

ÍNDICE

Introducción	9
PARTE 1. FUNDAMENTOS DEL DISEÑO MECÁNICO	15
Capítulo 1. Seguridad y fiabilidad	17
1.1. Factor de seguridad y coeficiente de fiabilidad	17
1.2. Factor de seguridad estadístico	20
1.3. Factor de aplicación y factor de resistencia	21
Capítulo 2. Propiedades mecánicas de los materiales.....	23
2.1. Ensayo de tracción. Resistencia estática.....	23
2.2. Elasticidad y plasticidad. Ecuaciones de Hooke y Datsko	27
2.3. Dureza.....	30
2.4. Fragilidad y ductilidad	31
2.5. Efecto de la temperatura	32
2.6. Concentración de esfuerzo.....	33
2.7. Sensibilidad a la entalladura	35
Capítulo 3. Consideraciones estáticas en el diseño mecánico.....	47
3.1. Introducción. Concentración de esfuerzo ante sollicitaciones estáticas	47
3.2. Criterios de fallo estático. Tensiones equivalentes	48
3.3. Fallo de materiales dúctiles y frágiles.....	54
3.4. Tensión admisible y factor de seguridad estático	62

Capítulo 4. Diseño por resistencia a la fatiga frente a cargas alternantes	67
4.1. Introducción al fenómeno de fatiga	67
4.2. Diagrama de fatiga. Resistencia de fatiga y límite de fatiga.....	68
4.3. Corrección del límite de fatiga. Ecuación de Marin	72
Capítulo 5. Diseño por resistencia a la fatiga frente a cargas fluctuantes	85
5.1. Influencia de la tensión media. Teorías de fallo por fatiga con tensión media.....	85
5.2. Tensión alternante equivalente	90
5.3. Línea de carga. Factores de seguridad	92
PARTE 2. DISEÑO DE ELEMENTOS MECÁNICOS.....	99
Capítulo 6. Cálculo de embragues y frenos	101
6.1. Generalidades sobre embragues y frenos	101
6.2. Embragues y frenos de tambor y zapatas	102
6.3. Embragues y frenos de cinta	114
6.4. Embragues y frenos de disco	118
6.5. Embragues y frenos cónicos	121
6.6. Anexo 6.a. Materiales para embragues y frenos.....	125
Capítulo 7. Rodamientos	127
7.1. Tipos de rodamientos	127
7.2. Duración y fiabilidad.....	129
7.3. Carga en rodamientos.....	132
Capítulo 8. Selección de rodamientos.....	139
8.1. Introducción	139
8.2. Selección de rodamientos de bolas	140
8.3. Selección de rodamientos de rodillos cilíndricos.....	144
Capítulo 9. Correas planas y redondas	153
9.1. Transmisiones por poleas y correas.....	153
9.2. Correas planas y redondas	155
9.3. Cálculo de correas planas y redondas.....	156
9.4. Tensión admisible.....	160
Anexo 9.a. Materiales para correas	165
Capítulo 10. Correas trapezoidales y dentadas	167
10.1. Características de las correas trapezoidales y dentadas.....	167
10.2. Longitud de banda y distancia entre ejes.....	168
10.3. Dimensiones de las bandas trapezoidales.....	169

10.4. Cálculo y selección de bandas trapezoidales.....	171
10.5. Bandas sincronizadoras	178
Anexo 10.a. Diámetros de poleas trapezoidales.....	181
Anexo 10.b. Factores de corrección de potencia de correas trapezoidales	183
Capítulo 11. Cadenas de rodillos	185
11.1. Generalidades	185
11.2. Relación de transmisión	189
11.3. Cálculo de transmisiones por cadena	190
APÉNDICES	197
I. Factores de conversión de unidades (sistemas internacional y anglosajón)	199
II. Propiedades elásticas de algunos materiales.....	201
III. Glosario de términos.....	203

CAPÍTULO 6

CÁLCULO DE EMBRAGUES Y FRENOS

En este capítulo se presentan las características constructivas y los procedimientos de cálculo de los distintos tipos de embragues y frenos. Se estudia la distribución de presiones que se presenta en las superficies de fricción por efecto de la fuerza de accionamiento, y la relación de ambas con la capacidad de frenado.

6.1. GENERALIDADES SOBRE EMBRAGUES Y FRENOS

Tanto los embragues como los frenos son acoplamientos entre ejes que permiten, cuando son accionados, transmitir el movimiento de un eje a otro –caso de los embragues–, o detenerlo o reducir su velocidad –caso de los frenos–. Unos y otros se rigen por un mismo principio de funcionamiento, y presentan idénticas disposiciones constructivas y métodos de cálculo. Por ello, y a pesar de la función para la que están concebidos es diferente, la exposición que sigue se desarrolla de manera conjunta para ambos.

Desde un punto de vista dinámico, un embrague es un dispositivo que, cuando se acciona, acopla dos ejes, uno de los cuales gira, antes del acoplamiento, con velocidad angular ω_1 y mueve un rotor de momento de inercia I_1 y el otro gira con velocidad angular ω_2 y mueve un rotor de momento de inercia I_2 . La Figura 6.1 muestra el esquema de esta configuración. Cuando se embraga, las superficies se unen y se produce un deslizamiento relativo entre ellas (puesto que las velocidades angulares son diferentes), hasta que pasado un tiempo se equilibran, momento en que finaliza el proceso de acoplamiento.

Un freno es, sencillamente, un caso particular de embrague, en el que una de las velocidades angulares es permanentemente igual a cero, lo que obliga a que su correspondiente momento de inercia sea infinito. Desde un punto de vista constructivo, esto se traduce en que este eje está anclado a la bancada de la máquina (o chasis si se trata de un vehículo).

Con este planteamiento general, lo que sigue es una presentación de los distintos tipos de embragues y frenos, con sus correspondientes características constructivas y métodos de

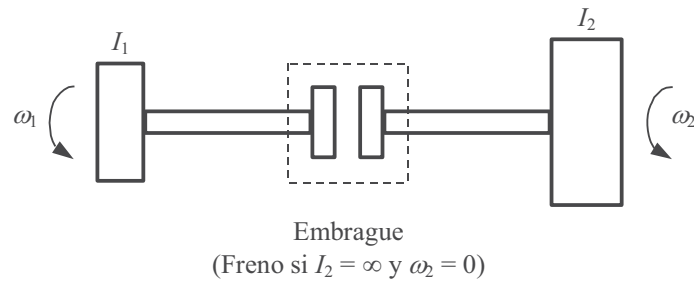


Figura 6.1. Esquema dinámico de un embrague o freno.

cálculo. Estos tipos de embragues y frenos son:

- De tambor y zapatas
- De cinta
- De discos
- Cónicos

Para cada uno de ellos se estudiará la distribución de presiones que se presenta en las superficies de fricción y se determinará la capacidad de frenado (o embragado) y su relación con la fuerza de accionamiento.

6.2. EMBRAGUES Y FRENOS DE TAMBOR Y ZAPATAS

La Figura 6.2 muestra el esquema de un freno (o embrague) de tambor y zapatas, tanto para el caso de que éstas sean interiores como exteriores. Aunque en la figura no aparece representado, es habitual el caso de dos o más zapatas, repartidas de manera uniforme alrededor del tambor. Se muestran también los sistemas de referencia que se utilizarán: el origen estará situado en el centro del tambor, el eje x contendrá la articulación de la zapata en un punto de abscisa positiva, y el eje y tendrá sentido contrario al de la componente perpendicular al eje x de la fuerza normal que el tambor ejerce sobre la zapata, cuando ésta es accionada (en definitiva, de forma que la componente y de la fuerza de accionamiento sea positiva). Se aprecia que, en el caso de existir más de una zapata, cada una de ellas tendrá su sistema de referencia asociado.

El primer problema que se plantea es conocer cómo es la distribución de presiones que el tambor ejerce sobre cada punto de la zapata, cuando ésta se acciona. La acción de una fuerza de accionamiento F en alguno de los puntos de la zapata es, a efectos de cálculo, equivalente a la de un par de accionamiento M_{acc} sobre la articulación, de valor:

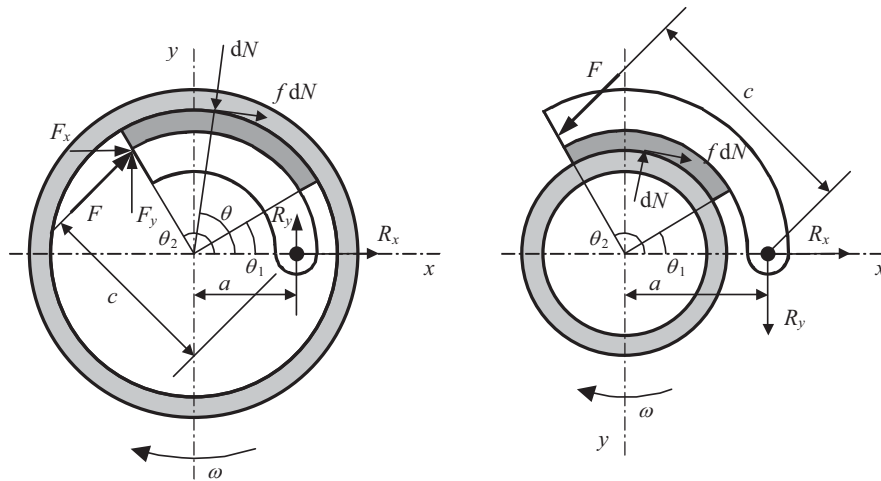


Figura 6.2. Embragues y frenos de tambor y zapatas.

$$M_{acc} = Fc$$

donde c es la distancia de la articulación a la línea de acción de la fuerza. Por efecto de este par, la zapata tenderá a girar alrededor de su articulación, apretándose contra el tambor. El tambor ejercerá una reacción sobre la zapata, a lo largo de cuya superficie aparecerá una distribución de fuerzas en dirección normal a la misma, de forma que el momento de todas estas fuerzas respecto de la articulación tiene que ser igual y de distinto signo que el momento de accionamiento. (En realidad, el par de accionamiento debe absorber también el momento que sobre la articulación crean las fuerzas de rozamiento. Como en este análisis lo que interesa es conocer la distribución de presiones, se puede suponer que el tambor no se mueve, con lo que no habrá par de rozamiento). En definitiva, lo que se tiene es una distribución de reacciones hiperestáticas que, en virtud del teorema de Menabrea, se repartirán a lo largo de la zapata de forma que el potencial interno sea mínimo.

De acuerdo con la Figura 6.2, el ángulo abrazado por la zapata es $\theta_2 - \theta_1$, y cada punto de la misma se podrá caracterizar por su correspondiente ángulo θ . Si se designa por F_i la reacción que el tambor ejerce sobre el punto de la zapata correspondiente a θ_i , se tiene que:

$$F_i = p(\theta_i) b r d\theta$$

donde p es la presión, b el ancho de la zapata y r el radio del tambor. Se aprecia que el valor de F_i es infinitamente pequeño, pero por el momento se hará abstracción de ello, para mayor claridad de la exposición que sigue.

En el capítulo 5 se demostró que cuando dos cilindros se sometían a la acción de una fuerza F que apretaba uno contra el otro, el desplazamiento del punto de aplicación de la fuerza era proporcional a su valor:

$$\delta = \frac{2k_E}{\pi^2 W} F$$

donde W era la altura de los cilindros. Puesto que las superficies tanto de la zapata como del tambor son cilíndricas, se puede afirmar que la contribución de la fuerza F_i al potencial interno es:

$$U_i = \frac{1}{2} F_i \delta_i = \frac{1}{2} F_i \frac{2k_E}{\pi^2 b} F_i = \frac{k_E}{\pi^2 b} F_i^2$$

y el potencial interno total será:

$$U = \frac{k_E}{\pi^2 b} \sum_i F_i^2$$

Este potencial ha de ser mínimo, pero sujeto a una restricción, que es que la suma de los momentos producidos por todas las F_i tiene que ser igual al momento exterior sobre la articulación M_{ext} , que aprieta la zapata contra el tambor (que, como va dicho, no es igual al momento de accionamiento, pues éste ha de absorber también el par de fricción). De la Figura 6.2 se deduce que el momento de la fuerza F_i (dN en la figura) respecto de la articulación vale:

$$M_i = F_i a \sen \theta_i$$

(siendo a la distancia de la articulación al centro del tambor) de donde se concluye que se debe cumplir la condición:

$$M_{ext} = a \sum_i F_i \sen \theta_i$$

En conclusión, se trata de encontrar los valores de las F_i que minimizan la función:

$$U = \frac{k_E}{\pi^2 b} \sum_i F_i^2$$

sujeto a la restricción:

$$a \sum_i F_i \sen \theta_i = M_{ext}$$

Un modo de resolver este problema es mediante el método de los multiplicadores de Lagrange. Se define la función K como la función a minimizar menos un multiplicador λ multiplicado por la restricción igualada a cero:

$$K = \frac{k_E}{\pi^2 b} \sum_i F_i^2 - \lambda \left(a \sum_i F_i \sen \theta_i - M_{ext} \right)$$

y la solución del problema se obtendrá de igualar a cero las derivadas parciales de K con respecto a cada una de las F_i y respecto al multiplicador. De acuerdo con ello,

$$\frac{\partial K}{\partial F_i} = \frac{2k_E}{\pi^2 b} F_i - \lambda a \sin \theta_i = 0$$

de donde:

$$F_i = \left(\frac{\lambda a \pi^2 b}{2k_E} \right) \sin \theta_i$$

Por otro lado, de igualar a cero la derivada de K con respecto a λ , se llega a la ecuación de restricción:

$$M_{ext} = a \sum_i F_i \sin \theta_i$$

en la que, sustituyendo la expresión anterior, se obtiene:

$$M_{ext} = a \left(\frac{\lambda a \pi^2 b}{2k_E} \right) \sum_i \sin^2 \theta_i$$

$$\left(\frac{\lambda a \pi^2 b}{2k_E} \right) = \frac{M_{ext}}{a \sum_i \sin^2 \theta_i}$$

y, por consiguiente, cada fuerza F_i valdrá:

$$F_i = \frac{M_{ext}}{a \sum_j \sin^2 \theta_j} \sin \theta_i$$

De acuerdo con esto, la distribución de presiones a lo largo de la zapata vendrá dada por:

$$p(\theta_i) = \frac{F_i}{br d\theta} = \frac{M_{ext}}{abr \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sin^2 \theta d\theta} \sin \theta_i$$

en donde el sumatorio se ha sustituido por la integral, por extenderse a infinitos sumandos de valor diferencial. En definitiva, se concluye que la presión se distribuye de manera proporcional al seno del ángulo θ , y por tanto se cumple:

$$\frac{p(\theta)}{\sin \theta} = \text{cte}$$

La presión máxima p_a se localizará en el punto θ_a , que corresponderá a:

$$\theta_a = \min \left(\theta_2, \frac{\pi}{2} \right)$$

y la distribución de presiones se puede poner finalmente de la forma:

$$p(\theta) = p_a \frac{\sin \theta}{\sin \theta_a}$$

Una primera conclusión que se puede extraer de lo anterior es que los puntos situados en las proximidades de la articulación se verán sometidos a presiones muy pequeñas, por lo que aportarán poco al proceso de frenado o embragado. Es muy habitual, por ello, suprimir el material de fricción en esa zona, como en la Figura 6.2.

Una vez determinada la distribución de presiones sobre la zapata, se va a proceder a continuación a buscar la relación entre la fuerza de accionamiento y la presión máxima p_a . Es evidente que esta presión máxima no podrá exceder el valor de la resistencia a la presión superficial del material del revestimiento, lo que limitará a su vez el valor de la fuerza de accionamiento.

Mas arriba se indicó que el momento de accionamiento no es igual al momento resultante de las fuerzas normales sobre la zapata, debido a la aparición de fuerzas de rozamiento, que también crean momento respecto de la articulación. La fuerza normal en un punto se puede expresar como:

$$dN = p(\theta)br d\theta = \frac{p_a br}{\sin \theta_a} \sin \theta d\theta$$

por lo que el momento respecto de la articulación producido por las fuerzas normales será:

$$M_N = \int dN(a \sin \theta) = \frac{p_a bra}{\sin \theta_a} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sin^2 \theta d\theta$$

$$M_N = \frac{p_a bra}{\sin \theta_a} \left[\frac{1}{2}(\theta_2 - \theta_1) - \frac{1}{4}(\sin 2\theta_2 - \sin 2\theta_1) \right]$$

Este momento tiende siempre a separar la zapata del tambor, y por tanto tiene el sentido positivo del eje z (no representado en la Figura 6.2) si el triedro de referencia se toma a derechas; y ello tanto si la zapata es exterior como interior al tambor.

El momento de las fuerzas de rozamiento respecto de la articulación viene dado por:

$$M_f = \int f dN(r - a \cos \theta) = \frac{fp_a br}{\sin \theta_a} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sin \theta (r - a \cos \theta) d\theta$$

$$M_f = \frac{fp_a br}{\sin \theta_a} \left[r(\cos \theta_1 - \cos \theta_2) - \frac{a}{2}(\sin^2 \theta_2 - \sin^2 \theta_1) \right]$$

El sentido de este momento, en cambio, depende del sentido de giro del tambor. Tal como se ha representado este giro en la Figura 6.2, la zapata de la izquierda tiende a pegarse al tambor por efecto del par de rozamiento. Es lo que se llama efecto autoenergizante, que suele ser deseable porque requiere fuerzas de accionamiento menores para el acoplamiento, ya que el rozamiento actúa a favor de la unión. Lo contrario ocurriría si el tambor girara en sentido inverso.

El efecto autoenergizante es más difícil de predecir en el caso de zapatas exteriores. En la de la Figura 6.2, la fuerza de rozamiento que actúa en $\theta = \pi/2$ tiende a separar la zapata del tambor, pero la que actúa en $\theta = \theta_1$ tiende a unirla (más claramente se vería si la zapata empezara en $\theta_1 = 0$). En general, será necesario hacer los cálculos para saber qué efecto prevalece.

En todo caso, el momento de las fuerzas de fricción, tal como se calcula con la ecuación anterior, es positivo si el término $(r \cos \theta)$ es positivo. Evidentemente, este término es siempre positivo para $\theta = \pi/2$; por tanto, como el momento de las fuerzas normales actuaba siempre en sentido de separar la zapata del tambor, el momento de las fuerzas de rozamiento tendrá el mismo sentido que éste si la zapata no es autoenergizante en el punto $\theta = \pi/2$ (con independencia de que la zapata llegue hasta ese punto o haya que prolongarla idealmente), y sentido contrario si sí lo es. Por consiguiente, si se define un factor de energizado R_f como:

$$R_f = 1 \quad \text{para zapata autoenergizante en } \theta = \frac{\pi}{2}$$

$$R_f = -1 \quad \text{para zapata no autoenergizante en } \theta = \frac{\pi}{2}$$

se puede afirmar que el momento total producido por las fuerzas normales y de fricción será:

$$M_N - R_f M_f$$

Este momento, tal como se ha calculado, es positivo si la zapata tiende a separarse del tambor, por lo que ha de ser igual al par de accionamiento, que siempre es en sentido contrario. Por tanto:

$$M_N - R_f M_f = Fc$$

$$F = \frac{M_N - R_f M_f}{c}$$

Esta última ecuación proporciona la relación entre la fuerza de accionamiento y la presión máxima p_a , de la que dependen tanto M_N como M_f . Se aprecia, además, que esta relación es proporcional. Obviamente, la fuerza de accionamiento está limitada al valor que hace p_a igual a la presión límite del material del revestimiento.

Tal como se ha definido el factor de energizado, la zapata será autoenergizante si $R_f M_f$ es positivo, y no lo será si es negativo. Ha de destacarse que, para zapatas autoenergizantes, podría darse el caso:

$$M_N - R_f M_f = 0$$

que significaría que no sería necesaria fuerza de accionamiento alguna para el acoplamiento. Es lo que se conoce como efecto de autotrabado o autoagarre, y significaría que para separar la zapata sería necesaria la aplicación de una fuerza en sentido contrario a la ante-

rior. Evidentemente, esto no es deseable, por lo que se ha de imponer como condición de diseño:

$$M_N - R_f M_f > 0$$

Esta condición se verifica siempre en las zapatas no autoenergizantes. En las zapatas autoenergizantes se ha de conseguir escogiendo adecuadamente la distancia a de la articulación al centro del tambor.

El par de acoplamiento es el que la zapata ejerce sobre el tambor. Como las fuerzas normales no ejercen par sobre el eje de giro, el par de acoplamiento valdrá:

$$T = \int r f dN = - \int_{\theta_1}^{\theta_2} r f \frac{p_a b r}{\sin \theta_a} \sin \theta d\theta = \frac{f p_a b r^2}{\sin \theta_a} (\cos \theta_1 - \cos \theta_2)$$

En el caso de frenos, se llama capacidad de frenado al par de frenado máximo, es decir, al que se obtendría para una p_a igual a la presión admisible del material del revestimiento. Las tablas del anexo 6.a proporcionan los valores de esta presión admisible para diferentes materiales.

Finalmente, se calcularán las componentes de la reacción en la articulación. De acuerdo con el sentido de los ejes mostrado en la Figura 6.2, se tiene, para el equilibrio de fuerzas en la dirección del eje x :

$$\begin{aligned} R_x &= \int dN \cos \theta - R_f \int f dN \sin \theta - F_x \\ R_x &= \frac{p_a b r}{\sin \theta_a} \left[\int_{\theta_1}^{\theta_2} \sin \theta \cos \theta d\theta - R_f f \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sin^2 \theta d\theta \right] - F_x \\ R_x &= \frac{p_a b r}{\sin \theta_a} \left[\frac{1}{2} (\sin^2 \theta_2 - \sin^2 \theta_1) - R_f f \left(\frac{1}{2} (\theta_2 - \theta_1) - \frac{1}{4} (\sin 2\theta_2 - \sin 2\theta_1) \right) \right] - F_x \end{aligned}$$

y en la dirección del eje y :

$$\begin{aligned} R_y &= \int dN \sin \theta + R_f \int f dN \cos \theta - F_y \\ R_y &= \frac{p_a b r}{\sin \theta_a} \left[\int_{\theta_1}^{\theta_2} \sin^2 \theta d\theta + R_f f \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sin \theta \cos \theta d\theta \right] - F_y \\ R_y &= \frac{p_a b r}{\sin \theta_a} \left[\left(\frac{1}{2} (\theta_2 - \theta_1) - \frac{1}{4} (\sin 2\theta_2 - \sin 2\theta_1) \right) + R_f f \frac{1}{2} (\sin^2 \theta_2 - \sin^2 \theta_1) \right] - F_y \end{aligned}$$

En estas expresiones, R_x , R_y , F_x y F_y son las componentes de la reacción y la fuerza de accionamiento, todas ellas en el sentido de los ejes. Obviamente, el valor de la reacción en la articulación se obtendrá de la ecuación:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}$$

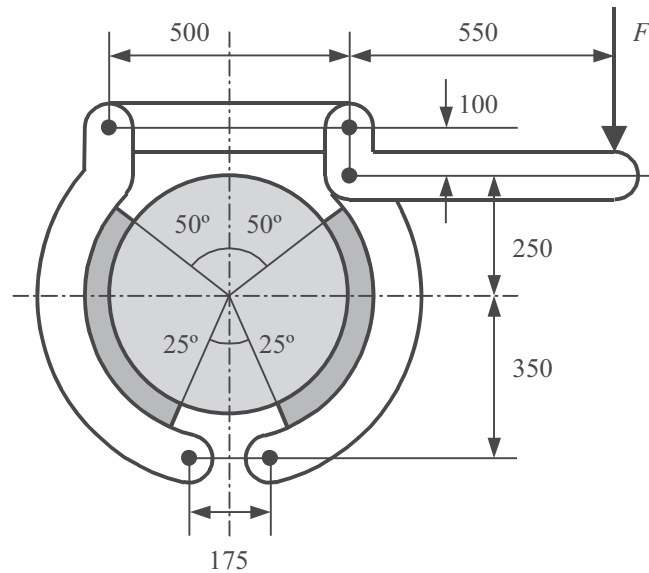


Figura 6.3. Freno y mecanismo de accionamiento.

EJEMPLO 6.1

Un freno consta de un tambor de 500 mm de diámetro, que gira en sentido horario, y dos zapatas de 50 mm de ancho, con una disposición geométrica como la de la Figura 6.3, en la que todas las dimensiones están en mm. El material de fricción tiene un coeficiente de rozamiento con el tambor de 0,3 y soporta un presión máxima de 1000 kPa. El freno se acciona mediante el mecanismo que se representa en la figura. Calcular:

- El valor límite de la fuerza de accionamiento.
- La capacidad de frenado.
- La reacción en las articulaciones de ambas zapatas.

SOLUCIÓN

a) Para determinar el momento de las fuerzas normales y el de las fuerzas de fricción es necesario determinar, en primer lugar, los ángulos inicial y final de las zapatas. El ángulo α que el vector de posición de las articulaciones forma con el eje vertical del tambor viene dado por:

$$\begin{aligned}\operatorname{tg} \alpha &= \frac{175}{2 \cdot 350} = 0,25 \\ \alpha &= \operatorname{atg} 0,25 = 14,036^\circ\end{aligned}$$

por consiguiente, los ángulos inicial y final de cada zapata serán:

$$\begin{aligned}\theta_1 &= 25 - \alpha = 25 - 14,036 = 10,964^\circ \\ \theta_2 &= 180 - 50 - \alpha = 180 - 50 - 14,036 = 115,964^\circ\end{aligned}$$

de donde se deduce inmediatamente:

$$\begin{aligned}\theta_a &= \min\left(\theta_2, \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} = 90^\circ \\ \operatorname{sen} \theta_a &= 1\end{aligned}$$

La distancia a del centro del tambor a la articulación es:

$$a = \sqrt{350^2 + \left(\frac{175}{2}\right)^2} = 360,772 \text{ mm}$$

Con ello, el momento de las fuerzas normales en función de la presión máxima en la zapata, viene dado por:

$$\begin{aligned}M_N &= \frac{p_a b r a}{\operatorname{sen} \theta_a} \left[\frac{1}{2} (\theta_2 - \theta_1) - \frac{1}{4} (\operatorname{sen} 2\theta_2 - \operatorname{sen} 2\theta_1) \right] \\ M_N &= \frac{p_a 50 \cdot 250 \cdot 360,772}{1} \left[\frac{1}{2} 105 \frac{\pi}{180} - \frac{1}{4} (\operatorname{sen} 231,928 - \operatorname{sen} 21,928) \right] = 5,441 p_a\end{aligned}$$

donde M_N viene dado en N·m si p_a se expresa en kPa. Análogamente, la relación entre el momento de las fuerzas de fricción y la presión máxima en la zapata es:

$$\begin{aligned}M_f &= \frac{f p_a b r}{\operatorname{sen} \theta_a} \left[r (\cos \theta_1 - \cos \theta_2) - \frac{a}{2} (\operatorname{sen}^2 \theta_2 - \operatorname{sen}^2 \theta_1) \right] \\ &= \frac{0,3 p_a 50 \cdot 250}{1} \left[250 (\cos 10,964 - \cos 115,964) - \frac{360,772}{2} (\operatorname{sen}^2 115,964 - \operatorname{sen}^2 10,964) \right] \\ M_f &= 0,809 p_a\end{aligned}$$

con las mismas unidades que antes. Teniendo en cuenta que el tambor gira en sentido horario, en el punto de presión máxima la zapata de la izquierda (zapata I) es autoenergizante (o autoaplicante) mientras que la de la derecha (zapata D) no lo es; por tanto:

$$\begin{aligned}R_{fI} &= 1 \\ R_{fD} &= -1\end{aligned}$$

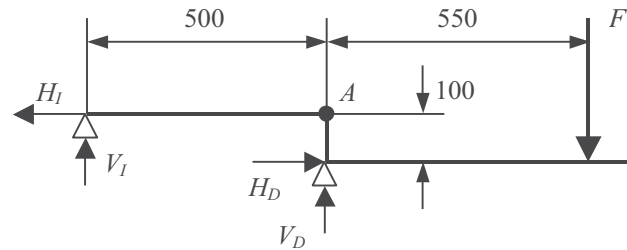


Figura 6.4. Esquema de fuerzas sobre el mecanismo de accionamiento.

Para determinar la magnitud y dirección de la fuerza que actúa sobre cada zapata se ha de proceder, en primer lugar, al análisis dinámico del mecanismo de accionamiento. La Figura 6.4 muestra el esquema de fuerzas que actúan sobre dicho mecanismo. Evidentemente, las reacciones en los apoyos son las reacciones que ejercen las zapatas, por lo que la fuerza sobre cada zapata será igual a la correspondiente reacción, cambiada de signo.

La condición de equilibrio estático proporciona tres ecuaciones:

$$\begin{aligned} H_I &= H_D \\ V_I + V_D &= F \\ V_D 500 + H_D 100 - F(500 + 550) &= 0 \end{aligned}$$

A ello se une la condición de que el momento en la sección de la articulación A ha de ser cero:

$$V_I 500 = 0$$

Resolviendo ese sistema de cuatro ecuaciones lineales con cuatro incógnitas, se obtiene:

$$\begin{aligned} V_I &= 0 \\ V_D &= F \\ H_I &= H_D = 5,5F \end{aligned}$$

En la Figura 6.5 se han representado las fuerzas de accionamiento de cada zapata (cuyas componentes son las que se acaban de calcular, cambiadas de signo) y las direcciones de los ejes asociados a ambas, según el criterio establecido al principio de este apartado. Para determinar la relación entre la fuerza de accionamiento de cada zapata y la presión máxima se emplea la ecuación que se dedujo anteriormente:

$$M_N - R_f M_f = Fc$$

El término Fc que aparece en esta ecuación no es otra cosa que el momento de la fuerza de accionamiento respecto de la articulación. En este caso, se puede determinar más fácilmente

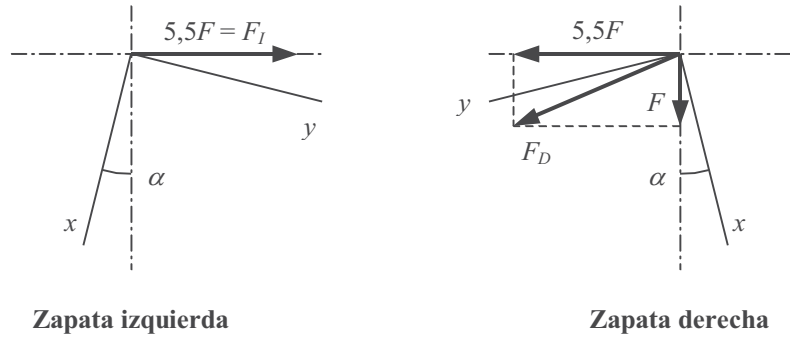


Figura 6.5. Fuerza sobre cada zapata.

te a partir de los momentos de cada componente:

$$(Fc)_I = 5,5F(100 + 250 + 350) = 3,85F \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$(Fc)_D = 5,5F(250 + 350) - F \frac{500 - 175}{2} = 3,138F \text{ N} \cdot \text{m}$$

donde F está expresado en N. Si ahora se sustituyen valores en la expresión anterior, se tiene, para la zapata izquierda:

$$\begin{aligned} M_N - R_{fI} M_f &= (Fc)_I \\ 5,441 p_a - 1 \cdot 0,809 p_a &= 3,85F \\ p_a &= \frac{3,85}{5,441 - 0,809} F = 0,831F \text{ kPa} \end{aligned}$$

y para la zapata derecha:

$$\begin{aligned} M_N - R_{fD} M_f &= (Fc)_D \\ 5,441 p_a + 1 \cdot 0,809 p_a &= 3,138F \\ p_a &= \frac{3,138}{5,441 + 0,809} F = 0,502F \text{ kPa} \end{aligned}$$

Se observa que la presión mayor se produce en la zapata izquierda. En consecuencia, si el valor de la presión no debe exceder el de 1000 kPa, el valor límite de F será:

$$F_{\text{lim}} = \frac{1000}{0,831} = 1203,369 \text{ N}$$

b) Para ese valor de la fuerza F la presión máxima en la zapata izquierda será 1000 kPa; en cambio, en la zapata derecha será:

$$p_{aD} = 0,502 F_{lim} = 0,502 \cdot 1203,369 = 604,091 \text{ kPa}$$

El par de frenado las zapatas, en función de las respectivas presiones máximas expresadas en kPa, viene dado por:

$$T = \frac{f p_a b r^2}{\sin \theta_a} (\cos \theta_1 - \cos \theta_2) = \frac{0,3 \cdot 50 \cdot 250^2}{1} (\cos 10,964 - \cos 115,964) \cdot 10^{-6} p_a$$

$$T = 1,331 p_a \text{ N} \cdot \text{m}$$

por lo que el par de frenado total será:

$$T = T_I + T_D = 1,331(p_{al} + p_{aD}) = 1,331(1000 + 604,091) = 2135,045 \text{ N} \cdot \text{m}$$

que por corresponder con la presión límite en el revestimiento, coincidirá con la capacidad de frenado.

c) De la Figura 6.5, la fuerza que acciona la zapata izquierda es:

$$F_I = 5,5 F_{lim} = 5,5 \cdot 1203,364 = 6618,530 \text{ N}$$

y sus componentes según los ejes del sistema de referencia de la zapata:

$$F_{Ix} = -F_I \sin \alpha = -6618,53 \sin 14,036 = -1605,202 \text{ N}$$

$$F_{Iy} = F_I \cos \alpha = 6618,53 \cos 14,036 = 6420,924 \text{ N}$$

Para calcular las componentes de la reacción en la articulación, si se hace:

$$A(\theta_1, \theta_2) = \frac{1}{2}(\theta_2 - \theta_1) - \frac{1}{4}(\sin 2\theta_2 - \sin 2\theta_1) = 1,206$$

$$B(\theta_1, \theta_2) = \frac{1}{2}(\sin^2 \theta_2 - \sin^2 \theta_1) = 0,386$$

se tiene:

$$R_{Ix} = \frac{p_{al} b r}{\sin \theta_a} [B(\theta_1, \theta_2) - R_{fl} f A(\theta_1, \theta_2)] - F_{Ix}$$

$$R_{Ix} = \frac{1000 \cdot 50 \cdot 250}{1} (0,386 - 1 \cdot 0,3 \cdot 1,206) \cdot 10^{-3} + 1605,202 = 1907,702 \text{ N}$$

$$R_{Iy} = \frac{p_{al} b r}{\sin \theta_a} [A(\theta_1, \theta_2) + R_{fl} f B(\theta_1, \theta_2)] - F_{Iy}$$

$$R_{Iy} = \frac{1000 \cdot 50 \cdot 250}{1} (1,206 + 1 \cdot 0,3 \cdot 0,386) \cdot 10^{-3} - 6420,924 = 10.101,576 \text{ N}$$

$$R_I = \sqrt{R_{Ix}^2 + R_{Iy}^2} = \sqrt{1907,702^2 + 10.101,576^2} = 10.280,134 \text{ N}$$

La fuerza que acciona la zapata derecha es:

$$F_D = \sqrt{5,5^2 + 1^2} F_{\text{lim}} = 5,59 \cdot 1203,369 = 6726,833 \text{ N}$$

y forma un ángulo con el eje horizontal:

$$\alpha_D = \text{atg} \frac{1}{5,5} = 10,305^\circ$$

Las componentes de esta fuerza según los ejes del sistema de referencia de la zapata son:

$$F_{Dx} = F_D \sin(\alpha_D - \alpha) = 6726,833 \sin(10,305 - 14,036) = -437,730 \text{ N}$$

$$F_{Dy} = F_D \cos(\alpha_D - \alpha) = 6726,833 \cos(10,305 - 14,036) = 6712,576 \text{ N}$$

y la reacción en la articulación:

$$R_{Dx} = \frac{P_{aD} br}{\sin \theta_a} [B(\theta_1, \theta_2) - R_{fD} f A(\theta_1, \theta_2)] - F_{Dx}$$

$$R_{Dx} = \frac{604,091 \cdot 50 \cdot 250}{1} (0,386 + 1 \cdot 0,3 \cdot 1,206) \cdot 10^{-3} + 437,73 = 6084,471 \text{ N}$$

$$R_{Dy} = \frac{P_{aD} br}{\sin \theta_a} [A(\theta_1, \theta_2) + R_{fD} f B(\theta_1, \theta_2)] - F_{Dy}$$

$$R_{Dy} = \frac{604,091 \cdot 50 \cdot 250}{1} (1,206 - 1 \cdot 0,3 \cdot 0,386) \cdot 10^{-3} - 6712,576 = 1519,674 \text{ N}$$

$$R_D = \sqrt{R_{Dx}^2 + R_{Dy}^2} = \sqrt{6084,471^2 + 1519,674^2} = 6271,397 \text{ N}$$

6.3. EMBRAGUES Y FRENOS DE CINTA

Los embragues y frenos de cinta consisten en dispositivos en los que el acoplamiento se produce mediante una cinta –o banda– que se abraza alrededor del tambor, como se muestra en la Figura 6.6. La distribución de presiones se puede obtener a partir de la condición de equilibrio de fuerzas sobre el elemento de cinta, que también se muestra en la figura. Si P es la tensión en la banda y f el coeficiente de fricción, la condición de equilibrio de fuerzas horizontales establece que:

$$(P + dP) \cos \frac{d\theta}{2} - P \cos \frac{d\theta}{2} - f dN = 0$$

$$dP = f dN$$

mientras que, por la condición de equilibrio de fuerzas verticales, se tiene:

$$dN = (P + dP) \sin \frac{d\theta}{2} + P \sin \frac{d\theta}{2} = 2P \sin \frac{d\theta}{2} = P d\theta$$

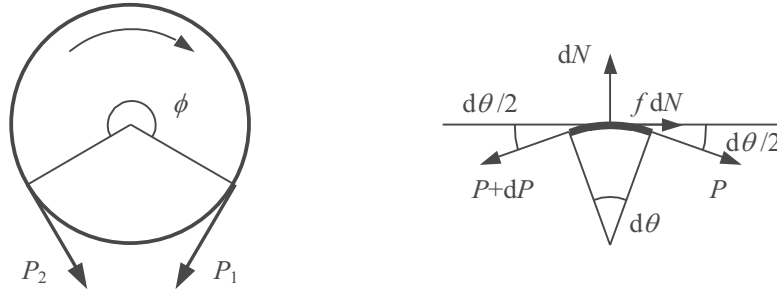


Figura 6.6. Embrague o freno de cinta y equilibrio de fuerzas.

Eliminando dN entre ambas ecuaciones, se obtiene:

$$\frac{dP}{P} = f d\theta$$

e, integrando,

$$\ln \frac{P_2}{P_1} = f(\theta_2 - \theta_1) = f\phi$$

$$P_2 = P_1 e^{f\phi}$$

donde P_1 y P_2 son las tensiones a ambos lados de la banda (con $P_2 > P_1$, lo que significa que P_2 es la que tiene sentido contrario al de la velocidad tangencial del tambor y P_1 la que tiene el mismo sentido) y ϕ el ángulo abrazado por ella.

La distribución de presiones se puede obtener a partir de las ecuaciones anteriores. Si b es el ancho de la banda y r el radio del tambor, se tiene:

$$dN = pbr d\theta = P d\theta$$

$$p = \frac{P}{br}$$

es decir, la presión en un punto es proporcional a la tensión en la banda, en ese punto. En consecuencia, la presión máxima será:

$$p_a = \frac{P_2}{br}$$

y por tanto, el valor límite de la tensión en la banda:

$$P_{2\text{lim}} = brp_{\text{lim}}$$

El par de frenado es sumamente sencillo de calcular en este caso, pues tendrá que ser igual al momento de las tensiones a ambos lados de la cinta:

$$T = (P_2 - P_1)r$$

La capacidad de frenado será el par de frenado para el valor de $P_{2\text{lim}}$:

$$T_{\text{max}} = (P_{2\text{lim}} - P_{2\text{lim}}e^{-f\phi})r = br^2 p_{\text{lim}}(1 - e^{-f\phi})$$

En el caso más sencillo, la fuerza que acciona el freno será P_1 o P_2 (la otra será una reacción en algún apoyo fijado a la bancada), y su relación con la presión máxima p_a se puede deducir inmediatamente de las ecuaciones anteriores. Puede ser también que el freno se accione mediante un mecanismo, en cuyo caso la relación de la fuerza con la presión máxima dependerá de la dinámica de éste. El ejemplo 6.2 muestra un caso de accionamiento mediante un mecanismo de palanca.

EJEMPLO 6.2

Un freno de cinta se acciona mediante el mecanismo representado en la Figura 6.7, en la que todas las dimensiones están expresadas en mm. El radio del tambor es de 250 mm, el ancho de la cinta 20 mm, el coeficiente de fricción 0,2 y la presión límite en la cinta 200 kPa. Determinar la capacidad de frenado y el valor de la fuerza de accionamiento.

SOLUCIÓN

Por el sentido de giro del tambor, la tensión máxima P_2 se presentará en el ramal izquierdo de la cinta, y la mínima P_1 en el derecho. Evidentemente, la correa tirará de la palanca con dos fuerzas iguales y de sentido opuesto a P_1 y P_2 , y como el momento respecto de la articulación ha de ser igual a cero, se tiene:

$$F(250 + 500) = [(P_1 + P_2)\cos\alpha] \cdot 250$$

donde α es el ángulo representado en la Figura 6.7, que vale:

$$\alpha = \frac{240 - 180}{2} = 30^\circ$$

de manera que, por un lado, se tiene:

$$P_1 + P_2 = \frac{250 + 500}{250\cos 30} F = 2\sqrt{3}F$$

y por otro, P_1 y P_2 están relacionados por:

$$P_2 = P_1 e^{f\phi}$$

En consecuencia, combinando ambas ecuaciones,

$$P_1 + P_2 = P_1(1 + e^{f\phi}) = 2\sqrt{3}F$$

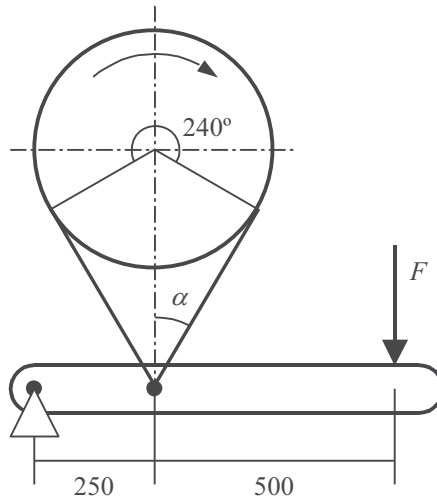


Figura 6.7. Freno de cinta accionado por mecanismo de palanca.

y por lo tanto:

$$P_1 = \frac{2\sqrt{3}F}{(1 + e^{\phi})} = \frac{2\sqrt{3}}{\left(1 + e^{0,2\frac{4\pi}{3}}\right)} F = 1,046F$$

y también:

$$P_2 = 2\sqrt{3}F - P_1 = (2\sqrt{3} - 1,046)F = 2,418F$$

El valor límite de la tensión en la banda viene dado por:

$$P_{2\text{lim}} = brp_{\text{lim}} = 20 \cdot 250 \cdot 0,200 = 1000 \text{ N}$$

por consiguiente, el valor de la fuerza de accionamiento debe ser:

$$F = \frac{P_{2\text{lim}}}{2,418} = \frac{1000}{2,418} = 413,565 \text{ N}$$

y la capacidad de frenado:

$$T = (P_2 - P_1)r = (2,418 - 1,046)Fr = (2,418 - 1,046) \cdot 413,565 \cdot 0,250 = 141,853 \text{ N} \cdot \text{m}$$

6.4. EMBRAGUES Y FRENOS DE DISCO

Los embragues y frenos de disco son de los llamados de conexión axial, es decir, que el movimiento que se produce para accionar el acoplamiento tiene la dirección de los ejes que acopla. Consisten en uno o más pares de discos, que transmiten el movimiento –o lo detienen– cuando entran en contacto, por efecto de la fricción. Presentan algunas ventajas destacables, como la eliminación de efectos centrífugos, un tamaño pequeño en relación a la superficie de fricción que proporcionan, una mayor superficie de disipación del calor y una distribución de presiones favorable.

Cuando los discos son nuevos –y en principio perfectamente planos– se puede suponer que la fuerza de accionamiento se absorbe de manera uniforme a lo largo de toda la superficie de fricción, de manera que la presión será igual en todos los puntos de la misma. Aunque ello no es estrictamente cierto, dado que los discos nunca serán perfectamente planos ni su rigidez infinita, constituye, no obstante, una aproximación muy razonable. Sin embargo, esta situación durará poco tiempo, pues los puntos con mayor deslizamiento relativo (que serán los más próximos al diámetro exterior) se desgastarán más deprisa, los discos perderán planitud, y dichos puntos extremos terminarán sometidos a presiones menores que los puntos más cercanos al centro. Este proceso continuará hasta el momento en que se alcance una distribución de presiones para la cual el desgaste sea uniforme en todos los puntos de la superficie, y a partir de aquí, la distribución de presiones no se alterará. En definitiva, se puede afirmar que:

En embragues y frenos de discos nuevos, es aceptable la hipótesis de distribución de presiones uniforme en la superficie de los discos. Cuando los discos están rodados, la distribución de presiones será tal que el desgaste en todos los puntos de las superficies de los discos sea uniforme.

Durante el proceso de rodaje se tendrá una distribución de presiones intermedia entre ambas, tanto más parecida a la de desgaste uniforme cuanto más rodados están los discos, y viceversa.

A continuación, se obtendrán las relaciones entre la presión máxima, el par de acoplamiento y la fuerza de accionamiento, bajo ambas hipótesis de distribución de presiones.

a) Hipótesis de presión uniforme

Si la presión es uniforme en toda la superficie de fricción, la presión máxima p_a se alcanza en cualquiera de sus puntos, y su relación con la fuerza de accionamiento es:

$$F = \frac{\pi p_a}{4} (D^2 - d^2)$$

donde D y d son los diámetros exterior e interior del disco, respectivamente. F , obviamente, es la fuerza que presiona un disco contra otro, y coincide con la fuerza de accionamiento F_{acc} si solamente hay un par de discos y actúa directamente sobre ellos. En caso contrario,

la relación entre la fuerza de accionamiento F_{acc} y la fuerza sobre cada par dependerá de la disposición constructiva del mecanismo de accionamiento. Podría ocurrir, incluso, en el caso de varios pares de superficies, que el mecanismo de accionamiento indujera una fuerza de apriete diferente en cada par, en cuyo caso cada par habría de estudiarse por separado.

El par de accionamiento sería el momento de las fuerzas de fricción, es decir,

$$T = \int_{d/2}^{D/2} r f dN = \int_{d/2}^{D/2} r f p_a 2\pi r dr = \frac{\pi f p_a}{12} (D^3 - d^3)$$

que coincidiría con la capacidad de frenado, si p_a fuera igual a la presión límite.

Eliminando p_a con las dos ecuaciones anteriores, se puede encontrar la siguiente relación entre la fuerza de accionamiento del par de discos y el par de accionamiento:

$$T = \frac{Ff}{3} \frac{D^3 - d^3}{D^2 - d^2}$$

En el caso de N pares de superficies de fricción, si la fuerza de apriete es la misma en todos, se cumple:

$$T = N \frac{\pi f p_a}{12} (D^3 - d^3) = N \frac{Ff}{3} \frac{D^3 - d^3}{D^2 - d^2}$$

b) Hipótesis de desgaste uniforme

El desgaste δ es proporcional al trabajo de las fuerzas de rozamiento por unidad de superficie, por tanto:

$$\delta = K \frac{(f dN)(r\omega t)}{d\Omega} = K \frac{(fp d\Omega)(r\omega t)}{d\Omega} = K f p r \omega t$$

Que el desgaste sea uniforme significa que el desgaste por unidad de tiempo tiene que ser igual en todos los puntos de la superficie, en consecuencia:

$$\frac{d\delta}{dt} = K f p r \omega = \text{cte}$$

de donde se deduce:

$$pr = \text{cte}$$

La presión máxima se producirá en el radio mínimo (interior), y se tiene:

$$p(r) = \frac{d}{2r} p_a$$

La fuerza de accionamiento (sobre cada par) ha de ser igual a la resultante de los esfuerzos normales sobre la superficie del disco, de manera que se ha de cumplir: