

Índice

1. La experiencia del azar	1
1.1. El concepto de azar	1
1.2. La idea de probabilidad	4
2. El modelo matemático de la probabilidad	11
2.1. Introducción	11
2.2. Espacio muestral y sucesos	11
2.3. El concepto de probabilidad	15
2.4. Primeras propiedades de la probabilidad	20
3. La asignación de probabilidades	25
3.1. Introducción	25
3.2. La regla de Laplace	25
3.3. Métodos combinatorios	32
3.4. La concordancia entre el modelo y la realidad	37
4. Las fórmulas de inclusión - exclusión	45
4.1. Introducción	45
4.2. Probabilidad de una unión de sucesos	46
4.3. * Probabilidad de que se realicen m sucesos	53
5. Extensiones del modelo matemático	61
5.1. Introducción	61
5.2. Espacios muestrales numerables	61
5.3. Propiedades adicionales de la probabilidad	64
5.4. Modelos continuos	72
Tabla 1: Distribución Normal(0,1)	81

6. Probabilidad condicionada	87
6.1. Introducción	87
6.2. Probabilidad condicionada	87
6.3. Propiedades	95
6.4. El método recurrente	100
7. Independencia de sucesos	109
7.1. Sucesos dependientes e independientes	109
7.2. Espacios producto	113
7.3. Independencia de varios sucesos	120
7.4. * La independencia condicional	125
8. Variables aleatorias	133
8.1. El concepto de variable aleatoria	133
8.2. Distribución de una variable aleatoria	138
8.3. Variables aleatorias simultáneas	147
8.4. Variables aleatorias independientes	157
9. Esperanza matemática	163
9.1. Valor esperado de una variable aleatoria	163
9.2. Propiedades de la esperanza matemática	171
9.3. Esperanza condicionada y métodos recurrentes	177
10. Análisis descriptivo de las distribuciones de probabilidad	189
10.1. Introducción	189
10.2. Momentos de una distribución	190
10.3. Momentos de una distribución conjunta	200
10.4. Otros indicadores de posición y dispersión	206
10.4.1. Indicadores de posición	206
10.4.2. Indicadores de dispersión	210
10.5. * Función generatriz	213
11. Pruebas repetidas	221
11.1. Introducción	221
11.2. La distribución binomial y la aproximación de Poisson	222
11.3. La aproximación normal a la distribución binomial	226
11.4. La ley débil de los grandes números	236
11.5. * La ley fuerte de los grandes números	241

12.* Las fluctuaciones del azar	257
12.1. Introducción	257
12.2. El principio de reflexión y la máxima ganancia	260
12.3. El tiempo hasta lograr una fortuna	265
12.4. El número de empates	271
12.5. El último empate y la ley del arco seno	276
Apéndice I. Combinatoria	283
I.1. Principios generales	283
I.2. Los patrones más usuales	288
I.2.1. Ordenaciones	288
I.2.2. Subconjuntos ordenados	291
I.2.3. Subconjuntos	294
I.2.4. Repartos	297
I.3. Identidades combinatorias	301
I.4. La fórmula de Stirling	306
Apéndice II. Solución de los ejercicios	313
Capítulo 2	313
Capítulo 3	320
Capítulo 4	346
Capítulo 5	356
Capítulo 6	360
Capítulo 7	386
Capítulo 8	403
Capítulo 9	431
Capítulo 10	448
Capítulo 11	474
Capítulo 12	495
Apéndice I	506
Apéndice III. Aspectos históricos	517
Índice alfabético	527

Ley fuerte de los grandes números: Si $I_1, I_2, \dots, I_i \dots$ es una sucesión de variables aleatorias independientes, con la misma distribución de media μ y con momento de cuarto orden finito, $\mu_4 = E[(I_i - \mu)^4]$, se verifica

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I_i \longrightarrow \mu \quad \text{casi seguro.}$$

Es decir, $P\{X_n/n \longrightarrow \mu\} = 1$.

Por supuesto, en el caso de una sucesión de variables de Bernouilli, cada sumando I_i tiene media p y momento de cuarto orden finito (exactamente, $\mu_4 = p - 4p^2 + 6p^3 - 3p^4$). El resultado anterior establece pues, en particular, la ley de estabilización de las frecuencias: *Al repetir indefinidamente un experimento aleatorio, la frecuencia, X_n/n , con que se presenta un suceso A de probabilidad p , cumple*

$$\frac{X_n}{n} \longrightarrow p \quad \text{con probabilidad 1.}$$

Demostración: Sea $J_i = I_i - \mu$, $X_n = \sum_{i=1}^n I_i$ e $Y_n = \sum_{i=1}^n J_i = X_n - n\mu$. Fijado $k \in \mathbb{N}$, sea A_n el suceso definido por la condición

$$\left| \frac{X_n}{n} - \mu \right| > \frac{1}{k}.$$

Según la desigualdad (10.6) (con $r = 4$), se cumple

$$P(A_n) = P\left\{|Y_n| > \frac{n}{k}\right\} \leq \frac{k^4 E[Y_n^4]}{n^4}.$$

Ahora bien

$$Y_n^4 = \sum_{i=1}^n J_i^4 + 4 \sum_{i \neq j} J_i^3 J_j + 3 \sum_{i \neq j} J_i^2 J_j^2 + 6 \sum_{i \neq j \neq k} J_i^2 J_j J_k + \sum_{i \neq j \neq k \neq l} J_i J_j J_k J_l.$$

Como las variables J_i son independientes y con $E[J_i] = 0$, se tiene

$$E\left[\sum_{i \neq j} J_i^3 J_j\right] = \sum_{i \neq j} E[J_i^3] E[J_j] = 0$$

y, de la misma manera, se anulan las esperanzas de los dos últimos sumandos. Por otra parte

$$E\left[\sum_{i=1}^n J_i^4\right] = n \mu_4 \quad \text{y} \quad E\left[3 \sum_{i \neq j} J_i^2 J_j^2\right] = 3n(n-1)\sigma^4.$$

Luego

$$E[Y_n^4] = n\mu_4 + 3n(n-1)\sigma^4$$

y resulta

$$P(A_n) \leq \frac{nk^4\mu_4 + 3n(n-1)k^4\sigma^4}{n^4} < \frac{k^4\mu_4}{n^3} + \frac{3k^4\sigma^4}{n^2}.$$

Entonces, la serie de término general $P(A_n)$ es convergente y el lema de Borel-Cantelli indica que hay probabilidad cero de que ocurran un número infinito de sucesos A_n . Es decir, con probabilidad 1, existe un n_0 a partir del cual no se cumple ningún A_n . Dicho de otro modo:

$$\forall k \in \mathcal{N} \quad P \left\{ \exists n_0 \in \mathcal{N} \text{ tal que } \forall n \geq n_0 \text{ es } \left| \frac{X_n}{n} - \mu \right| < \frac{1}{k} \right\} = 1 \quad (11.9)$$

lo cual equivale³ a

$$P \left\{ \forall k \in \mathcal{N} \quad \exists n_0 \in \mathcal{N} \text{ tal que } \forall n \geq n_0 \text{ es } \left| \frac{X_n}{n} - \mu \right| < \frac{1}{k} \right\} = 1.$$

La convergencia de X_n/n a μ se produce, pues, con probabilidad 1.

Si se repasa la última parte de la demostración anterior, puede observarse que el suceso

$$B_{n_0} = \left\{ \forall n \geq n_0 \text{ se cumple } \left| \frac{X_n}{n} - \mu \right| < \frac{1}{k} \right\}$$

crece a medida que n_0 aumenta. Entonces, según (5.5), la conclusión (11.9) se puede expresar

$$\forall k \in \mathcal{N} \quad \lim_{n_0 \rightarrow \infty} P \left\{ \forall n \geq n_0 \text{ se cumple } \left| \frac{X_n}{n} - \mu \right| < \frac{1}{k} \right\} = 1.$$

La comparación con (11.6) muestra con claridad la diferencia entre las afirmaciones de la ley fuerte y de la ley débil. Allí se concluye que, cuando n crece, se hace muy próxima a 1 la probabilidad de que el promedio X_n/n se diferencie poco de μ . La ley fuerte, en cambio, asegura que se hace próxima a 1, la probabilidad de que el promedio X_n/n se diferencie poco de μ , no sólo en el instante n , sino en cualquier momento posterior.

³ Si $B_k = \left\{ \exists n_0 \in \mathcal{N} \text{ tal que } \forall n \geq n_0 \text{ es } \left| \frac{X_n}{n} - \mu \right| < \frac{1}{k} \right\}$, el razonamiento final del ejemplo 11.11 prueba que

$$P \left(\bigcap_{k=1}^{\infty} B_k \right) = 1.$$

Ejemplo 11.12

La ley fuerte de los grandes números tiene algunas aplicaciones sorprendentes; una de ellas es el *teorema de los números normales de Borel*.

Supongamos que se elige al azar un número real, x , en el intervalo $(0, 1)$. Es decir, como se indicó en el ejemplo 5.9, el sorteo se realiza con densidad uniforme sobre $(0, 1)$; de manera que cada subintervalo tiene probabilidad igual a su longitud.

Si se escribe la expresión decimal del número obtenido:

$$x = 0' x_1 x_2 x_3 \dots x_n \dots$$

cada cifra es un número aleatorio escogido entre los dígitos 0 y 9.

La primera cifra, x_1 toma cada valor posible $i = 0, 1, \dots, 9$ en el intervalo

$$\left[\frac{i}{10}, \frac{i+1}{10} \right)$$

es decir todos ellos con la misma probabilidad, $1/10$. La segunda cifra, x_2 , vale 4 si x está en el conjunto

$$[0'04, 0'05) \cup [0'14, 0'15) \cup \dots \cup [0'94, 0'95)$$

de longitud $1/10$. De manera que toma el valor 4, o cualquier otro valor posible, con probabilidad $1/10$. En general, todas las cifras del desarrollo decimal de x son dígitos escogidos al azar entre $0, 1, 2, \dots, 9$.

Además, las distintas cifras son independientes entre sí. Por ejemplo, el suceso $\{x_1 = 4\} \cap \{x_2 = 7\}$ se produce en el intervalo $[0'47, 0'48)$ de longitud $1/100$. Y lo mismo ocurre con cualquier combinación de valores; es decir

$$P\{x_1 = i, x_2 = j\} = \frac{1}{100} = P\{x_1 = i\} P\{x_2 = j\}.$$

De la misma manera, $\{x_1 = 3, x_2 = 0, x_3 = 6\} = [0'306, 0'307)$ tiene probabilidad $1/1000$, que no cambia por variar los tres dígitos elegidos. Luego

$$P\{x_1 = i, x_2 = j, x_3 = k\} = \frac{1}{1000} = P\{x_1 = i\} P\{x_2 = j\} P\{x_3 = k\}$$

y así sucesivamente para cualquier número de cifras del desarrollo.

En definitiva, escoger un número al azar en $(0, 1)$ y observar las sucesivas cifras de su desarrollo decimal es un experimento aleatorio idéntico a realizar extracciones sucesivas, con remplazamiento, de una urna que contiene diez tarjetas numeradas de 0 a 9.

Según esto, fijado un dígito cualquiera —por ejemplo 6— es $1/10$ la probabilidad de que cada cifra decimal sea un 6. En virtud de la ley fuerte de los grandes números, la frecuencia de seises que aparecen en el desarrollo decimal de x debe converger a $1/10$, con probabilidad 1. Es decir que, salvo en un subconjunto de probabilidad

cero, todos los números del intervalo $(0, 1)$ presentan, a la larga, una frecuencia de seises igual a $1/10$ en su desarrollo decimal; lo mismo que de cualquier otro dígito. Borel llamó *normales* a los números reales que presentan, en su desarrollo decimal, proporción $1/10$ de cada uno de los diez dígitos. La conclusión anterior indica entonces que “prácticamente todos” los números del intervalo $(0, 1)$ son normales, puesto que al escoger uno de ellos al azar, hay probabilidad 1 de obtener un número *normal*.

Es curioso observar que, en los cálculos prácticos, sólo se utilizan números racionales con un número finito de cifras significativas (seguidas de ceros) ninguno de los cuales es un número normal.

Tal y como ha sido formulada, la ley fuerte de los grandes números es susceptible de mejoras importantes. Kolmogorov consiguió demostrar que para obtener la convergencia casi segura de X_n/n hacia μ , no hace falta suponer que los sumandos tienen momento finito de cuarto orden, sino sólo que la media μ es finita. Puede probarse que dicha condición, además de suficiente, es necesaria; de manera que la existencia de esperanza matemática finita para una variable aleatoria es equivalente a que ésta pueda ser aproximada mediante los promedios estadísticos, X_n/n , obtenidos a partir de n observaciones independientes de la variable.

Los argumentos de Kolmogorov son demasiado complejos para figurar en este texto. Sin embargo, el siguiente ejemplo muestra como puede emplearse la ley fuerte establecida para el análisis de situaciones en las que no se cumplen sus hipótesis. Además, de paso, quedará resuelta una pequeña cuestión pendiente en relación con la paradoja de San Petersburgo.

Ejemplo 11.13

En el juego de San Petersburgo el jugador lanza una moneda hasta que obtiene la primera cara y recibe 2^n euros si ha realizado n lanzamientos. La variable aleatoria que expresa la ganancia es entonces

$$I = 2^r \quad \text{con probabilidad} \quad 1/2^r \quad \text{para } r = 1, 2, 3, \dots$$

y, como se puso de manifiesto en el ejemplo 9.5,

$$E[I] = \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \frac{1}{2^n} = \infty.$$

En tal situación, la ley fuerte de los grandes números no es aplicable, ni siquiera en la versión más depurada que se ha citado en las líneas anteriores. Pero todavía se puede saber qué ocurrirá con la ganancia media por partida obtenida por el jugador. En efecto, imagínese que el casino, con vistas a hacer el juego más viable, añade la regla siguiente: si el jugador no ha obtenido cara al cabo de N lanzamientos, el juego se suspende sin ningún beneficio para el jugador.