Índice general

Introducción 1
Notación 3

Capítulo 1. Espacios vectoriales 5
1.1 Espacios vectoriales 5
1.2 Span y bases lineales 12
1.3 Operadores y funcionales lineales 17

Capítulo 2. Espacios métricos 33
2.1 Espacios métricos y su topología 33
2.2 Aplicaciones continuas 43
2.3 Completitud 46
2.4 Los espacios (ℓ_p, d_p), $1 \leq p \leq +\infty$ 54

Capítulo 3. Espacios normados 65
3.1 Normas vectoriales 65
3.2 Los espacios (L_p, d_p), $1 \leq p < +\infty$ 69
3.3 Bases de Schauder 76
3.4 Espacios normados finitodimensionales 78

Capítulo 4. Espacios de Hilbert 81
4.1 Espacios de Hilbert 81
4.2 Ortogonalidad 86
4.3 Mejores aproximaciones y proyecciones ortogonales 88
4.4 Bases ortogonales y coeficientes de Fourier 92
4.5 Series de Fourier y polinomios ortogonales 99

Capítulo 5. Operadores en espacios normados 101
5.1 Operadores continuos 101
5.2 Espacios de operadores continuos 110
5.3 Operadores en espacios de Hilbert 114

Capítulo 6. Introducción a la teoría espectral 123
6.1 Resolvente y espectro 124
6.2 Autovectores y sucesiones de Weyl 131
6.3 Principales resultados de teoría espectral 137
6.4 Espectros de operadores autoadjuntos y unitarios 139

6.5 El operador posición en $L_2[a,b]$ 148

Apéndice A. Notación de Dirac 153
A.1 Dos productos escalares 153
A.2 Dualidad y notación de Dirac 155
A.3 Cálculos matriciales 157
A.4 Notación * de la conjugación compleja 157
A.5 Notación de los productos tensoriales 157

Apéndice B. Técnicas de demostración 159
B.1 Demostraciones ε - δ 159
B.2 El Principio de Inducción 161

Apéndice C. Contenidos de ampliación 163
C.1 Aplicaciones multilineales y producto tensorial 163
C.2 Espacios cociente 168
C.3 Cardinalidad 171
C.4 Medida e integral de Lebesgue 173

Apéndice D. Ejercicios resueltos 185

Bibliografía 229

Índice alfabético de términos 231

1 Espacios vectoriales

Día 1

Los espacios vectoriales y las aplicaciones lineales y bilineales sobre ellos fueron el objeto de estudio de la asignatura de Álgebra. En este capítulo recordaremos algunas de las definiciones, adaptándolas a espacios independientemente de su dimensión y del cuerpo conmutativo sobre el que estén definidos. Todas las definiciones y resultados de este capítulo son válidos para cuerpos conmutativos $\mathbb{K}$ cualesquiera, a los que llamaremos simplemente cuerpos. Sin embargo, estaremos pensando siempre en los casos real y complejo, ya que en el resto del curso serán los cuerpos que usaremos.

En este capítulo omitiremos en general las demostraciones de los resultados, dado que son análogas a las ya vistas en el curso de Álgebra.

Además, introduciremos algunas construcciones nuevas, como el espacio vectorial cociente y el producto tensorial de espacios. Aunque el espacio cociente tiene un uso limitado en el curso, fundamentalmente asociado a la construcción de la compleción de espacios y, en concreto, de los espacios L_p de funciones, la importancia del espacio L_2 hace que sea un concepto importante. Por otro lado, el producto tensorial no será usado en el resto del curso, pero es fundamental para el estudio del formalismo cuántico y la teoría de tensores.

1.1 Espacios vectoriales

En esta sección recordaremos las nociones de espacio vectorial y subespacio vectorial. Las definiciones y resultados no añaden nada nuevo a lo visto en la asignatura de Álgebra, aunque algunos ejemplos de espacios de dimensión infinita pueden ser nuevos.

Definición 1.1.1 (Espacio vectorial, vector, escalar) *(ALG) Dado un conjunto no vacío E y un cuerpo $\mathbb{K}$, una ley de composición interna u operación interna*[1] *$+$ en E, llamada suma, y una ley de composición externa*[2] *$\cdot$ de $\mathbb{K}$ en E, llamada producto por escalares, diremos que E* **tiene estructura de espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$** *o que E es un* **$\mathbb{K}$-espacio vectorial** *si:*

EVa) la operación $+$ es conmutativa:

$$\forall v, w \in E,\ v + w = w + v;$$

EVb) la operación $+$ es asociativa:

$$\forall u, v, w \in E,\ u + (v + w) = (u + v) + w;$$

EVc) la operación $+$ tiene elemento neutro:

$$\exists\, e \in E \text{ tal que } \forall v \in E,\ e + v = v + e = v$$

EVd) todo elemento tiene inverso (llamado opuesto) respecto a $+$:

$$\forall v \in E,\ \exists w \in E \text{ tal que } v + w = w + v = e,$$

donde e es el elemento neutro;

EVe) el producto por escalares es distributivo respecto a la suma en E:

$$\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \forall v, w \in E,\ \lambda \cdot (v + w) = \lambda \cdot v + \lambda \cdot w;$$

EVf) el producto por escalares es distributivo respecto a la suma en $\mathbb{K}$:

$$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K},\ \forall v \in E,\ (\lambda + \mu) \cdot v = \lambda \cdot v + \mu \cdot v;$$

EVg) el producto por escalares es asociativo:

$$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K},\ \forall v \in E,\ \lambda \cdot (\mu \cdot v) = (\lambda\mu) \cdot v;$$

EVh) el elemento neutro del cuerpo, $1 \in \mathbb{K}$, actua trivialmente en E:

$$\forall v \in E,\ 1 \cdot v = v.$$

A los elementos de E se les llamará **vectores** *y los elementos de $\mathbb{K}$ serán llamados* **escalares**. *Al elemento neutro de E se le llamará vector cero, denotado*[3] *por 0 o $\vec{0}$. El opuesto de un vector v será denotado por $-v$.*

Normalmente diremos simplemente que E es un espacio vectorial cuando no sea necesario especificar el cuerpo sobre el que está definido o éste sea claramente deducible.

---

[1] Una ley de composición interna u operación interna en un conjunto A es una aplicación $f : A \times A \to A$. En el caso de llamarla suma, se denota $f(a, b) = +(a, b) = a + b$.

[2] Una ley de composición externa de un conjunto C en un conjunto A es una aplicación $g : C \times A \to A$. En el caso de llamarla producto por escalares se denota

$$g(c, a) = \cdot(c, a) = c \cdot a = ca.$$

[3] Aunque es en general muy poco usada por su incomodidad, preferiremos la segunda notación por claridad.

Ejemplo 1.1.2 (ALG) Los conjuntos $\mathbb{K}^n$, $n \in \mathbb{N}$, de n-uplas de elementos del cuerpo son espacios vectoriales sobre $\mathbb{K}$ con las operaciones

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n) \quad \text{y}$$
$$\lambda \cdot (x_1, x_2, \ldots, x_n) = (\lambda \cdot x_1, \lambda \cdot x_2, \ldots, \lambda \cdot x_n).$$

Ejemplo 1.1.3 (ALG) El conjunto de números complejos, $\mathbb{C}$, es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial con las operaciones suma y producto usuales. También es un $\mathbb{C}$-espacio vectorial.

Ejemplo 1.1.4 El conjunto de funciones $f : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ es un $\mathbb{K}$-espacio vectorial, con las definiciones habituales de suma de funciones y producto de un elemento del cuerpo por una función:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \quad (\lambda \cdot f)(x) = \lambda f(x).$$

Ejemplo 1.1.5 (ALG) El producto cartesiano, o siemplemente producto, de varios espacios vectoriales $E_1, \ldots, E_n$ sobre un mismo cuerpo, denotado por $E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n$ o $\prod_{k=1}^{n} E_n$ es un espacio vectorial sobre el mismo cuerpo con las operaciones

$$(v_1, v_2, \ldots, v_n) + (w_1, w_2, \ldots, w_n) = (v_1 + w_1, v_2 + w_2, \ldots, v_n + w_n),$$
$$\lambda(v_1, v_2, \ldots, v_n) = (\lambda v_1, \lambda v_2, \ldots, \lambda v_n),$$
$$\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \forall v_k, w_k \in E_k,\ k = 1, \ldots, n.$$

Igualmente, el producto cartesiano de infinitos espacios vectoriales E_k, $k \in J$, sobre un mismo cuerpo, $\prod_{k \in J} E_k$, es un espacio vectorial, con las operaciones

$$(v_k)_{k \in J} + (w_k)_{k \in J} = (v_k + w_k)_{k \in J},$$
$$\lambda \cdot (v_k)_{k \in J} = (\lambda v_k)_{k \in J},\ \forall v_k, w_k \in E_k, \forall \lambda \in \mathbb{K}.$$

Ejercicio 1.1.6 Demostrar que el conjunto de sucesiones $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ tiene estructura de espacio vectorial, con operaciones suma y producto por escalares definidas de modo análogo al ejemplo 1.1.2.

Nótese que el espacio de este último ejercicio es un caso particular del ejemplo 1.1.5, pues $\mathbb{K}^{\mathbb{N}} = \prod_{k \in \mathbb{N}} \mathbb{K}$.

Ejercicio 1.1.7 Demostrar que todo $\mathbb{C}$-espacio vectorial tiene también estructura de espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$.

En general, los espacios vectoriales que puedan ser $\mathbb{C}$-espacios se consideraran como espacios sobre $\mathbb{C}$ y no sobre $\mathbb{R}$, a no ser que se especifique explícitamente lo contrario.

Notación. De ahora en adelante prescindiremos del punto para el producto por escalares: $\lambda \cdot v = \lambda v$.

Recordemos dos propiedades de los espacios vectoriales.

Proposición 1.1.8 *(ALG) Dado un espacio vectorial E, se verifican las siguentes propiedades*

a) $0v = \vec{0}, \ \forall v \in E,$
b) $(-1)v = -v, \ \forall v \in E.$

1.1.1 Subespacios vectoriales

Algunos espacios vectoriales están incluidos dentro de otros, lo que da lugar al concepto de subespacio vectorial.

Definición 1.1.9 (Subespacio vectorial) *(ALG) Dado E un espacio vectorial, y F un subconjunto no vacío de E, diremos que F es un* **subespacio vectorial** *de E si F también tiene estructura de espacio vectorial con las operaciones heredadas de E.*

Diremos que un subespacio vectorial F de E es un **subespacio vectorial propio** *si $F \neq E$ y $F \neq \{\vec{0}\}$.*

Proposición 1.1.10 *(ALG) Sea E un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$, y $F \subseteq E$ un subconjunto suyo no vacío. Entonces F es subespacio vectorial de E si las dos siguientes condiciones se cumplen:*

a) $\forall v, w \in F, \ v + w \in F,$
b) $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall v \in F, \ \lambda v \in F;$

o, equivalentemente, si $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \forall v, w \in F, \ \lambda v + \mu w \in F.$

Ejemplo 1.1.11 (ALG) En $\mathbb{C}^3$, el subconjunto $\{(x, y, z), \ x+iy = 0\}$ es un subespacio vectorial.

Ejemplo 1.1.12 (ALG) En $\mathbb{R}^3$, el subconjunto $\{(x, y, z), \ x+y \geq 0\}$ no es un subespacio vectorial. Por ejemplo, el vector $(1, 0, 0)$ no tiene opuesto dentro del conjunto.

Ejemplo 1.1.13 El conjunto de funciones

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ tales que } f(x) \geq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$$

no es un subespacio vectorial del espacio del ejemplo 1.1.4, ya que no verifica la propiedad EVd). Por ejemplo, la función constante $f(x) = 1$ no tiene función opuesta en el conjunto.

Ejemplo 1.1.14 El conjunto de funciones

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ tales que } f(x) = 0, \ \forall x \leq 0$$

sí es un subespacio vectorial del espacio del ejemplo 1.1.4.

Obsérvese, en estos dos últimos ejemplos, la analogía con el caso finitodimensional $\mathbb{R}^n$. En el ejemplo 1.1.14, la condición impuesta es análoga a un conjunto de condiciones del tipo $x_k = 0$, que son lineales en $\mathbb{R}^n$, mientras que en el ejemplo 1.1.13 la condición es análoga a un conjunto infinito de condiciones del tipo $x_k > 0$, que no son lineales en $\mathbb{R}^n$. Así, por ejemplo, igual que las condiciones del tipo $\sum_k \alpha_k x_k = 0$ son lineales en $\mathbb{R}^n$, condiciones del tipo $\sum_k \alpha_k f(x_k) = 0$ para ciertos x_k también es lineal, y, en su versión continua, las condiciones del tipo $\int_{\mathbb{R}} \alpha(x) f(x) dx = 0$ también son lineales.

Ejemplo 1.1.15 (ALG) El conjunto de sucesiones cuyo límite es 0 es un subespacio del espacio de sucesiones $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. A este nuevo espacio lo llamaremos c_0. Es un subespacio ya que para cualesquiera dos sucesiones $x = (x_n)_{n=1}^{\infty}$ y $y = (y_n)_{n=1}^{\infty}$ con límite 0, y para cualquier escalar $\lambda \in \mathbb{C}$, las sucesiones $x + y = (x_n + y_n)_{n=1}^{\infty}$ y $\lambda x = (\lambda x_n)_{n=1}^{\infty}$ tienen también límite 0.

Ejemplo 1.1.16 Dado $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ con la topología usual, el conjunto de funciones $f : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ continuas es un subespacio del conjunto de funciones de $\mathbb{K}$ en $\mathbb{K}$, ya que la suma de dos funciones continuas es otra función continua, y si f es continua y λ es un escalar λf también es continua (AMI y MMI). A este nuevo espacio lo llamaremos $\mathcal{C}(\mathbb{K})$.

Ejemplo 1.1.17 Para un subconjunto de los reales o de los complejos A podemos también construir el espacio $\mathcal{C}(A)$ de funciones continuas $f : A \to \mathbb{K}$, definidas únicamente en A y continuas en A. En Mecánica Cuántica tienen mucho interés los espacios de funciones complejas de variable real $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ y, dado $A \subseteq \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{C}$, como $\mathbb{C}$-espacios. Estas se usan para describir partículas en una recta o localizadas en un conjunto real A. Recuérdese que una función de este tipo se puede descomponer con dos funciones reales de variable real, de la forma $f = \mathrm{Re}(f) + i\,\mathrm{Im}(f)$. En Cuántica también se usarán los espacios de funciones $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ con $n = 2, 3$, cuando las partículas estén en un plano o en el espacio, pero nosotros apenas nos ocuparemos de ellos.

Al espacio $\mathcal{C}([a, b])$ se le denota usualmente por $\mathcal{C}[a, b]$.

Ejercicio 1.1.18 Demostrar que el conjunto de funciones de variable real, con imagen en $\mathbb{R}$ o en $\mathbb{C}$, y continuas $f(x)$ tales que $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$ es un subespacio vectorial del conjunto de funciones reales. A este nuevo espacio lo llamaremos $C_0(\mathbb{R})$.

Ejercicio 1.1.19 (ALG) Demostrar que dado un espacio vectorial E y dos subespacios suyos F y G, la intersección $F \cap G$ es siempre un subespacio vectorial de E, pero la unión $F \cup G$ es un subespacio vectorial de E si y sólo si $F \subseteq G$ o $G \subseteq F$.

1.1.2 Suma y suma directa

Ejercicio 1.1.20 (ALG) Dado un espacio vectorial E, y dos subespacios vectoriales suyos F y G, demostrar que el **espacio suma** $F + G$,

$$F + G = \{v + w,\ v \in F, w \in G\},$$

es también un subespacio vectorial de E.

Un caso particularmente interesante de suma es la suma directa, en el que las descomposiciones de vectores como suma de vectores de cada uno de los sumandos es única.

Definición 1.1.21 (Suma directa) *(ALG) Dado un espacio vectorial E, y dos subespacios vectoriales suyos F y G, diremos que E es* **suma directa** *de F y G, denotado por $E = F \oplus G$, si $E = F + G$ y $F \cap G = \{\vec{0}\}$.*

Proposición 1.1.22 *(ALG) Dada una descomposición de un espacio como suma directa, $E = F \oplus G$, tenemos que*

$$\forall u \in E,\ \exists!(v, w) \in F \times G \text{ tal que } u = v + w\,.$$

Observación 1.1.23 En el caso de espacios de dimensión infinita, podemos llegar a tener infinitos sumandos, por ejemplo $E_1, E_2, \cdots \subseteq E$ (de hecho, podría ser hasta una familia no numerable $\{E_j\}_{j\in J}$, $E_j \subseteq E$; en tal caso, los elementos de la suma de los espacios siguen siendo sumas finitas de vectores de los distintos espacios, ya que las sumas infinitas no tienen sentido, aún). Así, la suma de una familia finita de subespacios E_k sería

$$\sum_{k=1}^{n} E_k = \{v_1 + v_2 + \cdots + v_n,\ v_k \in E_k\}\,.$$

Además, muchas veces se usa el símbolo suma directa aunque la suma no llegue a generar todo el espacio. Lo que sucede es que si $F + G$ no llega a ser todo E,

pero $F \cap G = \{\vec{0}\}$, entonces tenemos que el subespacio $F + G$ sí se descompone como la suma directa $F \oplus G$.

La suma directa de una familia numerable de subespacios E_k, $k = 1, 2, \ldots,$ que verifican $E_j \cap E_k = \{\vec{0}\}$ si $j \neq k$, se denota por

$$\oplus_{j=1}^{\infty} E_j \,,$$

tanto si esta suma es igual al espacio ambiente como si no.

Ampliación

En algunos casos, se puede encontrar la suma directa de espacios $E_1, \ldots, E_n$ o E_k, $k \in J$, que no son subespacios de otro. En este caso se está considerando como espacio ambiente el producto cartesiano $\prod_{k=1}^{n} E_k$, o $\prod_{k \in J} E_k$, y cada sumando es identificado con el subespacio, isomorfo a él,

$$\begin{aligned}
E_1 &\cong E_1 \times \{0\} \times \{0\} \times \cdots \times \{0\} \,, \\
E_2 &\cong \{0\} \times E_2 \times \{0\} \times \cdots \times \{0\} \,, \\
\cdots &\cong \cdots \\
E_n &\cong \{0\} \times \{0\} \times \{0\} \times \cdots \times E_n \,,
\end{aligned}$$

y los subespacios correspondientes para el caso infinito.

Nótese que la suma directa finita de espacios coincide con el producto cartesiano, mientras que la suma directa infinita no. De nuevo, esto es debido a que en las sumas directas sólo se permiten combinaciones lineales finitas.

1.1.3 Espacio vectorial cociente

Una construcción muy útil es la de espacio vectorial cociente[4]. Para el curso no es necesario hacer un estudio profundo de esta construcción, pero conviene tener una idea general que iremos desarrollando con los dos ejemplos más importantes del curso: el producto tensorial de espacios y los espacios L_p de funciones. Además, la construcción cociente (aunque sin estructura de espacio vectorial) también se usa para la construcción de la compleción de espacios métricos.

Al hacer un cociente uno se olvida de ciertas propiedades de los vectores y se concentra únicamente en otras, "identificando" como uno solo ciertos conjuntos de vectores: aquellos relacionados entre sí por una relación de equivalencia forman una clase de equivalencia. En el caso de los espacios vectoriales se parte de un

[4]Tanto una definición mas extensa del espacio vectorial cociente como una discusión sobre la necesidad de demostrar que la suma y el producto por escalares estén bien definidos se encuentran en el apéndice C.

espacio E y un subespacio vectorial suyo F. La relación de equivalencia para tomar el conjunto cociente E/F es

$$v \sim w \iff v - w \in F\,.$$

Y los elementos de E/F, las clases de equivalencia, son de la forma

$$[v] = \{w,\, w \sim v\} = \{w,\, v - w \in F\}\,.$$

La suma en E/F se define sumando dos representantes cualesquiera de las clases,

$$\begin{array}{rccc} +: & E/F \times E/F & \to & E/F \\ & ([v],[w]) & \mapsto & [v]+[w] = [v+w] \end{array},$$

que se puede demostrar está bien definida (no depende de la elección de representantes).

El producto por escalares se define igualmente usando un representante de la clase:

$$\begin{array}{rccc} \cdot: & \mathbb{K} \times E/F & \to & E/F \\ & (\lambda,[v]) & \mapsto & \lambda[v] = [\lambda v] \end{array}.$$

1.2 Span y bases lineales

En esta sección repasaremos los conceptos de combinación lineal, independencia lineal, espacio generado por un conjunto y base lineal de un espacio vectorial. De nuevo, todos estos contenidos ya formaron parte del curso de Álgebra, aunque es muy recomendable su lectura para tener claro el concepto de base lineal en espacios de dimensión infinita.

Definición 1.2.1 (Combinación lineal) *(ALG) Dado un espacio vectorial E, y un conjunto de vectores $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \subseteq E$, una* **combinación lineal** *de $v_1, v_2, \ldots, v_n$ es una expresión del tipo*

$$v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k v_k\,,$$

para ciertos escalares $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.

Nótese que, en la definición anterior, el conjunto de vectores que participan en una combinación lineal es finito. Esto tendrá mucha importancia posteriormente, pues cuando hablemos de bases en espacios de Hilbert se permitirán series además de sumas finitas.

Definición 1.2.2 (Span o espacio generado por un conjunto de vectores) *(ALG) Dado un espacio vectorial E, y $A \subseteq E$ un subconjunto suyo no vacío, llamamos* **span** *de A o* **espacio generado por** *A al conjunto de combinaciones lineales de elementos de A. Este subespacio será denotado por* $\operatorname{span}(A)$.

Definición 1.2.3 (Sistema generador) *Dado un espacio vectorial E, se dice que $A \subseteq E$ es un* **sistema generador** *de E si $E = \operatorname{span}(A)$.*

El subespacio generado por un conjunto también recibe el nombre de **envoltura lineal**, que no usaremos en el curso.

Recuérdese que $\operatorname{span}(A) + \operatorname{span}(B) = \operatorname{span}(A \cup B)$.

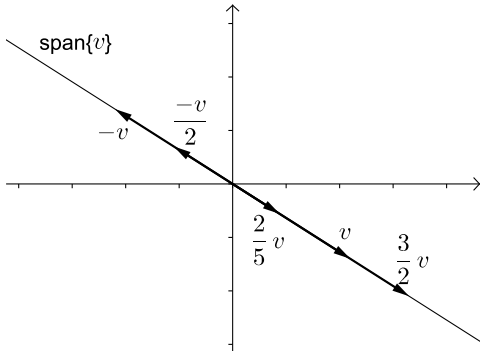


FIGURA 1. Subespacio generado por un vector $v \neq \vec{0}$ en $\mathbb{R}^2$.

Ejercicio 1.2.4 Demostrar que, efectivamente, el conjunto de combinaciones lineales de vectores de un conjunto cualquiera $A \subseteq E$ no vacío es un subespacio vectorial de E, tal y como se afirma en la definición.

Ejercicio 1.2.5 En $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, describir el espacio $c_{00} = \operatorname{span}(A)$, siendo

$$A = \{e_k,\ k \in \mathbb{N}\},\ e_1 = (1,0,0,0,\dots),\ e_2 = (0,1,0,0,\dots),\ \dots,\ e_k = (\delta_{k,n})_{n=1}^{\infty},\ \dots$$

Ejercicio 1.2.6 Calcular, en $\mathbb{C}^2$ como $\mathbb{C}$-espacio el span de $(0, 1+i)$. Calcular el span de $(0, 1+i)$ considerando $\mathbb{C}^2$ como $\mathbb{R}$-espacio.

Calcular, en $\mathbb{C}$ como $\mathbb{C}$-espacio el span de $\{i\}$, así como el span de i considerando $\mathbb{C}$ como $\mathbb{R}$-espacio.

Definición 1.2.7 (Dependencia e independencia lineal) *(ALG) Dado un espacio vectorial E, y un conjunto de vectores $\{v_1, v_2, \dots, v_n\} \subseteq E$, diremos que un vector $v \in E$* **depende linealmente de** *$v_1, v_2, \dots, v_n$ si v se puede expresar como combinación lineal de $v_1, v_2, \dots, v_n$.*

Diremos que un conjunto $A \subseteq E$, $A \neq \{\vec{0}\}$, es **linealmente independiente** *si ninguno de los vectores del conjunto se puede escribir como combinación lineal del resto de vectores del conjunto.*

Por tanto, diremos que un conjunto $A \subseteq E$ es **linealmente dependiente** *si existen $v \in A$, $v_1, v_2, \dots, v_n \in A - \{v\}$ y $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ escalares del cuerpo tales que $v = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k v_k$.*

Además, diremos que el conjunto $\{\vec{0}\}$ es linealmente dependiente.

Esta definición de independencia lineal es equivalente a la que se suele dar como definición. Esta equivalencia la recogemos en la siguiente proposición.

Proposición 1.2.8 *(ALG) Un conjunto finito de vectores $v_1, v_2, \dots, v_n \in E$ es linealmente independiente si y sólo si la única forma de obtener el vector 0 como combinación lineal de ellos es la trivial, es decir, si*

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n = \vec{0} \;\Rightarrow\; \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0\,.$$

Un conjunto infinito $A \subseteq E$ es linealmente independiente si y sólo si todo subconjunto finito suyo es linealmente independiente.

Ejemplo 1.2.9 (ALG) En el espacio $\mathbb{R}^3$, el vector $(-4, 2, 9)$ es combinación lineal de los vectores $(-1, 1, 4)$ y $(2, 0, -1)$, ya que

$$(-4, 2, 9) = 2\,(-1, 1, 4) - 1\,(2, 0, -1)\,.$$

Ejemplo 1.2.10 En el espacio $\mathbb{C}^2$ el vector $(1, i)$ depende linealmente de $(1, 1)$, $(0, 2)$ y $(-1, 0)$, ya que, por ejemplo,

$$(1, i) = 0\,(1, 1) + \frac{i}{2}\,(0, 2) - (-1, 0)\,, \text{ o}$$

$$(1, i) = i\,(1, 1) + 0\,(0, 2) + (-1 + i)\,(-1, 0)\,.$$

Ejemplo 1.2.11 En $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ el conjunto $\{e_k,\, k \in \mathbb{N}\}$ del ejercicio 1.2.5 es linealmente independiente.

Ejercicio 1.2.12 (ALG) Demostrar que, en un espacio vectorial E, todo conjunto que contenga al vector $\vec{0}$ es linealmente dependiente, usando la proposición 1.2.8.

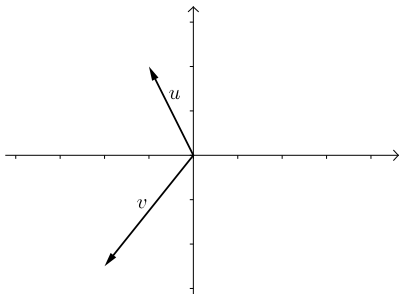
Ejercicio 1.2.13 Demostrar que, dados $e_k = (\delta_{j,k})_{j=1}^{\infty}$ (véanse ejemplos en el ejercicio 1.2.5), $x = (1, 1, 1, \dots)$ e $y = (1, 1/2, 1/3, 1/4, \dots)$, el conjunto $\{e_k,\, k \in \mathbb{N}\} \cup \{x, y\}$ es linealmente independiente.

Si nos fijamos en los ejemplos 1.2.9 y 1.2.10 vemos un hecho singular: en el primero de ellos la combinación lineal es única, no se puede conseguir ninguna otra, mientras que en el segundo no lo es. Esto deriva del hecho de que los vectores $(1,1)$, $(0,2)$ y $(-1,0)$ son linealmente dependientes. Esta diferencia es la que motiva el concepto de base lineal de un espacio vectorial, llamada simplemente base en el curso de Álgebra[5]. Nótese que los vectores del ejemplo 1.2.9 no forman una base de $\mathbb{R}^3$, aunque sí del subespacio generado por ellos.

Definición 1.2.14 (Base lineal o de Hamel) *(ALG) Dado un espacio vectorial E y un subconjunto suyo B se dice que B es una* **base lineal** *o* **base de Hamel** *de E si*

a) B es linealmente independiente, y
b) $E = \operatorname{span}(B)$.

Por tanto, las bases lineales son los sistemas generadores linealmente independientes de los espacios. Por ejemplo, una base lineal de $\mathbb{R}^2$ sería



.

Definición 1.2.15 (Coordenadas) *Dados un espacio E, un vector $v \in E$ y una base lineal $B = \{e_k\}_{k\in J}$ del espacio, se llamarán* **coordenadas** *de v respecto a B al único conjunto de coeficientes $\operatorname{coord}_B(v) = (v_k)_{k\in J}$ tal que $v = \sum_{k\in J} v_k e_k$.*

El siguiente resultado no lo demostraremos por exceder el nivel del curso[6].

Teorema 1.2.16 *Todos los espacios vectoriales tienen bases lineales. Y todas las bases lineales de un espacio tienen el mismo cardinal.*

[5]En el capítulo 3, sobre espacios normados, veremos otro tipo de bases: las bases de Schauder. Es por ello que llamamos a estas bases lineales y no únicamente bases, para diferenciarlas de las que estudiaremos más adelante. Para espacios de dimensión finita las bases lineales y las nuevas bases que definiremos coinciden, por lo que en este caso no será necesario hacer tal distinción.

[6]Su demostración requiere del uso del Lema de Zorn y herramientas de Teoría de Conjuntos.

El que todas las bases lineales de un espacio dado tengan el mismo cardinal, permite definir la dimensión de un espacio en función de este cardinal.

Definición 1.2.17 *[Dimensión de un espacio vectorial, espacios finitodimensionales y de dimensión infinita] (ALG) Dado un espacio vectorial E, y $B \subseteq E$ una base lineal cualquiera de E, llamaremos* **dimensión** *de E al cardinal de B, y la denotaremos por* $\dim(E)$.

Diremos que E es un **espacio finitodimensional** *de dimensión $n \in \mathbb{N}$ si tiene una base lineal B con* $\operatorname{card}(B) = n$ *(y, por tanto, todas sus bases lineales tienen cardinal igual a n).*

Diremos que E es un **espacio de dimensión infinita** *si, para todo número natural $n \in \mathbb{N}$, E no tiene ninguna base lineal B con* $\operatorname{card}(B) = n$*, o, equivalentemente, si tiene una base lineal B de cardinal infinito*[7]*. Nos referiremos a esta propiedad con* $\dim(E) = \infty$*, recordando el hecho de que dos espacios de dimensión infinita no tienen por qué tener la misma dimensión, debido a lo expuesto en el pie de nota anterior sobre los diferentes cardinales transfinitos.*

Ejemplo 1.2.18 El espacio c_{00} del ejercicio 1.2.5 tiene dimensión infinita, ya que $B = \{e_k, k \in \mathbb{N}\}$ es una base lineal de él. Recuérdese el ejercicio 1.2.13, donde se demuestra que B es un conjunto linealmente independiente[8].

Ejercicio 1.2.19 Demostrar que en el espacio de funciones de variable real $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ existe un conjunto infinito numerable de funciones linealmente independiente (con lo que se demuestra que tiene dimensión infinita). Demostrar que existe un conjunto infinito no numerable de funciones linealmente independientes (con lo que se demuestra que su dimensión no es $\aleph_0$, el cardinal de $\mathbb{N}$).

[7] Obsérvese que no hemos dicho que un espacio tenga dimensión infinita si tiene una base lineal B con $\operatorname{card}(B) = \infty$. Esto se debe a que ∞ no es un cardinal. Hay distintos tipos de infinito no comparables, como por ejemplo el cardinal de $\mathbb{N}$ y el cardinal de $\mathbb{R}$, sobre lo cual hemos recogido algunos contenidos básicos en el apéndice C. La definición anterior de espacio de dimensión infinita sí se puede formular diciendo que son aquellos espacios que tienen una base lineal B de cardinal infinito (sin especificar), pero no con una igualdad del tipo $\operatorname{card}(B) = \infty$. Por otro lado, la primera definición dada de las dos equivalentes, tiene la ventaja de poder ser establecida sin recurrir al Lema de Zorn, ya que el teorema 1.2.16 se puede demostrar de manera mucho más simple para espacios de dimensión finita. Por último, es importante observar que las bases lineales de espacios de dimensión infinita en muchos casos son "imposibles de encontrar" explícitamente, aunque se sepa que existen.

[8] Si $A \subseteq C$ y C es linealmente independiente, A también es linealmente independiente

Al igual que en la asignatura de Álgebra, todo vector tendrá una única expresión como combinación lineal respecto a los vectores de la base lineal. Por tanto, dado un espacio E y una base lineal $B = \{e_j,\ j \in J\}$ tendremos para cualquier $v \in E$ una única expresión del tipo

$$v = \sum_{j \in J} v_j e_j,\ v_j \in \mathbb{K},\ v_j = 0 \text{ para casi todo}^9\ j \in J\,.$$

La condición de que casi todos los coeficientes deban ser 0 viene de que las combinaciones lineales de vectores involucran necesariamente sólo una cantidad finita de vectores. Esto contrastará con el nuevo tipo de bases que definiremos para los espacios Hilbert.

Día 2

1.3 Operadores y funcionales lineales

En esta sección recordaremos las aplicaciones u operadores lineales entre dos espacios vectoriales, y veremos un caso particular importante: los funcionales lineales, que forman el espacio dual algebraico. Por último, recordaremos los cálculos matriciales elementales relacionados con aplicaciones lineales ya vistos también en la asignatura de Álgebra, especificando cómo serían para el caso de funcionales.

1.3.1 Aplicaciones lineales

Entre dos espacios vectoriales existen muchas funciones. Por ejemplo,

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y) & \mapsto & (2,3,-1) \end{array} \quad \text{o} \quad \begin{array}{rccc} g: & \mathbb{R}^3 & \to & \mathcal{C}(\mathbb{R}) \\ & (\alpha,\beta,\gamma) & \mapsto & \alpha x^2 + \gamma\beta x \end{array}.$$

Pero hay unas funciones particulares que se "portan bien" con la estructura de espacio vectorial, llevando siempre combinaciones lineales de vectores a combinaciones lineales de sus imágenes. Son las llamadas aplicaciones lineales.

Definiciones 1.3.1 (Aplicación lineal, homomorfismo u operador lineal. Monomorfismo, epimorfismo e isomorfismo) *(ALG) Dados dos espacios vectoriales E y F sobre un mismo cuerpo $\mathbb{K}$, y una aplicación $T : E \to F$ entre ellos, diremos que T es una* **aplicación lineal**, **homomorfismo** *u* **operador lineal** *si se cumplen las dos siguientes condiciones*

AL a) $T(v+w) = T(v) + T(w),\ \forall v, w \in E$, *llamada linealidad respecto a la suma de vectores,*

AL b) $T(\lambda v) = \lambda T(v),\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ \forall v \in E$, *llamada linealidad respecto al producto por escalares,*

[9] Para casi todo, en este contexto, quiere decir salvo para, a lo sumo, un conjunto finito. Nótese que para espacios finitodimensionales esta precisión no es necesaria, ya que no añade nada si de partida tenemos una base finita.

o, equivalentemente, si verifica

AL c) $T(\lambda v + \mu w) = \lambda T(v) + \mu T(w), \ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \ \forall v, w \in E$.

Diremos que una aplicación lineal T es un **homomorfismo** *si es inyectiva, que es un* **epimorfismo** *si es sobreyectiva, y que es un* **isomorfismo** *si es biyectiva.*

Dos espacios vectoriales se dicen **isomorfos** *si existe algún isomorfismo entre ellos.*

Normalmente diremos simplemente **operador** en lugar de operador lineal.

Notación. Cuando un operador T actúe sobre un vector v usaremos a menudo la expresión $Tv = T(v)$. La composición (también llamada producto) de dos operadores T y S será denotada por TS en lugar de $T \circ S$.

Ejemplo 1.3.2 La siguiente aplicación es lineal e inyectiva.

$$\begin{array}{rccc} T: & \mathbb{C}^2 & \to & \mathbb{C}^3 \\ & (x,y) & \mapsto & (ix+2y, x-\sqrt{2}y, y+x) \end{array}.$$

Ejemplo 1.3.3 La siguiente aplicación, llamada restricción al conjunto $[a,b]$, es lineal y sobreyectiva

$$\begin{array}{rccc} |_{[a,b]}: & \mathcal{C}(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{C}[a,b] \\ & f & \mapsto & f|_{[a,b]} \end{array},$$

donde $f|_{[a,b]}$ es

$$\begin{array}{rccc} f|_{[a,b]}: & [a,b] & \to & \mathbb{K} \\ & x & \mapsto & f(x) \end{array}.$$

Ejercicio 1.3.4 Dibujar la gráfica de $f(x) = x^2$ y de $f|_{[-1,1]}$ para el caso $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Ejemplo 1.3.5 El operador derivación en $C^\infty(\mathbb{R})$, el espacio de funciones continuas infinitas veces derivables,

$$\begin{array}{rccc} D: & C^\infty(\mathbb{R}) & \to & C^\infty(\mathbb{R}) \\ & f & \mapsto & f' \end{array},$$

es lineal y sobreyectivo, debido a la linealidad de la derivada y a que la integral de toda función infinitas veces derivable es también infinitas veces derivable.

Ejercicio 1.3.6 Demuéstrese que los operadores de los ejemplos 1.3.3 y 1.3.5 no son inyectivos pero sí suprayectivos, y que el operador del ejemplo 1.3.2 no es suprayectivo. Si definimos el operador $|_{(a,b)}$ análogo a 1.3.3 demostrar que tampoco es sobreyectivo.

Ejercicio 1.3.7 Una **combinación lineal convexa** es una combinación del tipo $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k v_k, 0 \leq \lambda_k \leq 1, \sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1$. Y un conjunto de un espacio vectorial se dice **convexo** (MMI) si toda combinación lineal convexa de elementos del conjuntos sigue siendo un elemento del conjunto. Para caracterizar los conjuntos convexos basta con probar esa condición para combinaciones lineales convexas de dos elementos arbitrarios:

$$C \subset E \text{ es convexo } \iff \forall v, w \in C,\ \forall \lambda \in [0,1],\ \lambda v + (1-\lambda) w \in C\,.$$

Demostrar que si tenemos una aplicación lineal $T : E \to F$, y C es un conjunto convexo de E, entonces $T(C)$ es un conjunto convexo de F.

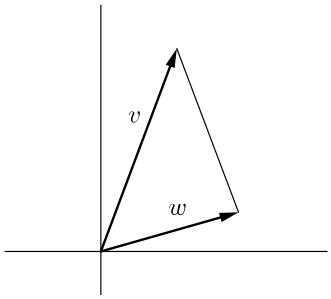
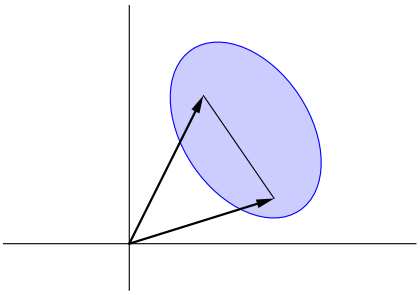
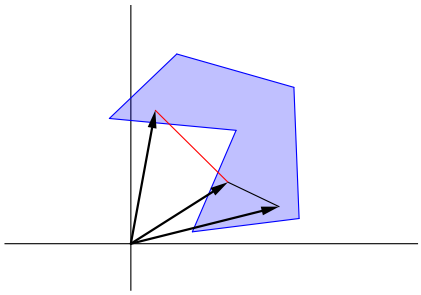


FIGURA 2. Dados dos vectores v y w, el conjunto de vectores que pueden ser expresados como combinación lineal convexa de ellos están determinados por el segmento de la figura.

Las siguientes figuras son ejemplos de un conjunto convexo y uno no convexo respectivamente.





En el primer caso todos los segmentos determinados por dos vectores caen dentro del conjunto, mientras que en el segundo no todos lo hacen. Nótese que estamos haciendo cierta identificación de puntos y extremos de vectores en los dibujos.

Físicamente, una combinación lineal convexa

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k v_k, 0 \leq \lambda_k \leq 1, \sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1$$

se puede ver como el centro de masas de los diferentes v_k con peso λ_k. Un conjunto es convexo si y sólo si para cualquier distribución de pesos en él concentrada en un conjunto finito de puntos[10] el correspondiente centro de masas sigue estando en el conjunto.

Gracias a que las aplicaciones lineales llevan combinaciones lineales de vectores a combinaciones lineales de las imágenes, y a que dada una base lineal todo vector tiene una expresión única como combinación lineal de los vectores de esa base, para definir una aplicación lineal basta determinar cómo actúa sobre cada elemento de la base. Por ejemplo, si definimos un operador $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^3$ de la forma

$$\begin{array}{rccc} T: & \mathbb{C}^2 & \to & \mathbb{C}^3 \\ & (2,i) & \mapsto & (1,0,0) \\ & (0,1) & \mapsto & (-i,2i,3) \end{array}.$$

y "extendemos por linealidad" a todo el espacio, conocemos la imagen de cualquier vector bajo T, ya que $\{(2,i),(0,1)\}$ es base de $\mathbb{C}^2$. Por ejemplo, el vector $(2i,\sqrt{3})$ es combinación lineal de la forma

$$(2i,\sqrt{3}) = i\,(2,i) + (\sqrt{3}+1)\,(0,1)\,,$$

por lo que

$$\begin{aligned} T(2i,\sqrt{3}) &= i\,T(2,i) + (\sqrt{3}+1)\,T(0,1) \\ &= i\,(1,0,0) + (\sqrt{3}+1)\,(-i,2i,3) \\ &= (-\sqrt{3}i, 2\sqrt{3}i + 2i, 3\sqrt{3}+3)\,. \end{aligned}$$

Para cualquier otro vector de $\mathbb{C}^2$ podemos usar un razonamiento análogo, pues tenemos las combinaciones lineales

$$(z_1,z_2) = \frac{z_1}{2}\,(2,i) + \left(z_2 - i\frac{z_1}{2}\right)(0,1)\,,\ \forall z_1,z_2 \in \mathbb{C}\,.$$

La condición de sistema generador de las bases lineales es esencial para que, determinadas las imágenes de los elementos de una base lineal, sepamos cómo es la imagen de cada vector. Y la condición de independencia lineal es esencial para que las combinaciones lineales sean únicas, pues de no ser así la aplicación podría no poder ser extendida linealmente. Si recordamos el ejemplo 1.2.10 e intentamos definir un operador $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^3$ de la forma

$$\begin{array}{rccc} T: & \mathbb{C}^2 & \to & \mathbb{C}^3 \\ & (1,1) & \mapsto & (1,0,0) \\ & (0,2) & \mapsto & (0,1,0) \\ & (-1,0) & \mapsto & (0,0,1) \end{array},$$

es imposible que sea lineal: de principio tenemos que $T(1,1) = (1,0,0)$, pero si fuera lineal tendríamos que, como $(1,1) = \frac{1}{2}(0,2) - (-1,0)$, deberíamos tener también que

$$T(1,1) = \frac{1}{2}T(0,2) - T(-1,0) = \left(0,\frac{1}{2},-1\right) \neq (1,0,0)\,.$$

[10] Aún no sabemos cómo sumar infinitos vectores.

Observación 1.3.8 Los operadores, como funciones que son, pueden tener algún problema para estar definidas en todo el espacio. En el caso en que el dominio de un operador $T : E \to F$ no coincida con todo el espacio, explicitaremos siempre este hecho con "definido en el correspondiente dominio", siendo éste el máximo posible donde pueda definirse el operador, siempre dentro del espacio origen E. Esto tendrá especial importancia en las proposiciones y teoremas, ya que en estos se considera que los operadores están definidos en todo el espacio origen E. En el caso en que el dominio no sea todo el espacio, se podría hacer una versión nueva de cada resultado cambiando cada operador $T : E \to F$ por $T : \mathcal{D}(T) \to F$, y exigiendo a $\mathcal{D}(T)$ las condiciones que se exijan a E en cada caso. Nótese que el dominio $\mathcal{D}(T)$ de un operador lineal $T : E \to F$ siempre es un subespacio vectorial de E.

Ejercicio 1.3.9 En el espacio s de sucesiones complejas definimos el operador

$$\begin{array}{rccc} T: & s & \to & \mathbb{C} \\ & (z_k)_{k=1}^{\infty} & \mapsto & \sum_{k=1}^{\infty} z_k \end{array}.$$

Compruébese que T no está definido en todo s. Demuéstrese además que c_0, el subespacio de sucesiones que convergen a 0, no está contenido en $\mathrm{dom}(T)$.

Además, un operador determina otros dos espacios vectoriales muy importantes, su núcleo y su rango o imagen.

Definición 1.3.10 (Núcleo de un operador) *(ALG) Dado $T : E \to F$ un operador lineal, el* **núcleo** *o* **kernel** *de T es el conjunto*

$$\ker(T) = \{v \in E, T(v) = \vec{0}_F\}.$$

Proposición 1.3.11 *(ALG) Dado un operador $T : E \to F$, definido en su correspondiente dominio, el núcleo $\ker(T)$ y el dominio $\mathcal{D}(T)$ son subespacios vectoriales de E, y la imagen o rango de T, $\mathcal{R}(T) = im(T) = T(E)$, es un subespacio vectorial de F.*

En el curso de Álgebra ya se vio que el núcleo y la imagen de un operador son espacios vectoriales. No se dijo nada acerca del dominio ya que los operadores lineales en espacios de dimensión finita no presentan este tipo de problemas. Los operadores lineales en dimensión finita involucran únicamente combinaciones lineales finitas de las coordenadas, por lo que no puede haber magnitudes no convergentes como la del ejercicio 1.3.9.

El núcleo es especialmente útil para caracterizar cuándo un operador es inyectivo.

Proposición 1.3.12 *(ALG) Un operador lineal $T : E \to F$ es inyectivo si y sólo si* $\ker(T) = \{\vec{0}_E\}$.

Ejercicio 1.3.13 Demuéstrese que si $T : E \to F$ es un operador inyectivo y A es un subconjunto linealmente independiente de E, entonces $T(E)$ es un conjunto linealmente independiente de F.

Ejercicio 1.3.14 En el espacio $s = \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ de sucesiones complejas, demostrar que dada cualquier sucesión $z = (z_n)_{n=1}^{\infty}$ la aplicación

$$\begin{array}{rccc} T_z : & s & \to & s \\ & (x_n)_{n=1}^{\infty} & \mapsto & (x_n z_n)_{n=1}^{\infty} \end{array},$$

es una aplicación lineal. Determinar qué condiciones ha de cumplir la sucesión z para que: a) T_z sea inyectiva, b) T_z sea suprayectiva.

El hecho de que la imagen sea un subespacio vectorial permite demostrar el siguiente resultado.

Teorema 1.3.15 *Dos espacios vectoriales E y F son isomorfos si y sólo si tienen la misma dimensión.*

Demostración. Dados dos espacios E y F con la misma dimensión es sencillo construir un isomorfismo entre ellos: si consideramos dos bases $\{u_j\}_{j\in J}$ y $\{v_j\}_{j\in J}$ (nótese que hemos escogido el mismo conjunto de índices dado que los dos espacios tienen la misma dimensión) de E y F respectivamente, entonces

$$\begin{array}{rccc} T : & E & \to & F \\ & u_j & \mapsto & v_j \end{array}$$

determina un isomorfismo entre E y F.

Para la implicación contraria tomemos únicamente una base $\{u_k\}_{k\in K}$ de E. Si existe un isomorfismo $S : E \to F$, esto quiere decir que S es sobreyectiva, por lo que $\operatorname{im}(S) = \operatorname{span}\{f(u_j), j \in J\}$ y $B' = \{f(u_j)\}_{j\in J}$ es un sistema generador de F. Además, S también es inyectiva, lo que implica que B' es linealmente independiente. Por tanto B' es una base de F con el mismo cardinal que las bases de E, y E y F tienen por tanto la misma dimensión. □

El núcleo y la imagen también participan en unos teoremas muy importantes en espacios vectoriales: los teoremas de isomorfia. Enunciemos el más importante.

Teorema 1.3.16 (Primer Teorema de Isomorfía) *Dado un operador lineal $T : E \to F$, la aplicación*

$$\begin{array}{rccc} \overline{T} : & E/\ker(T) & \to & \operatorname{im}(T) \\ & [v] & \mapsto & T(v) \end{array}$$

está bien definida y es un isomorfismo.

De este teorema se deducen algunos resultados estudiados es la asignatura de Álgebra. Primero, una fórmula de dimensiones para un operador $T : E \to F$,

$$\dim(E) = \dim(\ker(T)) + \dim(\operatorname{im}(T)) .$$

Y además, que, si E es finitodimensional, un operador $T : E \to E$ es un isomorfismo si y sólo si es inyectivo, y si y sólo si es sobreyectivo.

Aunque la fórmula sí es cierta en el caso de operadores de dimensión infinita, el último resultado no lo es en general. En dimensión finita, para que un operador $T : E \to E$ sea isomorfismo debe ser sobreyectivo, por lo que $\operatorname{im}(T) = E$ y $\dim(\operatorname{im}(T)) = \dim(E)$, y al núcleo no le queda más opción que tener dimensión 0, y por tanto T debe ser también inyectivo. En el sentido inverso, si el núcleo es cero T es inyectivo y las dimensiones de $\operatorname{im}(T)$ y E coinciden, así que esos espacios han de ser iguales y el operador es también sobreyectivo, por lo que T es biyectivo y es un isomorfismo. Sin embargo, en dimensión infinita, que las dimensiones de E e $\operatorname{im}(T)$ sean infinitas no garantiza que el núcleo sea 0 (informalmente, $0 + \infty = 1 + \infty = ... = n + \infty$), por lo que el operador puede ser sobreyectivo sin ser inyectivo. Además, que E e $\operatorname{im}(T)$ tengan ambos dimensión infinita no garantiza que sean el mismo espacio, por lo que el operador puede ser inyectivo sin ser sobreyectivo.

Ejercicio 1.3.17 En el espacio s de sucesiones complejas, definimos el operador "shift" o traslación a la derecha como

$$\begin{array}{rccc} S_{+1}: & s & \to & s \\ & (z_1, z_2, z_3, z_4, \dots) & \mapsto & (0, z_1, z_2, z_3, \dots) \end{array} .$$

Compruébese que S_{+1} es inyectivo pero no es sobreyectivo, y por tanto no es un isomorfismo. Determínese $S_{+1}(s)$.

Ejercicio 1.3.18 Demuéstrese que el "shift" a la izquierda

$$\begin{array}{rccc} S_{-1}: & s & \to & s \\ & (z_1, z_2, z_3, z_4, \dots) & \mapsto & (z_2, z_3, z_4, z_5, \dots) \end{array} ,$$

es sobreyectivo pero no es inyectivo. Detérminese su núcleo.

Dada una aplicación lineal inyectiva $T : E \to F$, se puede definir la aplicación inversa[11] $T^{-1} : \operatorname{im}(T) \to E$, que resulta ser también un operador lineal.

El operador T^{-1} así definido es biyectivo.

[11]Nótese que la aplicación inversa estrictamente puede no existir, ya que T debería ser biyectiva para tener una inversa propia. Sin embargo, si nos restringimos al subespacio $T(E) = \operatorname{im}(T)$ de F, T ya resulta biyectiva. Cuando $E = F$ el conjunto de operadores de E en E tiene estructura de grupo con la composición. En este caso, esta inversa es llamada a veces inversa por la izquierda, dado que $T^{-1}T = \mathbb{I}$, que es el elemento neutro del grupo, pero $TT^{-1} = \mathbb{I}|_{T(E)}$. Si $T(E) = E$ entonces en este último caso tenemos que T^{-1} es también inversa por la derecha, y por tanto puede ser llamada propiamente inversa.

Por último, resultará útil considerar el conjunto de todos los operadores lineales entre dos espacios, y darle estructura de espacio vectorial.

Proposición 1.3.19 *Dados dos espacios vectoriales E y F, el conjunto $\mathcal{L}(E,F)$ de todos los operadores lineales $T : E \to F$, con la suma habitual de funciones y el producto por escalares habitual, tiene estructura de espacio vectorial.*

Cuando los espacios E y F coincidan, llamaremos al espacio de operadores lineales simplemente $\mathcal{L}(E)$. Es decir, $\mathcal{L}(E) = \mathcal{L}(E,E)$.

Día 3

1.3.2 Funcionales lineales, espacio dual algebraico

Entre los operadores lineales, hay una familia particular cuyo espacio imagen es el cuerpo de escalares. Por ejemplo,

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{C}^3 & \to & \mathbb{C} \\ & (z_1,z_2,z_3) & \mapsto & 2z_1 - iz_2 + 3e^{\sqrt{2}i}z_3 \end{array}.$$

Definición 1.3.20 (Funcional o forma lineal) *(ALG) Llamaremos* **funcionales lineales** *o* **formas lineales** *a las aplicaciones lineales de un espacio vectorial E en su cuerpo de definición.*

Los funcionales lineales son aplicaciones lineales, considerando el cuerpo $\mathbb{K}$ como un $\mathbb{K}$-espacio vectorial 1-dimensional.

En la sección anterior ya vimos un funcional lineal en el ejemplo 1.3.9, aunque no estaba definido en todo el espacio. En esta sección, consideraremos únicamente funcionales lineales que estén definidos en todo el espacio origen.

Ejemplo 1.3.21 La función evaluación en 0,

$$\begin{array}{rccc} f = ev_0: & \mathcal{C}(\mathbb{K}) & \to & \mathbb{K} \\ & g & \mapsto & g(0) = ev_0(g) \end{array},$$

o en cualquier otro punto, es un funcional lineal en $\mathcal{C}(\mathbb{K})$.

Ejemplo 1.3.22 El conjunto c de sucesiones complejas convergentes es un espacio vectorial, y la función límite

$$\begin{array}{rccc} \lim: & c & \to & \mathbb{C} \\ & (z_n)_{n=1}^{\infty} & \mapsto & \lim_{n\to\infty} z_n \end{array},$$

es un funcional lineal en c.

Al igual que hicimos con los operadores, también se puede considerar el espacio de todos los funcionales lineales $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ que tiene un nombre especial: es el espacio dual algebraico.

Definición 1.3.23 (Espacio dual algebraico) *Dado un espacio vectorial E sobre un cuerpo $\mathbb{K}$, el* **espacio dual algebraico** $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ *es el espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ formado por todos los funcionales lineales $f : E \to \mathbb{K}$.*

Como comentamos anteriormente (párrafos previos a la observación 1.3.8), para determinar una aplicación lineal basta saber cuál es la imagen bajo la aplicación de los elementos de una base lineal. Los funcionales lineales son aplicaciones lineales, por lo que este hecho sigue siendo válido.

Por tanto, dado un espacio E, y una base lineal $A = \{e_j,\, j \in J\}$ de E, podemos definir para cada $j \in J$ el siguiente funcional

$$\begin{array}{rccl} f_j : & E & \to & \mathbb{K} \\ & e_j & \mapsto & 1 \\ & e_k & \mapsto & 0 \quad \forall k \neq j \ , \end{array} \tag{2}$$

o, expresado de manera más compacta, $f_j(e_k) = \delta_{j,k}$. Este funcional actúa sobre cada vector v dando como resultado el coeficiente que acompaña a e_j en la expresión $v = \sum_{j \in J} v_j e_j$. Por tanto, $f_j(v)$ no es más que la coordenada j-ésima del vector v.

En el espacio $\mathbb{K}^n$ de n-uplas, con la base canónica $B = \{e_j,\, j = 1, \ldots, n\}$ todos los funcionales lineales tienen la forma

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n \, .$$

Como $f_j(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_j$, todo funcional lineal f se puede poner como combinación lineal de los funcionales $\{f_j,\, j = 1, \ldots, n\}$:

$$f = \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \cdots + \alpha_n f_n \, .$$

Por tanto, $\{f_j,\, j = 1, \ldots, n\}$ es una base lineal de $\mathbb{K}^{n*}$, llamada base dual de B.

Esto se puede extender a cualquier espacio finitodimensional y a cualquier base lineal del mismo, dando lugar al siguiente resultado.

Teorema 1.3.24 *Sea E un espacio vectorial de dimensión finita, y una base lineal suya $B = \{e_j,\, j = 1, \ldots, n\}$. Entonces el conjunto $\{f_j,\, j = 1, \ldots, n\}$, con los f_j definidos según la ecuación (2) anterior, es una base lineal del espacio dual algebraico E^*. Consecuentemente, E y E^* tienen la misma dimensión y son isomorfos.*

Ampliación

Observación 1.3.25 Este resultado no es cierto en dimensión infinita. Dada una base lineal A de un espacio E, los funcionales f_j sí son linealmente independientes, pero no generan todo el espacio dual algebraico E^*. Veamos como ejemplo

qué sucede con el espacio c_{00} del ejercicio 1.2.5, que es un espacio de dimensión infinita del tipo más sencillo que hay al tener base lineal numerable. El funcional

$$\begin{array}{rccc} T: & c_{00} & \to & \mathbb{C} \\ & (z_j)_{j=1}^{\infty} & \mapsto & \sum_{j=1}^{\infty} z_j \end{array},$$

es lineal y está bien definido[12] en todo c_{00}, ya que los elementos de c_{00} tienen la forma

$$z = (z_1, z_2, \dots, z_k, 0, 0, 0, 0, \dots),$$

lo que hace que la serie sea en realidad una suma finita para cada vector y, por tanto, convergente. Sin embargo, T no se puede poner como combinación lineal finita de los f_j, pues recordemos que $f_j(z) = z_j$, y necesitaríamos infinitos de ellos para llegar a tener T. Por tanto, en el caso de c_{00}, tenemos que para la base canónica definida en el ejercicio los elemenos $\{f_j, j \in \mathbb{N}\}$ no forman una base lineal[13] de E^*.

Un razonamiento similar al anterior se puede seguir con cualquier espacio de dimensión infinita y cualquier base lineal suya, escogiendo una familia numerable de esa base y llegando a la misma conclusión. De todos modos, con el ejemplo anterior nos conformaremos en este curso.

Por último, veamos cómo una aplicación lineal entre dos espacios induce una aplicación entre sus duales. Si tenemos una aplicacion lineal $T : E \to F$ y un funcional lineal $f : F \to \mathbb{K}$, entonces $f \circ T : E \to \mathbb{K}$ es también lineal, por lo que es un funcional lineal en E. Fijado T, esto se puede hacer para cada funcional $f \in F^*$. Además, $(\lambda f + \mu g) \circ T = \lambda f \circ T + \mu g \circ T$, por lo que la asignación

$$f \mapsto f \circ T$$

es un operador de F^* en E^*.

1.3.3 Cálculos matriciales en espacios finitodimensionales

Los cálculos en espacios vectoriales de dimensión finita se pueden realizar mediante operaciones matriciales.

Dada una base lineal $B = \{e_j,\ j = 1, \dots, n\}$ de un espacio E de dimensión n, la aplicación coord_B (ALG) que asigna a cada vector de E sus coordenadas respecto a B,

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{coord}: & E & \to & \mathbb{K}^n \\ & v = \sum_{j=1}^{n} v_j e_j & \mapsto & \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \dots \\ v_n \end{pmatrix} \end{array}$$

[12] Recuérdese el ejercicio 1.3.9.

[13] De hecho, el dual algebraico de c_{00} es isomorfo al espacio s de sucesiones complejas, que no tiene ninguna base lineal numerable.

es un isomorfismo lineal.

Este isomorfismo permite "traducir", dadas dos bases lineales B_E y B_F de dos espacios finitodimensionales, cualquier aplicación lineal $A : E \to F$ entre dos espacios vectoriales en una aplicación entre los respectivos espacios de coordenadas.

De todos modos, nos centraremos directamente en los espacios $\mathbb{K}^n$, con los vectores descritos como columnas, y esencialmente usaremos la base canónica. En este caso, cualquier matriz $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ induce una aplicación lineal de $\mathbb{K}^n$ en $\mathbb{K}^m$

$$\begin{array}{rccc} T_A : & \mathbb{K}^n & \to & \mathbb{K}^m \\ & v & \mapsto & Av \end{array},$$

es decir,

$$T_A \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}.$$

En el sentido contrario, toda aplicación lineal de $\mathbb{K}^n$ en $\mathbb{K}^m$ es de esta forma para alguna matriz $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$.

La asignación $A \mapsto T_A$ es lineal, por lo que la correspondencia anterior hace que $\mathcal{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$ y $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ sean linealmente isomorfos, y que también $\mathcal{L}(E, F)$ y $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ sean linealmente isomorfos para dos $\mathbb{K}$-espacios E y F cualesquiera de dimensión n y m respectivamente.

1.3.4 Expresión matricial de funcionales lineales

Los funcionales lineales no son una excepción. Por tanto, cualquier funcional lineal sobre $\mathbb{K}^n$ viene inducido por una matriz fila $A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix}$ de tamaño $1 \times n$, tomando $\{1\}$ como base del espacio imagen, el cuerpo $\mathbb{K}$:

$$\begin{array}{rccc} f_A : & \mathbb{K}^n & \to & \mathbb{K} \\ & \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \end{array}.$$

Esto hace que muchas veces se vea a los elementos del espacio $\mathbb{K}^{n*}$ como el espacio de vectores fila

$$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n), \ \alpha_j \in \mathbb{K}.$$

Dado un funcional lineal f y una base lineal $\{e_j, j = 1, \ldots, n\}$, su matriz (o vector fila) asociado viene determinado por

$$(\alpha_1 = f(e_1), \alpha_2 = f(e_2), \ldots, \alpha_n = f(e_n)).$$

Además, estas serán sus coordenadas respecto a la base dual $\{f_j, j = 1, \ldots, n\}$ de la base $\{e_j, j = 1, \ldots, n\}$ (ver ecuación (2) para la definición de base dual).