Índice

1.6. Las dificultades del caso T no numerable

Las dificultades en relación con los procesos estocásticos en tiempo continuo –o simplemente no numerable– tienen su origen en el siguiente hecho.

Lema 1.6 *Si T es no numerable, cualquier conjunto A de la σ-álgebra producto $\mathcal{E}^T$ en E^T es de la forma*

$$A = \{f \in E^T \mid \big(f(t_0), f(t_1), \ldots, f(t_r), \ldots\big) \in B\}$$

para alguna sucesión $\{t_r\}_{r \in \mathbb{N}} \subset T$ y algún conjunto $B \in \mathcal{E}^{\mathbb{N}}$ ([12]).

El enunciado indica que no pertenece a $\mathcal{E}^T$ ningún subconjunto de E^T que imponga condiciones en más de un número numerable de instantes. Pensando en el caso en que T es un intervalo de $\mathbb{R}$ y $(E, \mathcal{E}) = (\mathbb{R}, \mathbb{B})$, no son sucesos de $\mathcal{E}^T$ conjuntos conflictivos tales como

$$\big\{f \in E^T \mid \sup_{t \in [a,b]} f(t) \leq c\big\}, \qquad \big\{f \in E^T \mid \limsup_{t \to a} f(t) \leq c\big\},$$
$$\big\{f \in E^T \mid f \text{ es continua en } a\big\}, \qquad \big\{f \in E^T \mid f(t) \neq c \;\; \forall t \in [a,b]\big\}, \quad \text{etc.}$$

que involucran en su definición más de un número numerable de instantes. Luego, $\sup_{t \in [a,b]} f(t)$, $\limsup_{t \to a} f(t), \ldots$ tampoco son variables aleatorias $\mathcal{E}^T$-medibles. Ahora bien, la distribución $\mathbb{P}$ de cualquier proceso sólo asigna probabilidades a los sucesos de $\mathcal{E}^T$ y permite obtener únicamente la distribución de las variables aleatorias $\mathcal{E}^T$-medibles. Es, expresado en general, lo que ya se ha puesto de relieve en el Ejemplo 1.3.

Básicamente, en el modelo canónico, ocurre que $\Omega = E^T$, formado por <u>todas</u> las funciones de T en E, es demasiado grande y la σ-álgebra $\mathcal{E}^T$ demasiado pequeña para que sea posible hacer afirmaciones probabilísticas sobre conjuntos o variables del tipo indicado. Pero la σ-álgebra $\mathcal{E}^T$ no puede cambiarse sustancialmente, sin perder la ventaja de que la probabilidad esté determinada en ella por las distribuciones finito-dimensionales. Así pues, en el caso sumamente frecuente en que sea necesario referirse a las probabilidades de algunos de estos conjuntos y variables conflictivos, no hay más remedio que confiar en que el proceso estocástico en consideración tenga trayectorias con "cierto grado de regularidad" y que, gracias a ello, sea posible deducir las probabilidades asociadas a ellos a partir de otros que sí pertenecen a $\mathcal{E}^T$.

En consecuencia, el estudio detallado de un proceso estocástico $\{X_t\}_{t \in T}$ en tiempo continuo requiere que:

[12] Véase el Ejercicio 1.3.

(a) exista un conjunto $\mathbb{U} \subset E^T$ de funciones con ciertas "condiciones de regularidad", en el que se considerará la σ-álgebra ([13])

$$\mathcal{E}^T_{\mathbb{U}} = \{\mathbb{U} \cap A \mid A \in \mathcal{E}^T\};$$

(b) el proceso estocástico $\{X_t\}_{t\in T}$ **tenga trayectorias de** $\mathbb{U}$. Es decir, $\mathcal{X}(\Omega) \subset \mathbb{U}$ o, equivalentemente, es medible la aplicación

$$\mathcal{X} : (\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P}) \mapsto (\mathbb{U}, \mathcal{E}^T_{\mathbb{U}}).$$

En tal caso, su distribución será la probabilidad en $(\mathbb{U}, \mathcal{E}^T_{\mathbb{U}})$ dada por

$$I\!\!P_{\mathbb{U}}(U) = \mathrm{P}\{\mathcal{X}^{-1}(U)\} \quad \text{para cada } U \in \mathcal{E}^T_{\mathbb{U}}.$$

$(\mathbb{U}, \mathcal{E}^T_{\mathbb{U}}, I\!\!P_{\mathbb{U}})$ es el **espacio de probabilidad canónico** para los procesos estocásticos con trayectorias en $\mathbb{U}$ y distribución $I\!\!P_{\mathbb{U}}$. En él se define el **representante canónico** de todos ellos mediante $Y_t(f) = f(t)$ para cualquier $f \in \mathbb{U}$ y $t \in T$.

Así por ejemplo, para un proceso estocástico con T un intervalo de $I\!\!R$ y $(E, \mathcal{E}) = (I\!\!R, I\!\!B)$, cuyas trayectorias pertenezcan a $\mathbb{C} = \mathbb{C}(T, E)$, conjunto de las funciones continuas de T en E, puede asegurarse que

$$\{f \in \mathbb{C} \mid \sup_{t\in[a,b]} f(t) \le c\} = \mathbb{C} \cap \{f \in E^T \mid \sup_{t\in[a,b]\cap\mathbb{Q}} f(t) \le c\} \tag{1.7}$$

es un suceso de $\mathcal{E}^T_{\mathbb{C}}$, puesto que el último conjunto del segundo miembro pertenece a $\mathcal{E}^T$. Por consiguiente, está bien definida la probabilidad

$$I\!\!P_{\mathbb{C}}\{\sup_{t\in[a,b]} f(t) \le c\} = I\!\!P\{f \in E^T \mid \sup_{t\in[a,b]\cap\mathbb{Q}} f(t) \le c\}.$$

La misma conclusión puede obtenerse aunque $\mathbb{U}$ sea un conjunto más amplio que $\mathbb{C}$, siempre que se cumpla una igualdad similar a (1.7).

En caso de un proceso estocástico $\{X_t\}_{t\in T}$ explícitamente definido en un espacio de probabilidad concreto, en el que Ω no sea un subconjunto de E^T, será normalmente sencillo apreciar si sus trayectorias cumplen una u otra condición de regularidad. Así, en el Ejemplo 1.1 no cabe duda de que todas las trayectorias son funciones continuas. Análogamente:

Ejemplo 1.6

Sea $\{(\xi_n, \eta_n)\}_{n\in I\!\!N}$ un proceso estocástico en tiempo discreto con espacio de estados $E = (0, \infty) \times I\!\!R$, el cual proporciona dos sucesiones de variables aleatorias:

[13] Véase *CP2* Definición 2.4.

$\xi_n > 0$ y $\eta_n \in \mathbb{R}$. Para concretar puede pensarse que $\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ son variables independientes con distribución exponencial de parámetro 1, mientras que $\{\eta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ son independientes con distribución $\mathcal{N}(0,1)$ y ambas independientes entre sí.
Pero sea cual sea su distribución, sólo con suponer que $\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n$ es divergente, se puede definir el proceso estocástico en tiempo continuo, con $T = [0, \infty)$:

$$X_t = \begin{cases} \eta_1 & \text{si} \quad 0 \leq t < \xi_1 \\ \eta_2 & \text{si} \quad \xi_1 \leq t < \xi_1 + \xi_2 \\ \eta_3 & \text{si} \quad \xi_1 + \xi_2 \leq t < \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 \\ \vdots \end{cases}$$

que permanece en el estado η_n desde el instante $\tau_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i$ hasta antes del instante $\tau_{n+1} = \tau_n + \xi_{n+1}$ y salta en ese momento al estado η_{n+1}.
En principio, $\{X_t\}_{t\geq 0}$ está definido en $(E^{\mathbb{N}}, \mathcal{E}^{\mathbb{N}}, \mathrm{P})$ donde P es la distribución de la sucesión $\{(\xi_n, \eta_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$. Su espacio de estados es $\mathbb{R}$, de forma que su espacio canónico es $(\mathbb{R}^T, \mathbb{B}^T, \mathbb{P})$, donde $\mathbb{P}$ la distribución deducida de P (a través de las distribuciones finito-dimensionales $\mathrm{P}\{X_{t_1} \in B_1, \ldots, X_{t_k} \in B_k\}$). Este espacio canónico es problemático, porque $\mathbb{P}$ no mide la probabilidad de propiedades relevantes de $\{X_t\}_{t\geq 0}$ (como, por ejemplo, $\sup_{t\in[a,b]} X_t \leq c$).
Ahora bien, las trayectorias de $\{X_t\}_{t\geq 0}$ son funciones escalonadas, continuas por la derecha, del tipo representado en la Figura 1.3.

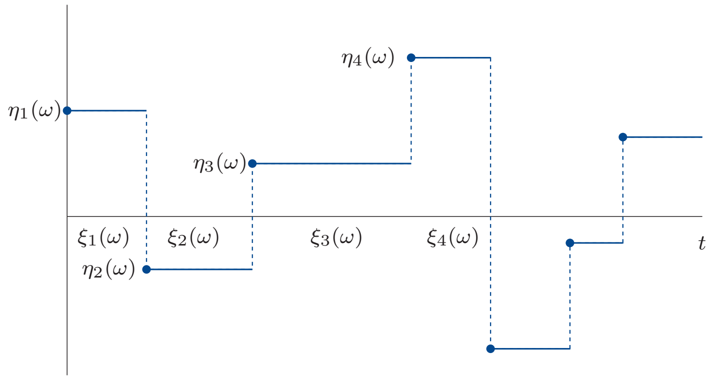

Figura 1.3: Trayectoria típica

Pertenecen por tanto al conjunto

$$\mathbb{D} = \left\{ f \in \mathbb{R}^T \mid \forall t \in T \; f(t+) = f(t) \text{ y existe } f(t-) \right\}$$

lo cual hace posible razonamientos del tipo (1.7) con $\mathbb{C}$ reemplazado por $\mathbb{D}$. Así pues, se puede considerar a $\{X_t\}_{t\geq 0}$ como proceso con trayectorias en $\mathbb{D}$, descrito por el espacio canónico $(\mathbb{D}, \mathbb{B}_{\mathbb{D}}^T, \mathbb{P}_{\mathbb{D}})$, en el que no tienen lugar muchas de las dificultades inherentes a $(\mathbb{R}^T, \mathbb{B}^T, \mathbb{P})$.