# ÍNDICE GENERAL

TEMA 5

# ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS: PROPAGACIÓN LIBRE

## RESUMEN

### Objetivos generales

Estudiar la propagación libre del campo electromagnético en distintos medios: dieléctricos perfectos, medios con pequeñas pérdidas y medios conductores. Además estudiaremos la propagación del campo electromagnético en la frontera entre dos medios.

### Objetivos específicos

- Ecuación de ondas.
- Campos armónicos. Permitividad compleja. Factor de propagación complejo.
- Propagación de ondas planas en medios sin pérdidas. Potencia transmitida.
- Propagación en medios con pérdidas.
- Buen conductor. Profundidad de penetración.
- Dieléctrico de bajas pérdidas.
- Polarización de una onda plana.
- Paquete de ondas. Velocidad de grupo.
- Reflexión y transmisión de ondas planas: incidencia normal.
- Reflexión y transmisión de ondas planas: incidencia oblicua.

## Requisitos previos

Manejar los conceptos de campo vectorial y escalar, campo eléctrico, campo magnético. Dominar el cálculo vectorial integral y diferencial. Notación fasorial.

## INTRODUCCIÓN

En este tema vamos a estudiar la propagación del campo electromagnético a través del espacio libre y en medios materiales. Veremos que, a partir de las ecuaciones de Maxwell y desacoplando los campos eléctrico y magnético, obtenemos ecuaciones de ondas para cada uno de los campos. Esto significa que el campo electromagnético se propaga en el espacio como un fenómeno ondulatorio y el estudio de esta propagación es el objetivo del presente tema. Las ondas luminosas emitidas por el sol y las transmisiones de radio emitidas por antenas de telecomunicaciones son ejemplos típicos.

Consideraremos la propagación en medios sin pérdidas, es decir, en un dieléctrico perfecto (como el aire) y en medios con pérdidas que son medios caracterizados por una conductividad finita y en los que una parte de la potencia transportada por la onda electromagnética se disipa en forma de calor, de forma que la onda se atenúa conforme se propaga.

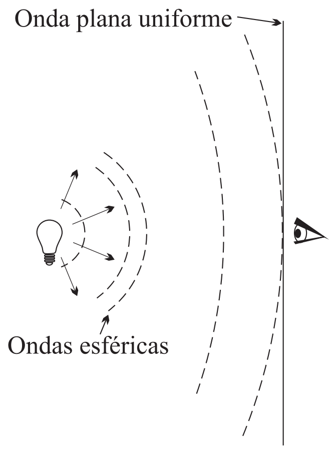


Figura 5.1. Las ondas emitidas por una fuente electromagnética presentan frentes de onda esféricos en las proximidades de la fuente, pero para un observador lejano, el frente de ondas parece aproximadamente plano

Cuando una fuente emite energía, ésta se propaga hacia fuera en forma de ondas esféricas como se ilustra en la figura 5.1. Para un observador suficientemente alejado de la fuente, el frente de ondas aparece aproximadamente plano, como si fuera una parte de una onda plana uniforme con propiedades uniformes en todos los puntos del plano tangente al frente de ondas. La propagación de ondas planas puede describirse mediante coordenadas cartesianas con las que es más fácil trabajar matemáticamente que con las coordenadas esféricas necesarias para describir la propagación de una onda esférica. Por consiguiente, aunque en rigor una onda plana no existe, resulta una buena aproximación para estudiar la propagación de ondas desde el punto de vista físico.

## 1. ECUACIÓN DE ONDAS

De todas las posibles soluciones de la ecuación de ondas para los campos eléctrico y magnético, nos limitaremos a las más sencillas que corresponden a las denominadas ondas planas. Esto no constituye una acusada limitación ya que, como hemos comentado, las ondas esféricas se pueden considerar como planas a distancias suficientemente grandes de las fuentes porque en estas condiciones, el radio de curvatura de la superficie esférica de fase constante de la onda electromagnética es muy grande comparado con las dimensiones de la región del espacio donde se considera el campo.

Para obtener la ecuación de ondas partiremos de las ecuaciones de Maxwell y de las ecuaciones constitutivas:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \tag{5.1}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \tag{5.2}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \tag{5.3}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \tag{5.4}$$

$$\mathbf{J} = \gamma \mathbf{E} \qquad ; \qquad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \qquad ; \qquad \mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} \tag{5.5}$$

En este tema no trataremos de relacionar las ondas con sus fuentes, cuestión que queda para más adelante. Por tanto, consideramos una región del espacio libre de cargas. Esto significa que la densidad volumétrica de carga es nula en la región que estamos considerando, $\rho = 0$. Además, suponemos que tratamos con medios lineales, homogéneos e isótropos, lo que se traduce en que tanto la permitividad eléctrica $\varepsilon$ como la permeabilidad magnética $\mu$ son escalares independientes de las coordenadas y del tiempo.

Si aplicamos el rotacional a la expresión diferencial de la ley de Faraday, ec. (5.2), y hacemos uso de la relación vectorial (C.44) tenemos

$$\nabla(\nabla\cdot\mathbf{E})-\nabla^2\mathbf{E}=-\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\times\mathbf{B})$$

Puesto que estamos considerando una región del espacio libre de fuentes, $\rho=0$, entonces el primer término de esta expresión es nulo. Teniendo en cuenta el teorema de Ampère y la ecuación constitutiva para el campo magnético, la expresión anterior queda

$$\nabla^2\mathbf{E}=\mu\frac{\partial}{\partial t}\left(\mathbf{J}+\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}\right)$$

Finalmente, haciendo uso de las ecuaciones constitutivas (5.5), obtenemos

$$\nabla^2\mathbf{E}-\mu\gamma\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}-\mu\varepsilon\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2}=0 \tag{5.6}$$

que es la ecuación de ondas homogénea para el campo eléctrico. Normalmente podremos despreciar el segundo o el tercer término dependiendo del medio que consideremos. En un medio no conductor, el segundo término se anula y queda la ecuación de ondas típica cuya solución es una onda que se propaga con velocidad $v=1/\sqrt{\varepsilon\mu}$ . En un medio conductor, el tercer término es normalmente despreciable y queda una ecuación del mismo tipo que la que rige la propagación del calor por conducción o difusión (ecuación de difusión para el campo electromagnético).

Si en lugar de aplicar el rotacional a la expresión diferencial de la ley de Faraday lo hacemos a la expresión diferencial del teorema de Ampère, ec. (5.1), obtenemos una ecuación análoga para el campo magnético y para la que son válidas las mismas consideraciones expuestas arriba.

$$\nabla^2\mathbf{H}-\mu\gamma\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t}-\mu\varepsilon\frac{\partial^2\mathbf{H}}{\partial t^2}=0 \tag{5.7}$$

Podemos concluir este apartado diciendo que las ecuaciones (5.6) y (5.7) son las que rigen la propagación de los campos **E** y **H** en un medio lineal, isótropo, homogéneo y libre de cargas, sea conductor o no. Ahora bien, las soluciones de estas ecuaciones de ondas deben de cumplir también las relaciones de Maxwell, ya que, aunque las ecuaciones de ondas se deducen de las de Maxwell, el recíproco no es cierto. De hecho, estas ecuaciones se han obtenido mediante procesos de diferenciación en los que se ha perdido información. En definitiva, los coeficientes de las soluciones de las ecuaciones (5.6) y (5.7) han de obtenerse aplicando las condiciones de contorno adecuadas, las cuales a su vez, son únicamente derivables de las ecuaciones de Maxwell.

## Campos armónicos

En muchos casos prácticos los campos electromagnéticos son funciones armónicas del tiempo y de hecho, si no lo son, siempre es posible descomponerlos en suma de armónicos con distinta amplitud, fase y frecuencia de acuerdo con el teorema de Fourier. Consideremos un campo electromagnético que varía armónicamente con el tiempo

$$\mathbf{E}(r,t) = \mathbf{E}_o(\mathbf{r}) \cos \omega t$$

$$\mathbf{H}(r,t) = \mathbf{H}_o(\mathbf{r}) \cos(\omega t + \varphi)$$

donde, en general, el campo magnético estará desfasado con respecto al eléctrico. $\mathbf{E}_o$ y $\mathbf{H}_o$ son las amplitudes de cada uno de los campos y son, en principio, funciones de las coordenadas espaciales $\mathbf{r}$.

En estos casos, es conveniente emplear notación compleja para eliminar la dependencia temporal de forma que los campos eléctrico y magnético se representan mediante magnitudes fasoriales, $\widehat{\mathbf{E}}$ y $\widehat{\mathbf{H}}$ independientes del tiempo,

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_o \cos \omega t \quad \to \quad \widehat{\mathbf{E}} = \mathbf{E}_o$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_o \cos(\omega t + \varphi) \quad \to \quad \widehat{\mathbf{H}} = \mathbf{H}_o e^{j\varphi}$$

De esta forma, las expresiones de los campos instantáneos se obtienen añadiendo la dependencia temporal y calculando la parte real. Es decir

$$\mathbf{E}(r,t) = \Re\left\{\widehat{\mathbf{E}} e^{j\omega t}\right\}$$

$$\mathbf{H}(r,t) = \Re\left\{\widehat{\mathbf{H}} e^{j\omega t}\right\}$$

Para un medio libre de cargas las ecuaciones de Maxwell en el dominio de la frecuencia vienen dadas por las siguientes expresiones:

$$\nabla \times \widehat{\mathbf{H}} = \widehat{\mathbf{J}} + j\omega\varepsilon\widehat{\mathbf{E}} \tag{5.8}$$

$$\nabla \times \widehat{\mathbf{E}} = -j\omega\mu\widehat{\mathbf{H}} \tag{5.9}$$

$$\nabla \cdot \widehat{\mathbf{E}} = 0 \tag{5.10}$$

$$\nabla \cdot \widehat{\mathbf{H}} = 0 \tag{5.11}$$

y operando de forma análoga a como se hizo al inicio de la sección, obtenemos la ecuación de ondas homogénea para el campo eléctrico

$$\nabla^2\widehat{\mathbf{E}} + \left(1 - j\frac{\gamma}{\varepsilon\omega}\right)\varepsilon\mu\omega^2\widehat{\mathbf{E}} \tag{5.12}$$

y otra similar para el campo magnético.

### Permitividad compleja

A partir de la expresión (5.12) definimos la permitividad compleja como

$$\varepsilon_c = \varepsilon\left(1 - j\frac{\gamma}{\varepsilon\omega}\right) \tag{5.13}$$

En función de este parámetro, la ecuación de ondas homogénea resulta

$$\nabla^2\widehat{\mathbf{E}} + \varepsilon_c\mu\omega^2\widehat{\mathbf{E}} = 0$$

A menudo, la permitividad compleja se escribe en función de una parte real $\varepsilon'$ y una parte imaginaria $\varepsilon''$

$$\varepsilon_c = \varepsilon' - j\varepsilon''$$

con

$$\varepsilon' = \varepsilon$$

$$\varepsilon'' = \frac{\gamma}{\omega}$$

Para un medio sin pérdidas con $\gamma = 0$ se desprende que $\varepsilon'' = 0$ y $\varepsilon_c = \varepsilon' = \varepsilon$.

Por otro lado, el factor

$$k_c = \omega\sqrt{\varepsilon_c\mu} = \omega\sqrt{\left(1 - j\frac{\gamma}{\omega}\right)\varepsilon\mu} \tag{5.14}$$

se denomina **factor de propagación complejo** por razones que serán obvias más adelante. En función del factor de propagación complejo, la ecuación de ondas homogénea para el fasor del campo eléctrico queda

$$\nabla^2\widehat{\mathbf{E}} + k_c^2\widehat{\mathbf{E}} = 0 \tag{5.15}$$

y otra similar para el fasor del campo magnético.

## 2. PROPAGACIÓN DE ONDAS PLANAS EN UN MEDIO SIN PÉRDIDAS

Las propiedades de propagación de una onda electromagnética están regidas, según se desprende de la ecuación (5.12) por la frecuencia angular y los tres parámetros constitutivos del medio. Si un medio es no conductor ($\gamma = 0$), la onda se propagará a través del medio sin atenuarse y entonces decimos que se trata de un medio sin pérdidas o dieléctrico perfecto. En este caso, el factor de propagación complejo se reduce a

$$k_c = k = \omega\sqrt{\varepsilon\mu}$$

y la ecuación de ondas homogénea queda

$$\nabla^2\widehat{\mathbf{E}} + k^2\widehat{\mathbf{E}} = 0 \tag{5.16}$$

que es la ecuación de ondas típica cuya solución es una onda que se propaga con una velociadad $v = 1/\sqrt{\varepsilon\mu}$ y cuyo número de onda es $k = \omega\sqrt{\varepsilon\mu}$. Si expresamos el campo eléctrico en coordenadas cartesianas, cada componente del campo verificará una ecuación similar. Así, para la componente $x$ del campo eléctrico tendremos

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial z^2}\right)\widehat{E}_x + k^2\widehat{E}_x = 0$$

y expresiones similares para $\widehat{E}_y$ y $\widehat{E}_z$

Como se comentó al inicio del tema, nos limitaremos a estudiar la propagación de ondas planas. Una onda plana uniforme se caracteriza porque su amplitud tienen el mismo valor en todos los puntos de cualquier plano normal a la dirección de propagación de la onda. En otras palabras, la amplitud de los campos es función únicamente de la distancia desde el origen o fuente a un plano dado. Si suponemos que la dirección de propagación de la onda es la del eje Z, por haber sólo variación en esa dirección, entonces $\mathbf{E}$ y $\mathbf{H}$ no varían con $x$ e $y$ y la ecuación de ondas para la componente $\widehat{E}_x$ queda

$$\left(\frac{\partial}{\partial z^2} + k^2\right)\widehat{E}_x = 0 \tag{5.17}$$

y expresiones similares para $\widehat{E}_y$, $\widehat{H}_x$ y $\widehat{H}_y$.

Además, las componentes de los campos en la dirección de propagación son nulas. Esto es fácilmente demostrable sin más que considerar la componente $z$ del teorema de Ampère dado por (5.8),

$$\left(\frac{\partial\widehat{H}_y}{\partial x} - \frac{\partial\widehat{H}_x}{\partial y}\right) = j\mu w\widehat{E}_z$$

puesto que el campo magnético no varía con las coordenadas $x$ e $y$, el miembro izquierdo de esta ecuación es nulo y en consecuencia, la componente $\widehat{E}_z$ del campo eléctrico es nula.

Volviendo a (5.17), la solución general de esta ecuación diferencial viene dada por

$$\widehat{E}_x = E_{xo}^+ e^{-jkz} + E_{xo}^- e^{jkz} \tag{5.18}$$

donde $E_{xo}^+$ y $E_{xo}^-$ son, en general, magnitudes complejas constantes. Si pasamos al dominio del tiempo, la solución general para la ecuación de ondas homogénea es de la forma

$$E_x(z,t) = \Re\left\{\widehat{E}_x\, e^{j\omega t}\right\} = E_{xo}^+ \cos(\omega t - kz) + E_{xo}^- \cos(\omega t + kz)$$

donde el primer término representa una onda con amplitud $E_{xo}^+$ que se propaga en la direción $+z$, mientras el segundo término representa una onda con amplitud $E_{xo}^-$ que se propaga en la dirección $-z$.

Los campos eléctrico y magnético son componentes inseparables de la onda electromagnética y juegan un papel igualmente importante en su propagación. Sin embargo, cuando se trata de detectar la onda, el campo eléctrico es usualmente más importante. La razón es que la mayor parte de los detectores son más sensibles a **E** que a **H**. Por ello, las consideraciones de propagación se hacen sobre el campo eléctrico, aunque todas las ecuaciones tienen su análoga para el campo magnético. Como veremos muy pronto, el campo magnético puede obtenerse siempre a partir del eléctrico y viceversa.

Para continuar nuestro análisis vamos a suponer, sin pérdida de generalidad, que el campo eléctrico se compone únicamente de una onda que se propaga según la dirección $+z$ y con una sola componente según el eje X, esto es

$$\widehat{\mathbf{E}}(z) = E_{xo}^+ e^{-jkz} \mathbf{u}_x \tag{5.19}$$

Sustituyendo esta expresión en la Ley de Faraday dada por (5.9), tenemos

$$\nabla \times \widehat{\mathbf{E}}(z) = \begin{vmatrix} \mathbf{u}_x & \mathbf{u}_y & \mathbf{u}_z \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ E_{xo}^+ e^{-jkz} & 0 & 0 \end{vmatrix} = -j\omega\mu \widehat{\mathbf{H}}(z)$$

de donde se desprende, teniendo en cuenta las propiedades de las ondas planas,

$$\widehat{H}_x = 0$$

$$\widehat{H}_z = 0$$

y

$$\widehat{H}_y = \frac{j}{\mu\omega}\frac{\partial \widehat{E}_x}{\partial z} = \frac{k}{\mu\omega}E_{xo}^{+}e^{-jkz}$$

Como vemos la única componente del campo magnético distinta de cero es la componente $y$. Por tanto, concluimos que la solución para el campo magnético representa también una onda que se propaga en la dirección $+z$ de la forma

$$\widehat{H}_y = H_{yo}^{+}e^{-jkz}$$

y cuya amplitud viene dada por

$$H_{yo}^{+} = \frac{k}{\mu\omega}E_{xo}^{+}$$

Es decir, las amplitudes de ambos campos están relacionadas. El cociente entre la amplitud del campo eléctrico y del campo magnético tiene dimensiones de resistencia eléctrica y se denomina **impedancia intrínseca del medio** ya que depende de las características eléctricas del medio. Efectivamente

$$Z = \frac{E_{xo}^{+}}{H_{yo}^{+}} = \frac{\mu\omega}{k} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \tag{5.20}$$

Para el vacío, la impedancia intríseca tiene el valor de

$$Z_o = 120\pi \quad \Omega$$

De acuerdo con esta definición, los campos de una onda plana que se propaga en un medio sin pérdidas vienen dados por

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbf{E}}(z) &= \widehat{E}_x^{+} = E_{xo}^{+}e^{-jkz}\mathbf{u}_x \\ \widehat{\mathbf{H}}(z) &= \widehat{H}_y^{+} = \frac{E_{xo}^{+}}{Z}e^{-jkz}\mathbf{u}_y \end{aligned}$$

Esto es, los campos eléctrico y magnético son perpendiculares entre sí y a la dirección de propagación. En un caso general, la amplitud del campo eléctrico $E_{xo}^{+}$ es una cantidad compleja, es decir

$$E_{xo}^{+} = \left|E_{xo}^{+}\right| e^{j\phi}$$