Índice

Ley fuerte de los grandes números: *Si $I_1, I_2, \ldots, I_i \ldots$ es una sucesión de variables aleatorias independientes, con la misma distribución de media μ y con momento de cuarto orden finito, $\mu_4 = \mathrm{E}[(I_i-\mu)^4]$, se verifica*

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} I_i \longrightarrow \mu \qquad \textit{casi seguro.}$$

Es decir, $\mathrm{P}\{X_n/n \longrightarrow \mu\} = 1$.

Por supuesto, en el caso de una sucesión de variables de Bernouilli, cada sumando I_i tiene media p y momento de cuarto orden finito (exactamente, $\mu_4 = p - 4p^2 + 6p^3 - 3p^4$). El resultado anterior establece pues, en particular, la ley de estabilización de las frecuencias: *Al repetir indefinidamente un experimento aleatorio, la frecuencia, X_n/n, con que se presenta un suceso A de probabilidad p, cumple*

$$\frac{X_n}{n} \longrightarrow p \qquad \textit{con probabilidad 1.}$$

Demostración: Sea $J_i = I_i - \mu$, $X_n = \sum_{i=1}^n I_i$ e $Y_n = \sum_{i=1}^n J_i = X_n - n\mu$. Fijado $k \in I\!N$, sea A_n el suceso definido por la condición

$$\left|\frac{X_n}{n} - \mu\right| > \frac{1}{k}\,.$$

Según la desigualdad (10.6) (con $r = 4$), se cumple

$$\mathrm{P}(A_n) = \mathrm{P}\left\{|Y_n| > \frac{n}{k}\right\} \le \frac{k^4\,\mathrm{E}[Y_n^4]}{n^4}\,.$$

Ahora bien

$$Y_n^4 = \sum_{i=1}^{n} J_i^4 + 4\sum_{i\neq j} J_i^3 J_j + 3\sum_{i\neq j} J_i^2 J_j^2 + 6\sum_{i\neq j\neq k} J_i^2 J_j J_k + \sum_{i\neq j\neq k\neq l} J_i J_j J_k J_l.$$

Como las variables J_i son independientes y con $\mathrm{E}[J_i] = 0$, se tiene

$$\mathrm{E}\left[\sum_{i\neq j} J_i^3 J_j\right] = \sum_{i\neq j} \mathrm{E}[J_i^3]\,\mathrm{E}[J_j] = 0$$

y, de la misma manera, se anulan las esperanzas de los dos últimos sumandos. Por otra parte

$$\mathrm{E}\left[\sum_{i=1}^{n} J_i^4\right] = n\,\mu_4 \qquad \text{y} \qquad \mathrm{E}\left[3\sum_{i\neq j} J_i^2 J_j^2\right] = 3n(n-1)\sigma^4.$$

Luego

$$\mathrm{E}[Y_n^4] = n\mu_4 + 3n(n-1)\sigma^4$$

y resulta

$$\mathrm{P}(A_n) \leq \frac{nk^4\mu_4 + 3n(n-1)k^4\sigma^4}{n^4} < \frac{k^4\mu_4}{n^3} + \frac{3k^4\sigma^4}{n^2}\,.$$

Entonces, la serie de término general $\mathrm{P}(A_n)$ es convergente y el lema de Borel-Cantelli indica que hay probabilidad cero de que ocurran un número infinito de sucesos A_n. Es decir, con probabilidad 1, existe un n_0 a partir del cual no se cumple ningún A_n. Dicho de otro modo:

$$\forall k \in I\!N \quad \mathrm{P}\left\{\exists n_0 \in I\!N \text{ tal que } \forall n \geq n_0 \text{ es } \left|\frac{X_n}{n} - \mu\right| < \frac{1}{k}\right\} = 1 \tag{11.9}$$

lo cual equivale[3] a

$$\mathrm{P}\left\{\forall k \in I\!N \;\; \exists n_0 \in I\!N \text{ tal que } \forall n \geq n_0 \text{ es } \left|\frac{X_n}{n} - \mu\right| < \frac{1}{k}\right\} = 1.$$

La convergencia de X_n/n a μ se produce, pues, con probabilidad 1.

Si se repasa la última parte de la demostración anterior, puede observarse que el suceso

$$B_{n_0} = \left\{\forall n \geq n_0 \text{ se cumple } \left|\frac{X_n}{n} - \mu\right| < \frac{1}{k}\right\}$$

crece a medida que n_0 aumenta. Entonces, según (5.5), la conclusión (11.9) se puede expresar

$$\forall k \in I\!N \qquad \lim_{n_0\to\infty} \mathrm{P}\left\{\forall n \geq n_0 \text{ se cumple } \left|\frac{X_n}{n} - \mu\right| < \frac{1}{k}\right\} = 1.$$

La comparación con (11.6) muestra con claridad la diferencia entre las afirmaciones de la ley fuerte y de la ley débil. Allí se concluye que, cuando n crece, se hace muy próxima a 1 la probabilidad de que el promedio X_n/n se diferencie poco de μ. La ley fuerte, en cambio, asegura que se hace próxima a 1, la probabilidad de que el promedio X_n/n se diferencie poco de μ, no sólo en el instante n, sino en cualquier momento posterior.

[3] Si $B_k = \left\{\exists n_0 \in I\!N \text{ tal que } \forall n \geq n_0 \text{ es } \left|\frac{X_n}{n} - \mu\right| < \frac{1}{k}\right\}$, el razonamiento final del ejemplo 11.11 prueba que

$$\mathrm{P}\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} B_k\right) = 1.$$

Ejemplo 11.12

La ley fuerte de los grandes números tiene algunas aplicaciones sorprendentes; una de ellas es el *teorema de los números normales de Borel.*

Supongamos que se elige al azar un número real, x, en el intervalo $(0,1)$. Es decir, como se indicó en el ejemplo 5.9, el sorteo se realiza con densidad uniforme sobre $(0,1)$; de manera que cada subintervalo tiene probabilidad igual a su longitud.

Si se escribe la expresión decimal del número obtenido:

$$x = 0'\, x_1\, x_2\, x_3 \ldots\ldots x_n \ldots$$

cada cifra es un número aleatorio escogido entre los dígitos 0 y 9.

La primera cifra, x_1 toma cada valor posible $i = 0, 1, \ldots, 9$ en el intervalo

$$\left[\frac{i}{10}, \frac{i+1}{10}\right)$$

es decir todos ellos con la misma probabilidad, $1/10$. La segunda cifra, x_2, vale 4 si x está en el conjunto

$$[0'04, 0'05) \cup [0'14, 0'15) \cup \ldots \cup [0'94, 0'95)$$

de longitud $1/10$. De manera que toma el valor 4, o cualquier otro valor posible, con probabilidad $1/10$. En general, todas las cifras del desarrollo decimal de x son dígitos escogidos al azar entre $0, 1, 2, \ldots, 9$.

Además, las distintas cifras son independientes entre sí. Por ejemplo, el suceso $\{x_1 = 4\} \cap \{x_2 = 7\}$ se produce en el intervalo $[0'47, 0'48)$ de longitud $1/100$. Y lo mismo ocurre con cualquier combinación de valores; es decir

$$\mathrm{P}\{x_1 = i, x_2 = j\} = \frac{1}{100} = \mathrm{P}\{x_1 = i\}\, \mathrm{P}\{x_2 = j\}.$$

De la misma manera, $\{x_1 = 3, x_2 = 0, x_3 = 6\} = [0'306, 0'307)$ tiene probabilidad $1/1000$, que no cambia por variar los tres dígitos elegidos. Luego

$$\mathrm{P}\{x_1 = i, x_2 = j, x_3 = k\} = \frac{1}{1000} = \mathrm{P}\{x_1 = i\}\, \mathrm{P}\{x_2 = j\}\, \mathrm{P}\{x_3 = k\}$$

y así sucesivamente para cualquier número de cifras del desarrollo.

En definitiva, escoger un número al azar en $(0,1)$ y observar las sucesivas cifras de su desarrollo decimal es un experimento aleatorio idéntico a realizar extracciones sucesivas, con remplazamiento, de una urna que contiene diez tarjetas numeradas de 0 a 9.

Según esto, fijado un dígito cualquiera —por ejemplo 6— es $1/10$ la probabilidad de que cada cifra decimal sea un 6. En virtud de la ley fuerte de los grandes números, la frecuencia de seises que aparecen en el desarrollo decimal de x debe converger a $1/10$, con probabilidad 1. Es decir que, salvo en un subconjunto de probabilidad

cero, todos los números del intervalo $(0,1)$ presentan, a la larga, una frecuencia de seises igual a $1/10$ en su desarrollo decimal; lo mismo que de cualquier otro dígito. Borel llamó *normales* a los números reales que presentan, en su desarrollo decimal, proporción $1/10$ de cada uno de los diez dígitos. La conclusión anterior indica entonces que "prácticamente todos" los números del intervalo $(0,1)$ son normales, puesto que al escoger uno de ellos al azar, hay probabilidad 1 de obtener un número *normal*.
Es curioso observar que, en los cálculos prácticos, sólo se utilizan números racionales con un número finito de cifras significativas (seguidas de ceros) ninguno de los cuales es un número normal.

Tal y como ha sido formulada, la ley fuerte de los grandes números es susceptible de mejoras importantes. Kolmogorov consiguió demostrar que para obtener la convergencia casi segura de X_n/n hacia μ, no hace falta suponer que los sumandos tienen momento finito de cuarto orden, sino sólo que la media μ es finita. Puede probarse que dicha condición, además de suficiente, es necesaria; de manera que la existencia de esperanza matemática finita para una variable aleatoria es equivalente a que ésta pueda ser aproximada mediante los promedios estadísticos, X_n/n, obtenidos a partir de n observaciones independientes de la variable.

Los argumentos de Kolmogorov son demasiado complejos para figurar en este texto. Sin embargo, el siguiente ejemplo muestra como puede emplearse la ley fuerte establecida para el análisis de situaciones en las que no se cumplen sus hipótesis. Además, de paso, quedará resuelta una pequeña cuestión pendiente en relación con la paradoja de San Petersburgo.

Ejemplo 11.13

En el juego de San Petersburgo el jugador lanza una moneda hasta que obtiene la primera cara y recibe 2^n euros si ha realizado n lanzamientos. La variable aleatoria que expresa la ganancia es entonces

$$I = 2^r \quad \text{con probabilidad} \quad 1/2^r \qquad \text{para } r = 1, 2, 3, \ldots$$

y, como se puso de manifiesto en el ejemplo 9.5,

$$\mathrm{E}[I] = \sum_{n=1}^{\infty} 2^r \, \frac{1}{2^r} = \infty.$$

En tal situación, la ley fuerte de los grandes números no es aplicable, ni siquiera en la versión más depurada que se ha citado en las líneas anteriores. Pero todavía se puede saber qué ocurrirá con la ganancia media por partida obtenida por el jugador. En efecto, imagínese que el casino, con vistas a hacer el juego más viable, añade la regla siguiente: si el jugador no ha obtenido cara al cabo de N lanzamientos, el juego se suspende sin ningún beneficio para el jugador.