

Índice

I	Conceptos Generales	1
1.	Procesos Estocásticos	3
1.1.	Introducción	3
1.2.	Definición de proceso estocástico	4
1.3.	Distribución de un proceso estocástico	6
1.4.	Teorema de Kolmogorov	9
1.5.	Ejemplos iniciales	13
1.6.	Las dificultades del caso T no numerable	22
1.7.	Filtraciones y tiempos de parada	27
1.8.	Regularidad de las trayectorias	30
2.	Procesos Markovianos	39
2.1.	Introducción	39
2.2.	Condición de Markov	40
2.3.	Probabilidades de transición	42
2.4.	Tiempo discreto	45
2.5.	Tiempo continuo	46
2.6.	Condición de Markov fuerte	49
II	Cadenas de Markov	51
3.	Tiempo discreto	53
3.1.	Introducción	53
3.2.	Ejemplos preliminares	54
3.3.	Distribución de una cadena	60
3.3.1.	Probabilidades de transición	60

3.3.2.	Distribución inicial	63
3.3.3.	Distribuciones marginales	64
3.3.4.	Probabilidades de transición en n etapas	64
3.3.5.	Distribuciones finito-dimensionales	73
3.4.	Condición de Markov fuerte	74
3.5.	Distribución de los instantes de llegada	76
3.5.1.	Determinación mediante absorción	77
3.5.2.	Relación con las probabilidades de transición	79
3.5.3.	Probabilidades totales de llegada	80
3.5.4.	Tiempos medios de llegada	83
3.5.5.	Número de visitas a un estado	85
3.5.6.	Ejemplos adicionales	87
3.6.	Clasificación de los estados	94
3.6.1.	Relaciones de comunicación y estructura asociada	95
3.6.2.	Estados recurrentes y transitorios	98
3.6.3.	Estados recurrentes positivos y recurrentes nulos	100
3.6.4.	Absorción	103
3.7.	Excursiones y medidas estacionarias	107
3.7.1.	Distribuciones estacionarias	109
3.7.2.	Ley fuerte de los grandes números	113
3.8.	Periodicidad	116
3.9.	Comportamiento asintótico	120
3.9.1.	Teorema límite cociente	125
3.9.2.	Teorema Central del Límite	128
3.10.	Criterios de clasificación	131
3.11.	Cadenas condicionadas por su final	137
3.12.	Características de las cadenas finitas	142
3.12.1.	Teorema de Perron–Frobenius	142
3.12.2.	Cálculo matricial de π y $e_{i,j}$	144
3.13.	Aplicaciones	145
3.13.1.	Modelo de Ehrenfest	145
3.13.2.	Problemas de parada óptima	153
3.13.3.	Métodos de Monte Carlo con cadenas de Markov	159

4. Tiempo continuo	169
4.1. Definición	169
4.1.1. Distribuciones finito-dimensionales	170
4.1.2. Caracterización de las probabilidades de transición	171
4.1.3. Matrices de transición	173
4.1.4. Condición de Markov fuerte	174
4.2. Propiedades de las funciones de transición	175
4.2.1. Propiedades de comunicación	176
4.2.2. Propiedades analíticas: Matriz infinitesimal	178
4.2.3. Ecuaciones diferenciales de Kolmogorov	186
4.3. Trayectorias de una cadena de Markov	205
4.3.1. Salida de un estado	210
4.3.2. La cadena de saltos	212
4.3.3. Cadenas explosivas	217
4.3.4. Llegada a un estado	220
4.4. Construcción de cadenas a partir de Q	223
4.4.1. La Q -cadena mínima	231
4.4.2. Construcción de Q -funciones regulares	233
4.4.3. Condiciones suficientes para la regularidad	237
4.5. Clasificación de los estados y Teorema límite	247
4.5.1. Distribuciones estacionarias	251
4.5.2. Relación con la matriz infinitesimal Q	253
4.5.3. Determinación de la distribución estacionaria	256
4.5.4. Teoremas ergódicos	264
4.6. Cálculo de valores esperados	268
4.6.1. Ganancia total esperada	269
4.6.2. Ganancia esperada por los estados visitados	273
4.6.3. Ganancia esperada por los saltos	273
4.7. Aplicaciones	274
4.7.1. El proceso de Poisson	274
4.7.2. Procesos de nacimiento y muerte	279
4.7.3. Cola M/M/1	283
4.7.4. Proceso lineal con inmigración	288

III Apéndices	299
A. Teoría de la medida	301
A.1. Funciones medibles	301
A.2. Medida exterior y extensión de una medida	303
A.2.1. Medidas completas	306
A.2.2. Contraejemplos y observaciones	308
A.3. Medidas en un espacio métrico	310
A.4. Demostración del Teorema de Kolmogorov	311
A.5. Diferencia de medidas	313
A.6. Teoremas de Radon-Nikodym y Lebesgue	315
A.7. Medidas en espacios producto	319
B. Probabilidad y esperanza condicionada	325
B.1. Introducción	325
B.2. Esperanza condicionada	328
B.3. Probabilidad condicionada	334
B.4. Independencia condicional	338
C. Ecuaciones recurrentes	341
C.1. Introducción	341
C.2. Ecuación lineal con coeficientes constantes	342
C.3. Ecuación lineal de primer orden	347
C.4. Caso general	348
D. Solución de los ejercicios	351
Capítulo 1	351
Capítulo 2	358
Capítulo 3	360
Capítulo 4	402

1.6. Las dificultades del caso T no numerable

Las dificultades en relación con los procesos estocásticos en tiempo continuo –o simplemente no numerable– tienen su origen en el siguiente hecho.

Lema 1.6 *Si T es no numerable, cualquier conjunto A de la σ -álgebra producto \mathcal{E}^T en E^T es de la forma*

$$A = \{f \in E^T \mid (f(t_0), f(t_1), \dots, f(t_r), \dots) \in B\}$$

para alguna sucesión $\{t_r\}_{r \in \mathbb{N}} \subset T$ y algún conjunto $B \in \mathcal{E}^{\mathbb{N}}$ ⁽¹²⁾.

El enunciado indica que no pertenece a \mathcal{E}^T ningún subconjunto de E^T que imponga condiciones en más de un número numerable de instantes. Pensando en el caso en que T es un intervalo de \mathbb{R} y $(E, \mathcal{E}) = (\mathbb{R}, \mathcal{B})$, no son sucesos de \mathcal{E}^T conjuntos conflictivos tales como

$$\begin{aligned} &\{f \in E^T \mid \sup_{t \in [a, b]} f(t) \leq c\}, && \{f \in E^T \mid \limsup_{t \rightarrow a} f(t) \leq c\}, \\ &\{f \in E^T \mid f \text{ es continua en } a\}, && \{f \in E^T \mid f(t) \neq c \ \forall t \in [a, b]\}, \text{ etc.} \end{aligned}$$

que involucran en su definición más de un número numerable de instantes. Luego, $\sup_{t \in [a, b]} f(t)$, $\limsup_{t \rightarrow a} f(t)$, ... tampoco son variables aleatorias \mathcal{E}^T -medibles. Ahora bien, la distribución \mathbb{P} de cualquier proceso sólo asigna probabilidades a los sucesos de \mathcal{E}^T y permite obtener únicamente la distribución de las variables aleatorias \mathcal{E}^T -medibles. Es, expresado en general, lo que ya se ha puesto de relieve en el Ejemplo 1.3.

Básicamente, en el modelo canónico, ocurre que $\Omega = E^T$, formado por todas las funciones de T en E , es demasiado grande y la σ -álgebra \mathcal{E}^T demasiado pequeña para que sea posible hacer afirmaciones probabilísticas sobre conjuntos o variables del tipo indicado. Pero la σ -álgebra \mathcal{E}^T no puede cambiarse sustancialmente, sin perder la ventaja de que la probabilidad esté determinada en ella por las distribuciones finito-dimensionales. Así pues, en el caso sumamente frecuente en que sea necesario referirse a las probabilidades de algunos de estos conjuntos y variables conflictivos, no hay más remedio que confiar en que el proceso estocástico en consideración tenga trayectorias con “cierto grado de regularidad” y que, gracias a ello, sea posible deducir las probabilidades asociadas a ellos a partir de otros que sí pertenecen a \mathcal{E}^T .

En consecuencia, el estudio detallado de un proceso estocástico $\{X_t\}_{t \in T}$ en tiempo continuo requiere que:

¹² Véase el Ejercicio 1.3.

- (a) exista un conjunto $\mathbb{U} \subset E^T$ de funciones con ciertas “condiciones de regularidad”, en el que se considerará la σ -álgebra ⁽¹³⁾

$$\mathcal{E}_{\mathbb{U}}^T = \{\mathbb{U} \cap A \mid A \in \mathcal{E}^T\};$$

- (b) el proceso estocástico $\{X_t\}_{t \in T}$ **tenga trayectorias de \mathbb{U}** . Es decir, $\mathcal{X}(\Omega) \subset \mathbb{U}$ o, equivalentemente, es medible la aplicación

$$\mathcal{X} : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \mapsto (\mathbb{U}, \mathcal{E}_{\mathbb{U}}^T).$$

En tal caso, su distribución será la probabilidad en $(\mathbb{U}, \mathcal{E}_{\mathbb{U}}^T)$ dada por

$$\mathbb{P}_{\mathbb{U}}(U) = \mathbb{P}\{\mathcal{X}^{-1}(U)\} \quad \text{para cada } U \in \mathcal{E}_{\mathbb{U}}^T.$$

$(\mathbb{U}, \mathcal{E}_{\mathbb{U}}^T, \mathbb{P}_{\mathbb{U}})$ es el **espacio de probabilidad canónico** para los procesos estocásticos con trayectorias en \mathbb{U} y distribución $\mathbb{P}_{\mathbb{U}}$. En él se define el **representante canónico** de todos ellos mediante $Y_t(f) = f(t)$ para cualquier $f \in \mathbb{U}$ y $t \in T$.

Así por ejemplo, para un proceso estocástico con T un intervalo de \mathbb{R} y $(E, \mathcal{E}) = (\mathbb{R}, \mathcal{B})$, cuyas trayectorias pertenezcan a $\mathbb{C} = \mathbb{C}(T, E)$, conjunto de las funciones continuas de T en E , puede asegurarse que

$$\{f \in \mathbb{C} \mid \sup_{t \in [a,b]} f(t) \leq c\} = \mathbb{C} \cap \{f \in E^T \mid \sup_{t \in [a,b] \cap \mathbb{Q}} f(t) \leq c\} \quad (1.7)$$

es un suceso de $\mathcal{E}_{\mathbb{C}}^T$, puesto que el último conjunto del segundo miembro pertenece a \mathcal{E}^T . Por consiguiente, está bien definida la probabilidad

$$\mathbb{P}_{\mathbb{C}}\left\{\sup_{t \in [a,b]} f(t) \leq c\right\} = \mathbb{P}\left\{f \in E^T \mid \sup_{t \in [a,b] \cap \mathbb{Q}} f(t) \leq c\right\}.$$

La misma conclusión puede obtenerse aunque \mathbb{U} sea un conjunto más amplio que \mathbb{C} , siempre que se cumpla una igualdad similar a (1.7).

En caso de un proceso estocástico $\{X_t\}_{t \in T}$ explícitamente definido en un espacio de probabilidad concreto, en el que Ω no sea un subconjunto de E^T , será normalmente sencillo apreciar si sus trayectorias cumplen una u otra condición de regularidad. Así, en el Ejemplo 1.1 no cabe duda de que todas las trayectorias son funciones continuas. Análogamente:

Ejemplo 1.6

Sea $\{(\xi_n, \eta_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ un proceso estocástico en tiempo discreto con espacio de estados $E = (0, \infty) \times \mathbb{R}$, el cual proporciona dos sucesiones de variables aleatorias:

¹³ Véase CP2 Definición 2.4.

$\xi_n > 0$ y $\eta_n \in \mathbb{R}$. Para concretar puede pensarse que $\{\xi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ son variables independientes con distribución exponencial de parámetro 1, mientras que $\{\eta_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ son independientes con distribución $\mathcal{N}(0, 1)$ y ambas independientes entre sí.

Pero sea cual sea su distribución, sólo con suponer que $\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n$ es divergente, se puede definir el proceso estocástico en tiempo continuo, con $T = [0, \infty)$:

$$X_t = \begin{cases} \eta_1 & \text{si } 0 \leq t < \xi_1 \\ \eta_2 & \text{si } \xi_1 \leq t < \xi_1 + \xi_2 \\ \eta_3 & \text{si } \xi_1 + \xi_2 \leq t < \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 \\ \vdots & \end{cases}$$

que permanece en el estado η_n desde el instante $\tau_n = \sum_{i=1}^n \xi_i$ hasta antes del instante $\tau_{n+1} = \tau_n + \xi_{n+1}$ y salta en ese momento al estado η_{n+1} .

En principio, $\{X_t\}_{t \geq 0}$ está definido en $(E^{\mathbb{N}}, \mathcal{E}^{\mathbb{N}}, \mathbb{P})$ donde \mathbb{P} es la distribución de la sucesión $\{(\xi_n, \eta_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$. Su espacio de estados es \mathbb{R} , de forma que su espacio canónico es $(\mathbb{R}^T, \mathbb{B}^T, \mathbb{I}^{\mathbb{P}})$, donde $\mathbb{I}^{\mathbb{P}}$ la distribución deducida de \mathbb{P} (a través de las distribuciones finito-dimensionales $\mathbb{P}\{X_{t_1} \in B_1, \dots, X_{t_k} \in B_k\}$). Este espacio canónico es problemático, porque $\mathbb{I}^{\mathbb{P}}$ no mide la probabilidad de propiedades relevantes de $\{X_t\}_{t \geq 0}$ (como, por ejemplo, $\sup_{t \in [a, b]} X_t \leq c$).

Ahora bien, las trayectorias de $\{X_t\}_{t \geq 0}$ son funciones escalonadas, continuas por la derecha, del tipo representado en la Figura 1.3.

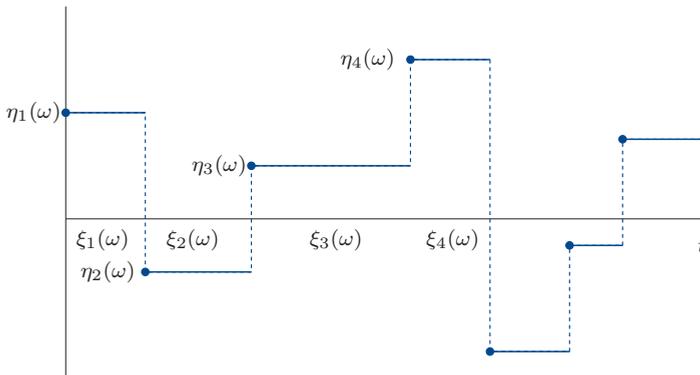


Figura 1.3: Trayectoria típica

Pertencen por tanto al conjunto

$$\mathbb{D} = \{f \in \mathbb{R}^T \mid \forall t \in T \ f(t+) = f(t) \text{ y existe } f(t-)\}$$

lo cual hace posible razonamientos del tipo (1.7) con \mathbb{C} reemplazado por \mathbb{D} . Así pues, se puede considerar a $\{X_t\}_{t \geq 0}$ como proceso con trayectorias en \mathbb{D} , descrito por el espacio canónico $(\mathbb{D}, \mathbb{B}_{\mathbb{D}}^T, \mathbb{I}^{\mathbb{D}})$, en el que no tienen lugar muchas de las dificultades inherentes a $(\mathbb{R}^T, \mathbb{B}^T, \mathbb{I}^{\mathbb{P}})$.