

ÍNDICE GENERAL

INTRODUCCIÓN	13
CÁLCULO VECTORIAL	17
Escalares y vectores. Operaciones con vectores. Campos escalares y vectoriales. Sistemas de coordenadas. Transformación de coordenadas. Vector de posición. Derivada de un vector. Integrales curvilíneas. Integral de superficie. Integral de volumen. Gradiente. Divergencia. Rotacional. Teorema de Stokes. Relaciones vectoriales. Teorema de Helmholtz. Función delta de Dirac.	
UNIDAD DIDÁCTICA I	93
CAMPO ELÉCTRICO I	95
Carga eléctrica. Ley de Coulomb. Campo eléctrico. Agrupaciones de carga: Principio de superposición.	
CAMPO ELÉCTRICO II	117
Circulación del campo eléctrico: Rotacional. Potencial electrostático. Gradiente de un potencial. Potencial debido a un conjunto de cargas. Conductores. Teorema de Gauss: Aplicaciones.	
DIPOLOS Y MULTIPOLOS	155
Dipolo eléctrico: Campo y potencial. Potencial debido a una distribución de carga: Momentos multipolares.	
DIELÉCTRICOS	181
Polarización eléctrica. Campo y potencial debido a un material polarizado. Vector desplazamiento. Susceptibilidad y permitividad eléctrica. Clases de dieléctricos. Ruptura en dieléctricos. Condiciones en los límites.	
UNIDAD DIDÁCTICA II	225
SISTEMAS DE CONDUCTORES	227
Características de un conductor. Sistemas de conductores. Coeficientes de potencial. Coeficientes de capacidad e influencia. Condensadores. Asociación de condensadores.	
ENERGÍA ELECTROSTÁTICA	253
Energía electrostática de un sistema de cargas puntuales. Energía electrostática de una distribución continua de carga. Energía electrostática de	

un sistema de conductores cargados. Energía electrostática en función de los vectores de campo. Fuerza electrostática. Presión electrostática.

PROBLEMAS ELECTROSTÁTICOS I 287

Ecuaciones de Laplace y Poisson. Teorema de unicidad. Solución de problemas electrostáticos por el método de imágenes.

PROBLEMAS ELECTROSTÁTICOS II 317

Método de separación de variables. Coordenadas cartesianas. Coordenadas cilíndricas. Coordenadas esféricas. Métodos numéricos. Solución de la ecuación de Poisson.

UNIDAD DIDÁCTICA III 351

CORRIENTE ELÉCTRICA 353

Corriente y densidad de corriente eléctrica. Ecuación de continuidad: primera ley de Kirchhoff. Ley de Ohm: resistencia de un conductor. Ley de Joule. Condiciones en los límites. Resistencia y capacidad. Tiempo de relajación. Fuerza electromotriz. Segunda ley de Kirchhoff. Asociación de resistencias. Análisis de redes. Teoremas de redes.

CAMPO MAGNÉTICO I 401

Experimento de Oersted. Ley de Biot y Savart. Campo debido a una carga en movimiento. Ley de Ampère. Fuerza de Lorentz. Fuerza sobre una corriente.

CAMPO MAGNÉTICO II 433

Teorema del flujo de $\mathbf{B}$: Forma integral y diferencial. Teorema de la circulación: Forma integral y diferencial. Potencial vector magnético. Condiciones en los límites.

APÉNDICES

A) RELACIONES MATEMÁTICAS I 475

B) RELACIONES MATEMÁTICAS II 481

C) TABLAS 491

BIBLIOGRAFÍA 495

GLOSARIO 499

ÍNDICE DE MATERIAS 517

6.1. CONDUCTORES

6.1.1. Características

Aunque ya nos hemos referido a ellas en capítulos anteriores, vamos a mostrar ahora las características más importantes de los conductores.

De una forma genérica podemos definir un conductor como un cuerpo sobre el que las cargas eléctricas se pueden mover libremente bajo la influencia de un campo eléctrico. Los casos más comunes son los metales como el cobre, plata, oro, aluminio, etc.

En condiciones estáticas el campo eléctrico dentro de un conductor es nulo, de lo contrario se estarían moviendo las cargas. Si el campo es nulo, la integral de línea a lo largo de cualquier camino será nula, por lo que el conductor es un volumen que está a un potencial y la superficie que lo limita es por tanto una superficie equipotencial. En resumen, en el interior de un conductor $\mathbf{E} = 0$ y $V = \text{constante}$.

Como consecuencia de ser equipotencial la superficie del conductor, y que las líneas de campo son perpendiculares a las equipotenciales, se deduce que el campo eléctrico es normal a dicha superficie en los puntos exteriores muy próximos a ella.

Cuando ponemos a un conductor en presencia de un campo eléctrico se produce, en un tiempo muy corto, dependiente de su conductividad, una redistribución de las cargas libres del conductor, de forma que al terminar el proceso el campo es nulo en su interior. Estas cargas se sitúan sobre la superficie del conductor y se conocen como cargas inducidas. Las cargas inducidas producen un campo en el interior del conductor que contrarresta el campo externo, de manera que el campo electrostático en el interior es cero.

Si depositamos una carga Q sobre un conductor, esta carga se distribuye por la superficie del conductor, siendo nula la carga neta en el interior. Esto se demostró en el apartado 3.7 aplicando el teorema de Gauss sobre una superficie interior muy próxima a la del conductor.

Campo en la superficie de un conductor cargado

Como hemos visto en el párrafo anterior la carga en un conductor se distribuye por la superficie. Si consideramos que la densidad de carga superficial es σ , podemos deducir el campo en la parte exterior de la superficie aplicando las condiciones en los límites expresadas por la ecuación (5.34) deducida en el capítulo anterior,

$$\mathbf{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon} \mathbf{n} \quad (6.1)$$

Donde $\mathbf{n}$ es el vector unitario normal a la superficie en el punto considerado. La permitividad ε depende del medio que rodea al conductor, si está en el vacío será igual a ε_0 .

Apantallamiento

Cuando un conductor K tiene un hueco en su interior, por ejemplo una esfera metálica hueca, la carga sobre dicho conductor se distribuye sobre la superficie exterior, siempre que en el hueco no exista carga. Como consecuencia el campo en el interior del conductor y en el hueco es nulo, por tanto su potencial es constante. Si en el hueco situamos un conductor descargado M , como indica la figura 6.1a, dicho conductor se mantiene al potencial del conductor que le rodea, es decir, se mantiene al potencial V_0 sin que el campo creado por el conductor N con carga Q pueda afectarlo. Este fenómeno se conoce como efecto de **apantallamiento**, que es de gran utilidad ya que si unimos el conductor exterior a tierra, *las variaciones externas de campo no afectan al conductor M situado en el interior*.

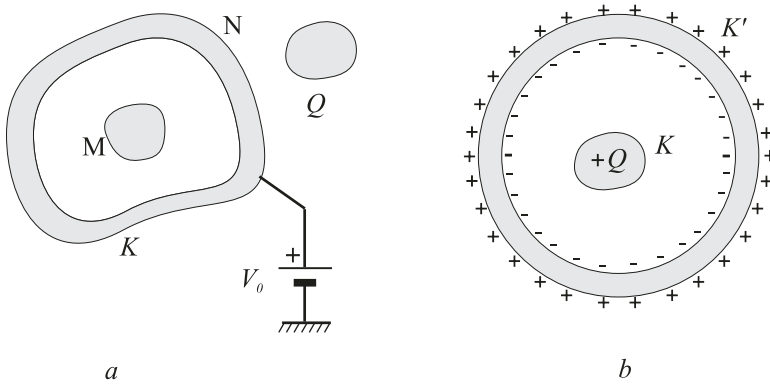


Figura 6.1

Consideremos ahora el caso de dos conductores K y K' como indica la figura 6.1b. K' es una capa esférica conductora. En este caso el conductor interior K tiene una carga Q y el exterior K' no tiene carga neta. El conductor con carga Q induce sobre la superficie interior del conductor K' una carga total $-Q$ distribuida de manera que en el interior de la capa conductora K' no existe campo en condiciones estáticas. Sobre cualquier superficie en el interior de la capa $\mathbf{E} = 0$, y el teorema de Gauss muestra que,

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \frac{1}{\varepsilon_o} (Q + Q_{ind}) = 0$$

Es decir, $Q_{ind} = -Q$.

Hemos supuesto que el conductor K' no tiene carga neta, por tanto debe haber una carga Q distribuida en dicho conductor, ya que la aplicación del teorema de Gauss en una superficie exterior a los dos conductores indica que,

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \frac{1}{\varepsilon_o} Q$$

Cabe preguntarse dónde y cómo se distribuye esta carga en la capa K' . Por una parte sabemos que en condiciones estáticas no puede existir carga en el interior de la capa conductora, por tanto debe distribuirse por la superficie exterior de dicha capa. Por otra, dado que las cargas inducidas $Q_{ind} = -Q$ se distribuyen de manera que anulan el campo en el interior de la capa, es decir, sobre la superficie interna de la capa. La distribución de la carga Q sobre la superficie externa de la capa esférica no depende de la distribución de la carga inducida en la superficie interna y por tanto no depende de la forma y posición del conductor interno K con carga Q . Sólo depende de la forma de la superficie externa de la capa K' .

En el ejemplo propuesto, como la superficie exterior de la capa es una esfera, la carga se distribuye sobre dicha superficie esférica de manera uniforme. Para demostrarlo tenemos en cuenta que la capa K' es equipotencial y como consecuencia el campo será normal en cada punto a la superficie exterior; es decir, el campo tiene dirección radial en todos los puntos de la superficie esférica,

$$\mathbf{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_o} \mathbf{u}_r \quad (6.2)$$

Si el campo es radial, la carga que lo genera debe tener simetría esférica, por tanto la carga se distribuye de manera uniforme por la superficie externa de la capa esférica K' .

Capacidad de un conductor

Cuando a un conductor aislado se le aplica una carga, ésta se distribuye de manera que la superficie del conductor sea equipotencial. Si duplicamos la carga, la aplicación del principio de superposición nos permite deducir que se duplicará el potencial del conductor; pero la manera de distribuirse

la carga por el conductor es la misma, ya que la forma del conductor no cambia, y en consecuencia tampoco las equipotenciales que lo rodean ni las líneas de campo. La distribución de la carga sobre la superficie de un conductor aislado es independiente de la cantidad de carga y su potencial es proporcional a la carga total sobre dicho conductor. Se llama **capacitancia o capacidad** a la *relación entre la carga que almacena Q y el potencial V que adquiere el conductor*.

$$C = \frac{Q}{V} \quad (6.3)$$

La capacidad C es un factor geométrico que depende de la forma del conductor, pero no de la carga o potencial que se aplica.

*A un conductor aislado, por su capacidad de almacenar carga cuando se le aplica un potencial determinado, se le denomina **capacitor**.*

Como aplicación calcularemos la capacidad de una esfera aislada de radio R . Cuando sobre una esfera existe una carga Q , su potencial es,

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \frac{Q}{R}$$

La capacidad será,

$$C = \frac{Q}{V} = 4\pi\epsilon_o R$$

De acuerdo con la definición, la unidad de capacidad en el SI será el culombio partido por voltio [C/V], que recibe el nombre de **faradio** (F). Esta unidad es muy grande por lo que se utilizan submúltiplos como el microfaradio ($1\mu\text{F} = 10^{-6}\text{F}$) y el picofaradio ($1\text{pF} = 10^{-12}\text{F}$).

6.2. SISTEMAS DE CONDUCTORES

En el apartado anterior hemos visto como el potencial de un conductor está relacionado linealmente con la carga que soporta a través de la capacidad del conductor, un factor geométrico que depende de las dimensiones y forma de dicho conductor.

Si en lugar de uno existen varios conductores, el potencial, tanto en los propios conductores como en los puntos entre ellos dependerá de las cargas que soportan todos los conductores.

Para fijar las ideas vamos a suponer que tenemos tres conductores como muestra la figura 6.2, cuyas cargas respectivas son Q_1 , Q_2 y Q_3 . La carga

se distribuirá por las superficie, de manera que las densidades de carga superficial son, $\sigma_1(\mathbf{r}'_1)$, $\sigma_2(\mathbf{r}'_2)$ y $\sigma_3(\mathbf{r}'_3)$, que, en general, no son uniformes y dependen del punto de la superficie considerado.

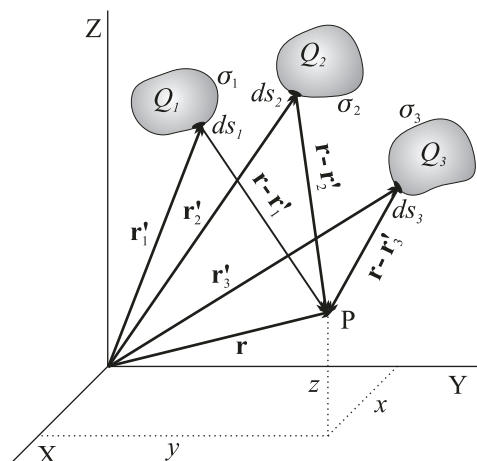


Figura 6.2

El potencial en un punto P, utilizando la ecuación (3.15), será,

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^3 \int_{S_i} \frac{\sigma_i(\mathbf{r}'_i) ds_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'_i|} \quad (6.4)$$

El potencial depende de una suma de términos, y cada uno es la contribución de la carga en el correspondiente conductor. La relación entre potencial y cargas es compleja, depende de la geometría de cada conductor y su posición con respecto a los demás; pero la relación entre cargas y potencial es lineal y los coeficientes dependen de la geometría del conjunto. El cálculo de dichos coeficientes es tanto más difícil cuanto mas complicada sea la simetría del sistema.

El punto P es genérico, de modo que la ecuación (6.4) también sirve para expresar el potencial en los propios conductores, con la particularidad que sobre todo conductor es constante.

6.2.1. Coeficientes de potencial

Dada la relación lineal entre cargas y potenciales, podemos expresar el potencial en cada uno de los conductores en forma de sistema de ecuaciones que relacionan cargas y potenciales mediante unos coeficientes p_{ij} , conoci-

dos con el nombre de **coeficientes de potencial**. La citada relación en el ejemplo que hemos tomado es de la forma,

$$\begin{aligned} V_1 &= p_{11} Q_1 + p_{12} Q_2 + p_{13} Q_3 \\ V_2 &= p_{21} Q_1 + p_{22} Q_2 + p_{23} Q_3 \\ V_3 &= p_{31} Q_1 + p_{32} Q_2 + p_{33} Q_3 \end{aligned} \quad (6.5)$$

Los **coeficientes de potencial** p_{ij} son factores que dependen únicamente de la geometría del sistema y determinan la relación lineal que existe entre las cargas y potenciales en los distintos conductores que lo forman.

En un caso más general con N conductores el sistema de ecuaciones sería,

$$V_i = \sum_{j=1}^N p_{ij} Q_j \quad ; \quad \text{con } i = 1, 2, \dots, N \quad (6.6)$$

En número de ecuaciones será N , y el de coeficientes N^2 .

Propiedades de los coeficientes de potencial

Las propiedades de dichos coeficientes son las siguientes:

$$p_{ij} > 0 \quad (6.7)$$

La razón es que toda carga positiva en un conductor origina un potencial positivo en cualquier conductor próximo o alejado de él. Es decir, todos los coeficientes p_{ij} son positivos cualesquiera que sean i y j .

Los coeficientes son simétricos,

$$p_{ij} = p_{ji} \quad (6.8)$$

Para demostrar esta simetría vamos a recurrir a un argumento energético. Suponemos que inicialmente ninguno de los conductores del ejemplo propuesto está cargado. Iniciamos el proceso cargando el conductor (1). En el cálculo de la energía necesaria para que adquiriera una carga final Q_1 , suponemos que en un estado intermedio tiene una carga q a la que corresponde un potencial,

$$V_1 = p_{11} q$$

Los demás conductores no tienen carga, por tanto no contribuyen al potencial. El trabajo necesario para incrementar la carga en dq será,

$$dW = V_1 dq = p_{11} q dq$$