 19
1.4 Formulación Matricial ..... 20
1.5 Conclusiones ..... 25
1.6 Ejemplos de Aplicación ..... 25

**2 Fundamentos: Formulaciones Diferencial e Integral. Aproximación. Elemento** ..... 43

2.1 Introducción ..... 43
2.2 La Ecuación de Campo ..... 44
2.3 Formulación Directa ..... 46
2.4 El Principio de los Trabajos Virtuales ..... 48
2.5 Formulación Energética ..... 49
2.6 Equivalencia de las Formulaciones ..... 49
2.7 Aproximación ..... 51
2.8 El Método de Galerkin ..... 58
2.9 Funciones de Soporte Pequeño ..... 60
2.10 Idea de Elemento. Funciones de Forma ..... 67
2.11 Matriz de Rigidez y Vector de Cargas Globales. Cálculo de Desplazamientos ..... 75
2.12 Viga de Timoshenko ..... 84

**3 Sistematización. Método Directo de Rigidez** ..... 95

3.1 Introducción ..... 95
3.2 Sistemas de Coordenadas ..... 95

3.3 Transformación de Coordenadas. Rotación de Ejes . . . . . 100
3.4 Ensamblaje de Ecuaciones . . . . . 102
3.5 Imposición de las Condiciones de Contorno . . . . . 106
3.6 Cálculo de Desplazamientos . . . . . 113
3.7 Cálculo de Esfuerzos y Reacciones . . . . . 131
3.8 Ejemplos de Aplicación . . . . . 132

**4 Planteamiento General del MEF** . . . . . 173

4.1 Introducción . . . . . 173
4.2 Planteamiento Diferencial de un Problema de Valores en el Contorno . . 173
4.3 Planteamiento Integral de un Problema de Valores en el Contorno . . . . . 177
4.4 Idea de Aproximación . . . . . 180
4.5 El Método de los Elementos Finitos . . . . . 184
4.6 Síntesis de las Características Globales . . . . . 193
4.7 Aplicación del MEF a Problemas de Elasticidad . . . . . 194
4.8 Problemas de Campos en Régimen Permanente . . . . . 228
4.9 Convergencia . . . . . 233

**5 Funciones de Forma de Continuidad $C_0$. Elementos Isoparamétricos** . . . . . 247

5.1 Introducción . . . . . 247
5.2 Coordenadas Naturales . . . . . 248
5.3 Familias de funciones de forma de continuidad $C_0$ . . . . . 255
5.4 Transformaciones en el MEF . . . . . 275
5.5 Elementos Isoparamétricos. Integración Numérica . . . . . 283

**6 Placas Delgadas según la Teoría de Kirchhoff** . . . . . 309

6.1 Introducción. Hipótesis de partida . . . . . 309
6.2 Planteamiento Diferencial. Ecuación de Campo. Definición de Esfuerzos . . . . . 310
6.3 Planteamiento Integral. Principio de los Trabajos Virtuales . . . . . 314
6.4 Discretización en Elementos Finitos . . . . . 315
6.5 Exigencia de Continuidad $\mathcal{C}^1$ . . . . . 318
6.6 Elementos Placa no Conformes . . . . . 319
6.7 Elementos Placa Conformes . . . . . 325
6.8 CONCLUSIONES . . . . . 329

**7 Placas Gruesas. Teoría de Reissner-Mindlin** ..... 331

7.1 Introducción ..... 331
7.2 Planteamiento Diferencial. Definición de Esfuerzos ..... 331
7.3 Planteamiento Integral ..... 336
7.4 Discretización por Elementos Finitos ..... 336
7.5 Bloqueo de la Solución ..... 338
7.6 Elementos Triangulares ..... 348

**8 Placas Gruesas en Estructuras Tridimensionales** ..... 351

8.1 Introducción ..... 351
8.2 Deformaciones locales ..... 352
8.3 Tensiones locales ..... 354
8.4 Esfuerzos locales ..... 355
8.5 Planteamiento integral. Principio de los Trabajos Virtuales ..... 356
8.6 Discretización en Elementos Finitos ..... 357
8.7 Síntesis de las características globales ..... 360
8.8 Bloqueo de la solución ..... 363
8.9 Otros casos ..... 363

**Bibliografía** ..... 365

**A Matrices de Rigidez para Elementos** ..... 369

A.1 Matrices de Rigidez Elementales ..... 369

**B Cargas sobre Elementos** ..... 375

B.1 Cargas Nodales Equivalentes ..... 375

**C Nodos Rígidos de Tamaño Finito** ..... 385

**D Integración Numérica** ..... 387

D.1 Cuadratura Interpolatoria ..... 387
D.2 Cuadraturas Gaussianas ..... 390
D.3 Integrales Múltiples ..... 394

**E Referencia Histórica** ..... 399

# CAPÍTULO 2

# Fundamentos: Formulaciones Diferencial e Integral. Aproximación. Elemento

## 2.1 - INTRODUCCIÓN

Entre las conclusiones del capítulo anterior se hace referencia a la necesidad de un punto de vista más potente que el allí presentado, capaz de salvar las limitaciones que, referidas básicamente al tipo de estructura, aparecen en el desarrollo realizado.

Efectivamente, las estructuras de tipo laminar, tan utilizadas en la ingeniería aeronáutica, han sido probablemente las primeras en plantear la mencionada necesidad. Para su análisis hubo de recurrirse a métodos energéticos que, al operar con magnitudes referidas al conjunto de la estructura y no con equilibrios vectoriales referidos a puntos concretos, se adaptaban fácilmente a elementos continuos. Paradójicamente, tales planteamientos gozaban de gran tradición en el análisis de estructuras, lo que enlaza los más modernos métodos de análisis (elementos finitos, banda finita, elementos de contorno) con una de las más clásicas ramas de la mecánica.

Quizás conviene abrir aquí un paréntesis formal para aclarar la terminología empleada, aspecto éste que puede dar lugar a cierta confusión. Como en cualquier otro campo de la ciencia en rápido desarrollo, en el análisis estructural se hace uso de gran número de vocablos aún no del todo asentados ni universalmente reconocidos.

Así, el *análisis matricial* de estructuras no es más que un procedimiento (entendido como un simple conjunto de reglas) para organizar la rutina del análisis en una forma concreta.

A un nivel más global puede situarse el *método directo de la rigidez*, cuya característica fundamental es la búsqueda de un sistema de ecuaciones de equilibrio cuyas incógnitas son los desplazamientos.

En un último nivel se podría distinguir entre dos puntos de vista globales. El primero responde a lo explicado en el capítulo anterior y consiste básicamente en describir la estructura como un ensamblaje de elementos que se relacionan a través de puntos determinados. El segundo planteamiento al que se podría llamar energético, contempla la estructura de una forma global, que, como se verá más adelante, no tiene porqué ser troceada en elementos.

Conviene insistir en que ambos puntos de vista pueden converger en un *método directo de la rigidez* dando lugar al mismo sistema de equilibrio. A su vez, este puede ser organizado de forma matricial y programado en un ordenador. De hecho, un programa de análisis de estructuras de barras no trasluce el planteamiento global al que responde.

En este capítulo se pretende realizar el planteamiento global señalado, mostrando así la potencia y generalidad de los *métodos proyectivos*. Para ello se plantea la formulación integral como alternativa a la diferencial y, teniendo en cuenta que en general, es imposible obtener una solución cerrada del problema a analizar (aunque métodos particulares permitan resolver muchos problemas prácticos habituales), el concepto de aproximación parece inevitable. Precisamente gran parte de la potencia y generalidad de estos métodos proyectivos reside en la amplia libertad de que goza el analista en lo que a la elección de funciones de base respecta.

En un primer paso se van a definir estas funciones de forma que se ajusten a la geometría del problema, la distribución de cargas, etc., lo que supone un inconveniente si se piensa en la automatización del método.

Justamente en este punto es donde aparece la genialidad del *Método de los Elementos Finitos* (MEF). En efecto, el método proporciona un sistema de generación de funciones de base de gran eficacia que permite que, a partir de la definición de un reducido número de funciones y mediante un proceso simple de combinación, se puedan obtener las funciones adecuadas a cada caso.

La exposición del capítulo, basada en ejemplos especialmente simples, no justifica la validez de las ideas citadas cuando se aplican a una estructura completa. Ello se debe a que la finalidad de este capítulo es simplemente la de presentar estos conceptos, dejando para los siguientes su desarrollo y aplicación práctica.

En el resto del texto se desarrollan todas estas ideas con cierto detalle. El proceso de exposición seguido abarca desde las ideas más globales (que se comentan en este capítulo) hasta los procedimientos más específicos de ordenador, tratados en capítulos posteriores.

## 2.2 - LA ECUACIÓN DE CAMPO

La ecuación de campo constituye una de las más utilizadas descripciones matemáticas de los problemas de la mecánica. Al nivel en que se utiliza en este texto, se presentará simplemente como una ecuación (o ecuaciones) diferencial(es) que relaciona la variable incógnita del problema con funciones conocidas que recogen el efecto de cada parámetro. Se dejará para los matemáticos la discusión de otros aspectos de interés como la calidad o la suficiencia de tal descripción.

En el análisis estructural la ecuación de campo se obtiene siempre a través del uso de las más clásicas relaciones de la mecánica: equilibrio, comportamiento y compatibilidad.

A modo de recordatorio, se desarrollan las ecuaciones de campo típicas del análisis de estructuras de barras: las que se refieren al comportamiento ante cargas en su eje (axil) o normales a él (flexión).

**Axil**:

$$\begin{cases} \text{Equilibrio:} & \dfrac{dN(x)}{dx} = -Q(x) \\ \text{Comportamiento:} & N(x) = AE\,\epsilon(x) \\ \text{Compatibilidad:} & \epsilon(x) = \dfrac{du(x)}{dx} \end{cases} \tag{2.1}$$

donde:

$u(x)$: representa la variable campo, en este caso el desplazamiento de la sección en dirección axial (todos los puntos de la sección se mueven idénticamente).

$\epsilon(x)$: es una variable intermedia que representa la deformación de las fibras de la barra en cada punto del eje.

$N(x)$: es otra variable intermedia, el esfuerzo axil, ligada a la deformación a través del producto de coeficientes, $AE$, que representan la rigidez de la misma y que, en principio, pueden igualmente ser función de $x$.

$Q(x)$: es una función dato que proporciona el valor de la carga exterior aplicada en cada punto de la barra.

Al sustituir la tercera ecuación en la segunda ecuación de (2.1) y el resultado en la primera, se obtiene una ecuación diferencial que representa el equilibrio y que viene expresada en función de los desplazamientos. Es la ecuación de campo de la barra axil:

$$\frac{d}{dx}\left(AE\frac{du}{dx}\right) = -Q(x)$$

**Flexión**:

$$\begin{cases} \text{Equilibrio:} & \begin{cases} \dfrac{dV(x)}{dx} = -Q(x) \\ \dfrac{dM(x)}{dx} = -V(x) \end{cases} \\ \text{Comportamiento:} & M(x) = EI\dfrac{d\theta(x)}{dx} \\ \text{Compatibilidad:} & \theta(x) = \dfrac{dv(x)}{dx} \end{cases} \tag{2.2}$$

Donde:

$v(x)$: representa la variable campo, en este caso el desplazamiento en dirección normal al eje.

$\theta(x)$: es una variable intermedia, la curvatura, que mide la deformación de cada fibra de una sección.

$M(x), V(x)$: son también variables intermedias que representan los esfuerzos en la sección (momento flector y esfuerzo cortante). El producto $EI$, que también representa la rigidez, puede ser variable.
$Q(x)$: es una función dato que proporciona el valor de la carga exterior aplicada en cada punto de la barra.

De nuevo, al sustituir cada relación en la anterior se llega a la ecuación de campo:

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(EI\frac{d^2v}{dx^2}\right) = Q(x) \tag{2.3}$$

## 2.3 - FORMULACIÓN DIRECTA

Más que exponer o demostrar, en este apartado se planteará únicamente una somera reflexión sobre el procedimiento clásico de análisis estructural mostrando algunas de sus limitaciones.

La exposición se organiza en torno a uno de los más sencillos ejemplos posibles: la viga simplemente apoyada sometida a una distribución de carga (véase la figura2.1) y de la que se desea conocer la flecha en cada punto.

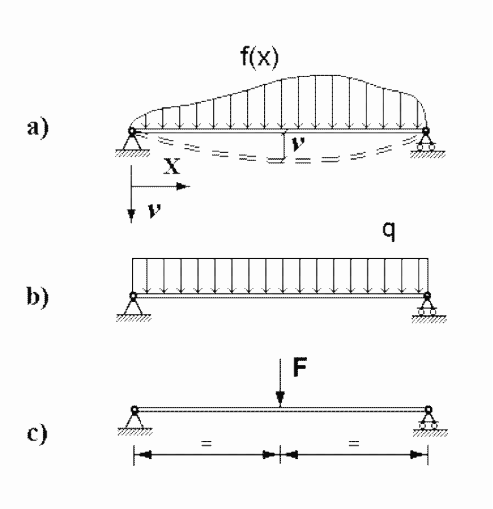



Figura 2.1

Como se ha podido comprobar en el apartado anterior, dicha flecha viene dada por la ecuación diferencial (2.3) cuya integración para una función $Q(x)$ dada permite, imponiendo las condiciones de contorno adecuadas, una formulación explícita

de la flecha. Así, para el caso de carga uniforme, esto es $Q(x) = q$ (figura 2.1b), se tiene:

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(EI\frac{d^2v}{dx^2}\right) = q \tag{2.4}$$

junto con las *condiciones de contorno*:

$$v(0) = 0;\ v(L) = 0;\ M(0) = 0;\ M(L) = 0 \tag{2.5}$$

siendo $L$ la longitud de la viga.

Al integrar la ecuación anterior (2.4), aplicando las condiciones de contorno (2.5), se obtiene la conocida expresión:

$$v(x) = \frac{qx}{24EI}\left(x^3 - 2Lx^2 + L^3\right)$$

Conviene observar que entre las condiciones de contorno utilizadas se puede establecer una distinción. Las dos primeras afectan al valor de la variable campo, el desplazamiento en este caso. Las dos últimas afectan a una función de las derivadas de la variable, los momentos. Las primeras suelen ser llamadas *esenciales* o *condiciones en los desplazamientos*, mientras que las últimas se denominan *naturales* o *condiciones en fuerzas*.

Generalizando, se puede establecer el siguiente planteamiento del problema:

> *Dada una función real $Q(x)$, definida en el dominio cerrado $[0, L]$, se llama solución a la función $v = v(x)$ que verifica la ecuación de campo en el dominio abierto $(0, L)$ y las condiciones en el contorno.*

Si se desea repetir el proceso anterior para un caso aparentemente sencillo como el presentado en la figura 2.1c aparecen importantes dificultades. La primera radica en la propia descripción de la carga, que ya no puede ser realizada en la clásica forma de función $Q(x)$.

Las matemáticas han desarrollado una clase especial de relación, a la que llaman *distribución* que puede ser utilizada en ocasiones como la que nos ocupa. En concreto, a una relación tal que resulta nula en todo el dominio salvo en un punto se le llama *delta de Dirac* (y ni siquiera se entrará en cómo se define el valor de la distribución en ese punto).

Se puede por tanto concluir la dificultad que encierra, no ya la integración de la ecuación diferencial (recuérdese que ahora es una relación entre distribuciones y no entre funciones), sino su propio planteamiento, para el cual es necesario recurrir a sofisticadas herramientas matemáticas.

Tradicionalmente la resistencia de materiales ha evitado estos problemas recurriendo a trucos específicos de cada caso. En este caso, se recurre a la división del dominio en dos trozos (desde un extremo hasta el punto de aplicación de la carga y desde éste al otro extremo), integrando en cada trozo e imponiendo las condiciones de contorno (extremos) y la continuidad (punto de aplicación de la carga). Por

desgracia, la falta de generalidad de tales trucos impide un planteamiento global del problema, y ello se traduce en ocasiones en una peligrosa dispersion de ideas.

Parece claro entonces que el único método general de que se dispone, la integración directa de la ecuación diferencial, presenta dificultades importantes para su aplicación.

## 2.4 - EL PRINCIPIO DE LOS TRABAJOS VIRTUALES

La base del planteamiento seguido en este texto es el principio de los trabajos virtuales. La formulación más general del principio establece la igualdad entre la energía elástica y el trabajo de las fuerzas exteriores cuando al sistema se le aplica una deformada adecuada. Naturalmente, esta descripción tan general adopta formas diversas al ser aplicada a los distintos modelos estructurales. Así, la expresión analítica de la energía elástica de una viga en flexión es distinta a la de la misma viga trabajando en axil o a torsión. Ello no resta atractivo al método porque es únicamente la forma y no el fondo lo que cambia en cada caso.

Mayor interés encierra el término *deformación adecuada* utilizado anteriormente, y es precisamente este punto donde radica la potencia del planteamiento: casi cualquier deformada que encierre un mínimo sentido común es adecuada. Con el único ánimo de concretar los anteriores planteamientos, se expondrá en lo que sigue una formulación del principio para el caso concreto de la viga en flexión.

Para ello supóngase de nuevo una situación semejante a la de la figura 2.1: una viga de longitud $L$ que al ser sometida a una distribución de cargas $Q(x)$ se deforma en modo tal que los puntos de su eje se desplazan según la función $v(x)$. Supóngase igualmente una función $\omega(x)$ continua e integrable hasta su segunda derivada y que verifica las condiciones de contorno esenciales del problema en su forma homogénea (el significado de este último aserto se explicará más adelante). En estas condiciones se cumple:

$$\int_0^L \frac{d^2\omega}{dx^2} EI \frac{d^2 v}{dx^2}\, dx = \int_0^L \omega Q\, dx + \left[\frac{d\omega}{dx} M - \omega V\right]_0^L = \int_0^L \omega Q\, dx \tag{2.6}$$

para ciertas funciones $M$ y $V$ (relacionadas con $v$, como se ve en (2.7)). El hecho de que $w$ verifique las condiciones de contorno de forma homogénea hace que dicho término se anule.

En esta expresión el lector podrá reconocer términos familiares. Así, el primer miembro representa la energía elástica (término convencional que designa el trabajo de los esfuerzos *reales* con la curvatura *virtual*) mientras que el segundo miembro representa el trabajo de las cargas exteriores y de contorno. Es precisamente en estos últimos términos donde se recogen las condiciones de contorno naturales.

## 2.5 - FORMULACIÓN ENERGÉTICA

Constituye una descripción de los problemas de la mecánica alternativa a la formulación diferencial mostrada en apartados anteriores. Se basa en el principio de los trabajos virtuales, y consiste fundamentalmente en definir la solución de un problema como la función que verifica el principio de los trabajos virtuales para cualquier *función de desplazamientos elegida*.

Es importante comprender el cambio del punto de vista. En el anterior apartado se mostraba una relación que era satisfecha por la función solución. Ahora se invierte la dirección: una función será solución si satisface tal relación para cualquier $\omega$ que cumpla las condiciones exigidas a la función virtual. Así planteada, esta formulación no hace sino añadir nuevos problemas. En primer lugar, no resuelve el problema de las cargas puntuales; efectivamente, en el segundo miembro aparece una integral ponderada de la función de cargas cuyo significado es necesario aclarar. En segundo lugar, no parece un planteamiento muy útil: si resolver una ecuación diferencial resulta difícil, resolver un planteamiento como el expuesto parece lejos de la capacidad analítica de un técnico. Por último, demostrar las condiciones de existencia y unicidad de la solución resulta un problema complejo.

Afortunadamente, todos estos inconvenientes tienen una solución sencilla. El primero se resuelve asignando a la integral el producto de la fuerza por la ordenada de la función virtual en el punto de aplicación de aquella (al fin y al cabo, esta es la más clásica de las definiciones de trabajo: fuerza multiplicada por desplazamiento). El segundo inconveniente no se llega a plantear, dado que no se buscará una solución directa. El último de los problemas queda reservado para los matemáticos.

De nuevo resulta conveniente hacer alguna aclaración respecto a la terminología al uso. A la formulación energética se le suele llamar *integral* (las razones son obvias) y a la directa, *diferencial*. También en ocasiones se llama solución débil a la proporcionada por el planteamiento energético y fuerte a la que da el diferencial (por lo que también se les llama *formulaciones débil o fuerte*). La razón es sencilla: el planteamiento diferencial exige la existencia de la cuarta derivada (en el caso concreto de flexión de vigas) mientras que el débil solamente exige la existencia de la segunda. Por último, a la formulación energética se la llama en ocasiones *variacional*, porque puede ser obtenida a través del cálculo de variaciones. En cualquier caso, toda esta terminología carece de importancia y únicamente se cita con la intención de evitar posibles confusiones.

## 2.6 - EQUIVALENCIA DE LAS FORMULACIONES

Si se plantea la formulación integral como alternativa a la diferencial, parece necesario dar un paso previo consistente en la demostración de la equivalencia entre ambas, esto es, que la solución de una lo es de la otra.

Se comenzará demostrando que la solución de la ecuación diferencial lo es de la integral. Para ello, partamos de la ecuación de campo (2.3), multipliquemos por una función $\omega$ e integremos:

$$\int_0^L \omega \frac{d^2}{dx^2}\left(EI\frac{d^2v}{dx^2}\right)\,dx = \int_0^L \omega Q\,dx$$

Es evidente que cualquier solución de la primera lo es de la segunda.

Una doble integración por partes del primer miembro proporciona:

$$\int_0^L \frac{d^2\omega}{dx^2}EI\frac{d^2v}{dx^2}\,dx = \int_0^L \omega Q\,dx + \left[\frac{d\omega}{dx}EI\frac{d^2v}{dx^2} - \omega\frac{d}{dx}\left(EI\frac{d^2v}{dx^2}\right)\right]_0^L$$

Denotando por

$$EI\frac{d^2v}{dx^2} = M, \quad \frac{d}{dx}\left(EI\frac{d^2v}{dx^2}\right) = V \tag{2.7}$$

se obtiene la fórmula ya conocida (2.6).

Para el camino inverso, esto es, demostrar que la solución de la expresión integral lo es de la diferencial, se comenzará deshaciendo la integral doble por partes. Se llega así a:

$$\int_0^L \omega \frac{d^2}{dx^2}\left(EI\frac{d^2v}{dx^2}\right)\,dx = \int_0^L \omega Q\,dx$$

o, lo que es igual:

$$\int_0^L \omega\left[\frac{d^2}{dx^2}\left(EI\frac{d^2v}{dx^2}\right) - Q\right]\,dx = 0 \tag{2.8}$$

Como la condición para que $v$ sea solución es que verifique esta fórmula para cualquier $\omega$, se escoge un valor concreto:

$$\omega = \phi\left[\frac{d^2}{dx^2}\left(EI\frac{d^2v}{dx^2}\right) - Q\right]$$

Al sustituir dicho valor en la ecuación (2.8), se obtiene:

$$\int_0^L \left[\frac{d^2}{dx^2}\left(EI\frac{d^2v}{dx^2}\right) - Q\right]^2\,dx = 0$$

de manera que la única posibilidad de que esta ecuación se cumpla, si $v$ es una función suficientemente regular, es que en todos los puntos del dominio:

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(EI\frac{d^2v}{dx^2}\right) = Q \tag{2.9}$$

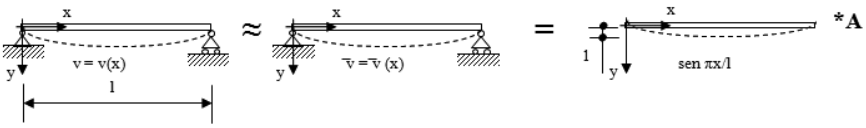



Figura 2.2

## 2.7 - APROXIMACIÓN

Básicamente, la idea de aproximación consiste en admitir la imposibilidad práctica de encontrar la función real de desplazamientos y buscar a cambio otra función que, bajo ciertos puntos de vista, se parezca a la real.

Naturalmente, es necesario aclarar el significado de este párrafo. Así, al hablar de buscar otra función se debe precisar el conjunto de funciones en donde se realiza la búsqueda. Se debe también especificar el criterio que dirige la investigación, esto es, que permite señalar qué función de entre las del conjunto investigado se parece más a la real. Por último, aceptando la necesidad de limitarse a una aproximación, se debería ser capaz de acotar el error cometido.

A modo de ejemplo se aplicarán estas ideas a la viga simple de la figura 2.1. Procediendo ordenadamente se debe fijar en primer lugar el conjunto de funciones entre las que se busca la aproximación. Parece lógico exigir que todas ellas cumplan unas condiciones mínimas: continuidad y condiciones en el contorno. Por otra parte, el sentido común dicta una nueva exigencia: la simplicidad.

A simple vista parece que existen dos familias de funciones idóneas: las trigonométricas y las polinómicas de menor grado. Si se eligen las trigonométricas, y denotando por $\overline{v}$ a la aproximación buscada, un primer candidato podría ser de la forma:

$$\overline{v(x)} = A \operatorname{sen} \frac{\pi x}{L} \tag{2.10}$$

que únicamente significa que, como se indica en la figura 2.2, la función $v = v(x)$, se aproxima mediante otra función $\overline{v} = \overline{v}(x)$ que se obtiene multiplicando una función conocida (senoidal) por una constante $A$ (nótese que verifica las condiciones de contorno (2.5)). El criterio de búsqueda en un conjunto tan simple se limita a determinar el valor de la constante $A$. Para ello se puede utilizar la expresión del principio de los trabajos virtuales, establecido esta vez sobre la función aproximadora.

Se tiene entonces:

$$\int_0^L \frac{d^2\omega}{dx^2} EI \frac{d^2\overline{v}}{dx^2}\, dx = \int_0^L \omega Q\, dx + \left[\frac{d\omega}{dx} M - \omega V\right]_0^L$$

y sustituyendo (2.10), se tiene:

$$-A\left(\frac{\pi}{L}\right)^2\int_0^L \frac{d^2\omega}{dx^2}EI\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi x}{L}\,dx = \int_0^L \omega Q\,dx + \left[\frac{d\omega}{dx}M - \omega V\right]_0^L \tag{2.11}$$

donde se puede eliminar directamente el término $\left[\frac{d\omega}{dx}M\right]_0^L$ al recordar que, por tratarse de una viga biapoyada, el momento es nulo en los extremos (véase (2.5)).

Como se recordará, la función $\omega$ podía ser cualquiera que cumpliera unas condiciones mínimas. Lo más cómodo es, quizás, escoger la propia función seno utilizada como aproximadora. Si

$$\omega(x) = \mathrm{sen}\,\frac{\pi x}{L}$$

sustituyendo en la ecuación (2.11), se tiene:

$$A\left(\frac{\pi}{L}\right)^4\int_0^L EI\left(\mathrm{sen}\,\frac{\pi x}{L}\right)^2 dx = \int_0^L \mathrm{sen}\,\frac{\pi x}{L}Q(x)\,dx$$

donde el término $[-\omega V]_0^L$ se ha eliminado por ser $\omega$ nula en ambos extremos.

Si la rigidez $EI$ es constante a lo largo de la viga, la integral es inmediata y se obtiene:

$$A\left(\frac{\pi}{L}\right)^4 EI\frac{L}{2} = \int_0^L \mathrm{sen}\,\frac{\pi x}{L}Q(x)\,dx$$

lo que permite determinar el parámetro $A$ de forma inmediata:

$$A = \frac{2}{\pi^4}\frac{L^3}{EI}\int_0^L \mathrm{sen}\,\frac{\pi x}{L}Q(x)\,dx$$

resultando que

$$\overline{v(x)} = \frac{2}{\pi^4}\frac{L^3}{EI}\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi x}{L}\int_0^L \mathrm{sen}\,\frac{\pi x}{L}Q(x)\,dx$$

A modo de comprobación, se puede comparar la flecha en el centro de vano para el caso de una viga sometida a una carga uniforme de valor $Q(x) = q$, obtenida con esta aproximación:

$$\overline{v\left(\tfrac{L}{2}\right)} = \frac{4}{\pi^5}\frac{qL^4}{EI}$$

con la que proporciona la resistencia de materiales,

$$v\left(\tfrac{L}{2}\right) = \frac{5}{384}\frac{qL^4}{EI}$$

Esto es, el error no llega al 1 %.

Lo anterior puede ser generalizado en forma simple. Así, la idea de aproximación se puede expresar en la forma:

$$v(x) \approx \overline{v(x)} = \sum_{i=1}^{n} a_i \Phi_i(x) \tag{2.12}$$

donde a las funciones $\Phi_i(x)$ se las suele llamar *funciones de base* y a los coeficientes $a_i$ *coordenadas generalizadas*.

Como el lector comprobará se utiliza la terminología típica del álgebra elemental. En efecto, es clara la similitud con la definición de espacio vectorial. La función aproximadora será según esta asimilación, el vector cuyas componentes en la base $\{\Phi_i\}_{1 \leq i \leq n}$, son los valores $a_i$, $1 \leq i \leq n$.

**Ejemplo 2.1**
Analizar la misma viga de la figura 2.1c pero utilizando en este caso como función aproximadora una función polinómica y suponiendo como carga una fuerza $F$ aplicada en el punto medio.

**Solución:**

En este primer ejemplo buscaremos la solución según (2.12) siendo

$$\Phi_i(x) = x^i$$

es decir, consideraremos una aproximación de la forma

$$\overline{v(x)} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots$$

El primer paso consistirá en la selección del conjunto de búsqueda. Para ello, y limitándose a las funciones polinómicas, se comienza por seleccionar aquéllas que verifican las condiciones de contorno. Así, se ha de tener:

$$\begin{cases} \text{En } x = 0,\ \overline{v(0)} = 0 \Rightarrow a_0 = 0 \\ \text{En } x = L,\ \overline{v(L)} = 0 \Rightarrow a_1 = -(a_2 L + a_3 L^2 + a_4 L^3 + \cdots) \end{cases} \tag{2E1.1}$$

Por otra parte, han de ser funciones continuas hasta la segunda derivada (con el único fin de que el término integral tenga algún sentido). Ello implica la necesidad de un polinomio de segundo grado o superior (en caso contrario sus segundas derivadas son idénticamente nulas).

Por último la exigencia de simplicidad limita el número de términos a la menor cantidad requerida. Se tiene por tanto:

$$\overline{v(x)} = a_2 \left(-xL + x^2\right) \tag{2E1.2}$$

y ya sólo resta calcular el valor de la constante $a_2$. Para ello se utiliza de nuevo el principio de los trabajos virtuales, empleando como deformada virtual la función:

$$\omega(x) = \left(-xL + x^2\right) \tag{2E1.3}$$

de manera que, al sustituir en (2.6),

$$\int_0^L \frac{d^2\omega}{dx^2} EI \frac{d^2\overline{v}}{dx^2}\, dx = \int_0^L \left(-xL + x^2\right) F\, dx \tag{2E1.4}$$

En este caso hemos de ser cuidadosos con la aparición de la carga puntual $F$; al tratarse de una distribución (y no una función) el cálculo de la integral es diferente. Para no entrar en tecnicismos, nos valdrá saber que si la carga puntual está concentrada en un punto $x_0$,

$$\int g(x) F\, dx = g(x_0) F$$

Así pues, usando (2E1.2) y (2E1.3) en (2E1.4),

$$4EILa_2 = -\frac{L^2}{4} F \Rightarrow a_2 = -\frac{LF}{16EI}$$

y por tanto:

$$\overline{v(x)} = \frac{LF}{16EI} x(L - x)$$

función que proporciona una flecha en el centro de vano de valor:

$$\overline{v\left(\tfrac{L}{2}\right)} = \frac{FL^3}{64EI}$$

La aproximación obtenida es, evidentemente, pobre. Ello era previsible por cuanto que se intenta aproximar una función (la real) con tercera derivada no nula (recuérdese que la tercera derivada de la función desplazamiento es proporcional al valor del cortante en cada punto) con una función cuya tercera derivada es nula.

Afortunadamente, la solución es bien sencilla: basta con ampliar el conjunto de las funciones investigadas hasta los polinomios de orden superior. Así, empezando por los de tercer grado:

$$\overline{v(x)} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$$

que, al imponer la compatibilidad con las condiciones de contorno, resultan:

$$\overline{v(x)} = -(a_2 L + a_3 L^2)x + a_2 x^2 + a_3 x^3$$

Se trata ahora de calcular los coeficientes $a_2$ y $a_3$, para lo cual son necesarias dos ecuaciones que se obtienen por la aplicación sucesiva del Principio de Trabajos Virtuales.

Como deformadas virtuales se escogen dos funciones cualesquiera del conjunto de búsqueda, por ejemplo:

$$\omega_1(x) = -xL + x^2; \quad \omega_2(x) = -xL^2 + x^3$$

Se obtiene entonces:

$$\int_0^L 2EI(2a_2 + 6a_3x)\,dx = \left(-\tfrac{L^2}{4}\right)F$$
$$\int_0^L 6xEI(2a_2 + 6a_3x)\,dx = \left(-\tfrac{3L^3}{8}\right)F$$

es decir, un sistema de ecuaciones lineales cuya resolución conduce a:

$$a_2 = -\frac{FL}{16EI}; \quad a_3 = 0$$

y por tanto:

$$\overline{v(x)} = \frac{FL}{16EI}x(L-x)$$

que es el mismo resultado obtenido antes. Esto es, el polinomio de tercer grado no proporciona en este caso, un resultado superior al de segundo grado. Ello se debe a que el término de tercer grado resulta ser, empleando términos de análisis matemático, *normal* a la distribución de carga del problema. Ello no debe inquietar al lector, dado que se trata de una casualidad que difícilmente se presentará en la práctica, pero sí es importante el comprobar cómo algunas *familias* de funciones de aproximación son más adecuadas para cierta clase de problemas que otras (en este caso las funciones trigonométricas son mucho más eficaces que las polinómicas).

En el peor de los casos, bastará con ampliar el conjunto de funciones en el que se busca. Así, repitiendo las anteriores operaciones para los polinomios de cuarto grado se tiene:

(a) Definición del conjunto de búsqueda: polinomios de $4^\circ$ orden:

$$\overline{v(x)} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4$$

que verifiquen las condiciones de contorno en desplazamientos (2E1.1), de donde:

$$\overline{v(x)} = -(a_2L + a_3L^2 + a_4L^3)x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4$$

(b) Aplicación del Principio de los Trabajos Virtuales para obtener los coeficientes $a_2$, $a_3$ y $a_4$. Se utilizan como deformadas virtuales las siguientes:

$$\omega_1(x) = -xL + x^2; \quad \omega_2(x) = -xL^2 + x^3; \quad \omega_3(x) = -xL^3 + x^4$$

que, al ser aplicadas dan lugar a las ecuaciones lineales:

$$\int_0^L 2EI(2a_2 + 6a_3x + 12a_4x^2)\,dx = \left(-\tfrac{L^2}{4}\right)F$$

$$\int_0^L 6xEI(2a_2 + 6a_3x + 12a_4x^2)\,dx = \left(-\tfrac{3L^3}{8}\right)F$$

$$\int_0^L 12x^2EI(2a_2 + 6a_3x + 12a_4x^2)\,dx = \left(-\tfrac{7L^4}{16}\right)F$$

(c) Resolución del sistema formado por estas tres últimas ecuaciones:

$$a_2 = \frac{FL}{64EI}; \quad a_3 = -\frac{5F}{32EI}; \quad a_4 = \frac{5F}{64EIL}$$

y por tanto:

$$\overline{v(x)} = \frac{F}{64EI}\left(4L^2x + Lx^2 - 10x^3 + \frac{5x^4}{L}\right)$$

La flecha en el punto medio es ahora

$$\overline{v\left(\tfrac{L}{2}\right)} = \frac{21FL^3}{1024EI}$$

consiguiéndose una aproximación superior al 2 % en la flecha (véase la figura 2E1.1).

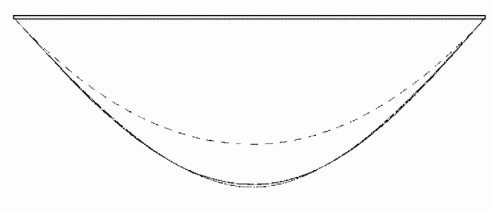


Figura 2E1.1

**Ejemplo 2.2**
Obtener una formulación general para el caso en que las funciones $\Phi_i$ sean trigonométricas, esto es:

$$\overline{v(x)} = \sum_i a_i \operatorname{sen} \frac{i\pi x}{L}$$

**Solución:**

(a) Definición del conjunto de búsqueda: funciones trigonométricas:

$$\overline{v(x)} = a_1 \operatorname{sen} \frac{\pi x}{L} + a_2 \operatorname{sen} \frac{2\pi x}{L} + a_3 \operatorname{sen} \frac{3\pi x}{L} + \cdots$$

que verifiquen las condiciones de contorno en desplazamientos (nótese que la especial elección de las funciones trigonométricas satisface estas condiciones).

(b) Aplicación del Principio de los Trabajos Virtuales para obtener los coeficientes $a_i$. Se utilizan como funciones de desplazamientos virtuales las siguientes:

$$\omega_i(x) = \operatorname{sen} \frac{i\pi x}{L}, \quad i = 1, \ldots, n$$

que, al ser aplicadas, dan lugar al siguiente sistema de ecuaciones:

$$\tfrac{i^2\pi^4}{L^4} \int_0^L \operatorname{sen} \tfrac{i\pi x}{L} EI \left( a_1 \operatorname{sen} \tfrac{\pi x}{L} + 4a_2 \operatorname{sen} \tfrac{2\pi x}{L} + 9a_3 \operatorname{sen} \tfrac{3\pi x}{L} + \cdots \right) dx = \operatorname{sen} \tfrac{i\pi \frac{L}{2}}{L} F$$

(c) Resolución: las ecuaciones anteriores se simplifican mucho teniendo en cuenta que:

$$\int_0^L \operatorname{sen} \tfrac{i\pi x}{L} \operatorname{sen} \tfrac{j\pi x}{L} \, dx = 0 \quad \forall i \neq j$$
$$\int_0^L \operatorname{sen} \tfrac{i\pi x}{L} \operatorname{sen} \tfrac{j\pi x}{L} \, dx = \tfrac{L}{2} \quad \forall i = j$$

Ello hace que, si la rigidez $EI$ de la viga es constante a lo largo de ésta, el anterior sistema de ecuaciones se simplifique notablemente, obteniéndose:

$$a_{2i-1} = (-1)^{i+1} \frac{FL^3}{\pi^4 EI} \frac{2}{(2i-1)^2}; \quad a_{2i} = 0; \quad \forall i = 1, \ldots, n$$

Utilizando solamente los tres primeros términos, se obtiene para la flecha en el centro el valor:

$$\overline{v\left(\tfrac{L}{2}\right)} = \left( \frac{2}{\pi^4} + \frac{2}{81\pi^4} \right) \frac{FL^3}{EI}$$

que representa un error de tan sólo el $0{,}2\,\%$.

Es igualmente interesante comprobar cómo el segundo término no añade nada a la solución, se vuelve a encontrar una función normal a la distribución de carga en idéntica forma a lo que ocurre con el tercer término de la serie potencial.

## 2.8 - EL MÉTODO DE GALERKIN

Con este nombre designaremos un procedimiento para la elección de las funciones virtuales que, con distintas variaciones, tuvo su origen en la escuela rusa. Las diferencias de matiz que caracterizan la aportación de cada autor rebasan el nivel que se pretende dar a estos temas iniciales, por lo que nos limitaremos a una exposición general que, obviando el rigor matemático, presente la idea básica, que no es otra que la de utilizar como funciones virtuales las siguientes:

$$\omega_i = \Phi_i + h_i \quad i = 1, \ldots, n \tag{2.13}$$

donde:
$\omega_i$: Funciones virtuales. Tantas como funciones de base.
$\Phi_i$: Funciones de base.
$h_i$: Funciones auxiliares que suman en el contorno el valor del desplazamiento.

Estas últimas funciones se utilizan cuando las condiciones de contorno esenciales del problema no son homogéneas, esto es, cuando se imponen desplazamientos en el contorno.

Si con el único objeto de simplificar y centrar ideas, suponemos que las condiciones de contorno son homogéneas en todos los casos, se tendrá:

$$\omega_i = \Phi_i \quad i = 1, \ldots, n \tag{2.14}$$

Estamos ya en condiciones de sustituir en la formulación variacional. Tal y como se ha indicado, esto se puede plantear realizando en primer lugar, una proyección sobre una base de funciones $\omega$, es decir multiplicando ambos miembros de la ecuación diferencial que define el problema, ecuación de campo, por las funciones de proyección e integrando sobre el dominio. A continuación se reduce el orden de las derivadas de la variable de campo mediante una integración por partes utilizando el teorema de Green o el de Stokes, como se verá más adelante.

Así, para el caso de flexión:

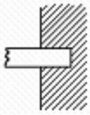
$$\int_0^L \frac{d^2\omega}{dx^2} EI \frac{d^2 v}{dx^2}\, dx = \int_0^L \omega Q\, dx + \left[\frac{d\omega}{dx} M - \omega V\right]_0^L$$

en la que las exigencias de derivabilidad sobre la variable de campo han pasado del orden cuatro al dos y, de ahí, que también que se utiliza la denominación de formulación débil.

Al sustituir la aproximación del desplazamiento (2.12) se tiene:

$$\int_0^L \frac{d^2\omega}{dx^2} EI \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{d^2\Phi_i}{dx^2} a_i\right) dx = \int_0^L \omega Q\, dx + \left[\frac{d\omega}{dx} M - \omega V\right]_0^L$$

Tabla 2.1

| SITUACIÓN | CONDICIONES EN DESPLAZAMIENTO | CONDICIONES EN FUERZAS | TÉRMINOS EN EL CONTORNO |
|---|---|---|---|
|  EMPOTRAMIENTO | $\mu = 0 \Rightarrow \Phi_i = 0$<br>$\mu' = 0 \Rightarrow \Phi_i' = 0$ | $V \neq 0$<br>$M \neq 0$ | $\Phi_i \; V = 0$<br>$\Phi_i' \; M = 0$ |
| APOYO | $\mu = 0 \Rightarrow \Phi_i = 0$<br>$\mu' \neq 0 \Rightarrow \Phi_i' \neq 0$ | $V \neq 0$<br>$M = 0$ | $\Phi_i \; V = 0$<br>$\Phi_i' \; M = 0$ |
| LIBRE | $\mu = 0 \Rightarrow \Phi_i \neq 0$<br>$\mu' = 0 \Rightarrow \Phi_i' \neq 0$ | $V = 0$<br>$M = 0$ | $\Phi_i \; V = 0$<br>$\Phi_i' \; M = 0$ |

y tomando sucesivamente cada $\Phi_i$ como función de desplazamiento virtual, se tiene:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \int_0^L \frac{d^2\Phi_j}{dx^2} EI \frac{d^2\Phi_i}{dx^2}\, dx = \int_0^L \Phi_j Q\, dx$$

expresión que representa un sistema lineal de ecuaciones. Los términos en el contorno han desaparecido al considerar homogéneas las condiciones de contorno. Aunque ello pueda parecer en principio muy restrictivo, la tabla2.1 muestra el abanico de posibilidades cubierto.

El anterior sistema de ecuaciones se suele representar en la forma:

$$\boldsymbol{K}\,\boldsymbol{u} = \boldsymbol{F} \tag{2.15}$$

donde:
$\boldsymbol{F}$: *Vector de cargas*. Cada componente es de la forma

$$F_j = \int_0^l \Phi_j Q\, dx \tag{2.16}$$

y representa el trabajo de la distribución de cargas externas con la deformada virtual $\Phi_j$.