

ÍNDICE GENERAL

PREFACIO	15
Tema 1. CAMPO MAGNÉTICO EN MATERIALES	17
1. Efecto Hall	20
1.1. Modelo óhmico de conducción	20
1.2. Campo eléctrico transversal.	21
1.3. Magnetorresistencia	26
2. Desarrollo multipolar del potencial vector	28
2.1. Término monopolar	30
2.2. Término dipolar	31
2.3. Corrientes filiformes	34
2.4. Dipolo magnético puntual	36
3. Campo magnético de un dipolo	36
4. Dipolo en un campo magnético	39
4.1. Par de fuerzas sobre un dipolo	39
4.2. Energía de un dipolo puntual	40
4.3. Fuerza sobre un dipolo puntual	41
5. Imanación	42
5.1. Vector imanación.	43
5.2. Corriente de imanación.	44

5.3. Campo magnético debido a la imanación	48
6. Ecuaciones del campo en medios materiales	53
6.1. Potencial escalar magnético	54
6.2. Intensidad de campo magnético	57
6.3. Teorema del flujo de \mathbf{B}	59
7. Susceptibilidad y permeabilidad	66
8. Condiciones en los límites	69
8.1. Medios homogéneos, lineales e isótropos	69
8.2. Medios materiales con imanación	72
9. Materiales ferromagnéticos	74
9.1. Curva de imanación	75
9.2. Circuitos magnéticos	79
9.3. Material magnético con entrehierro de aire	79
10. Ejercicios propuestos	82
Tema 2. INDUCCIÓN ELECTROMAGNÉTICA	89
1. Ley de Faraday	91
2. Medios estacionarios	92
2.1. Forma diferencial de la ley de Faraday	93
2.2. Corrientes de Foucault	95
3. Medios en movimiento	96
3.1. Cambio de sistema de referencia.	97
4. Violaciones aparentes de la Ley de Faraday	104
4.1. Deformación no continua del circuito	105
4.2. Circuito indeterminado.	105

5. Coeficientes de inducción	110
5.1. Coeficiente de inducción mutua	111
5.2. Fórmula de Neumann.	114
5.3. Coeficiente de autoinducción	115
5.4. Coeficiente de acoplamiento.	120
5.5. Fuerza electromotriz inducida	121
5.6. Transformador	122
6. Ejercicios propuestos	125
Tema 3. ENERGÍA MAGNÉTICA	133
1. Energía magnética.	134
2. Energía en función de B y H	136
3. Energía en medios no lineales	138
4. Coeficiente de autoinducción	140
5. Fuerza y par de fuerzas	144
5.1. Sistemas o circuitos con corriente constante	144
5.2. Sistemas o circuitos con flujo constante.	145
6. Presión magnética	148
7. Ejercicios propuestos	153
Tema 4. CAMPO ELECTROMAGNÉTICO	157
1. Corriente de desplazamiento	159
2. Ecuaciones de Maxwell-Lorentz	162
2.1. Ecuaciones de Maxwell en materiales	164
3. Principio de superposición	165
3.1. Unicidad de las soluciones.	166

4. Condiciones en los límites	166
4.1. Componentes normales	167
4.2. Componentes tangenciales	168
5. Potenciales electrodinámicos	168
5.1. Transformaciones de norma	170
5.2. Norma de Lorenz	171
5.3. Condiciones en los límites para los potenciales	173
6. Teorema de Poynting	173
6.1. Teorema de Poynting en forma compleja	181
7. Ejercicios propuestos	186
Tema 5. ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS: PROPAGACIÓN LIBRE	189
1. Ecuación de ondas	192
2. Propagación de ondas planas en un medio sin pérdidas	196
3. Propagación de ondas planas en medios con pérdidas	206
3.1. Propagación en dieléctricos con pérdidas pequeñas	217
4. Polarización de una onda plana	220
4.1. Polarización circular	223
4.2. Polarización lineal	224
5. Paquete de ondas. Velocidad de grupo	227
6. Reflexión y transmisión de ondas planas: incidencia normal	232
6.1. Balance de potencia	235
6.2. Incidencia normal sobre la superficie de un conductor perfecto	237
7. Reflexión y transmisión de ondas planas: incidencia oblicua	240
7.1. Polarización perpendicular	241
7.2. Polarización paralela	245

7.3. Relaciones de fase. Ángulo de Brewster	247
7.4. Reflectividad y transmisividad	249
8. Ejercicios propuestos	253
Tema 6. PROPAGACIÓN GUIADA. LÍNEAS DE TRANSMISIÓN	259
1. Relaciones generales entre E y H	262
2. Modos de transmisión. Modo TEM	267
3. Líneas de transmisión	269
4. Propagacion de ondas en una línea de transmisión	272
4.1. Impedancia de una línea de transmisión	274
4.2. Coeficiente de reflexión	276
4.3. Líneas de transmisión sin pérdidas	278
5. Caracterización de la onda estacionaria en una línea de transmisión	280
5.1. Razón de onda estacionaria	283
5.2. Impedancia de entrada de una línea sin pérdidas	286
6. Potencia transmitida en una línea sin pérdidas.	288
7. El diagrama de Smith	289
7.1. Aplicaciones de la carta de Smith.	291
8. Adaptación de impedancias.	297
8.1. Adaptación de impedancias mediante un sintonizador simple	297
8.2. Adaptación de impedancias mediante un doble sintonizador	302
8.3. Transformador de $\lambda/4$	307
9. Tratamiento de las líneas con pérdidas	308
10. Ejercicios propuestos	313

Tema 7. PROPAGACIÓN GUIADA: GUÍAS DE ONDAS. CAVIDADES RESONANTES	317
1. Modos de transmisión TE y TM	318
1.1. Modo Transversal Eléctrico TE	319
1.2. Modo Transversal Magnético TM.	320
1.3. Relación de dispersión. Diagrama $\omega - \beta$ para los modos de transmisión.	322
2. Guía de ondas rectangular	324
2.1. Análisis del modo fundamental	329
3. Guía de sección circular	335
3.1. Modo fundamental en una guía cilíndrica	339
4. Potencia en guías. Atenuación	342
4.1. Cálculo de la atenuación en guías.	345
5. Cavidades resonantes	353
5.1. Factor de calidad.	357
6. Ejercicios propuestos	361
 Tema 8. RADIACIÓN ELECTROMAGNÉTICA	 365
1. Potenciales retardados	367
2. Radiación de un dipolo corto.	372
2.1. Campos de un dipolo oscilante.	375
2.2. Potencia radiada por un dipolo corto	378
3. Antenas	381
3.1. Antena lineal	388
3.2. Antena de cuadro	395
3.3. Antenas situadas frente a tierra	398

4. Agrupaciones de antenas lineales	401
4.1. Principio de multiplicación de diagramas. Factor de agrupación . .	403
4.2. Agrupación vertical de dipolos	409
4.3. Agrupación horizontal de dipolos	410
4.4. Análisis del diagrama de radiación de una agrupación	411
4.5. Propiedades directivas de agrupaciones uniformes	413
5. Ejercicios propuestos	416
Apéndice A. TEOREMA DE RECIPROCIDAD	421
Apéndice B. RELACIONES MATEMÁTICAS I	427
Apéndice C. RELACIONES MATEMÁTICAS II	433
Apéndice D. MAGNITUDES FASORIALES	443
Apéndice E. TABLAS	449

TEMA 1
CAMPO MAGNÉTICO EN MATERIALES

RESUMEN

Objetivos generales

Estudiar el comportamiento del campo magnético cuando existen medios materiales e introducir los vectores de campo y parámetros que caracterizan los citados medios.

Objetivos específicos

- Efecto Hall y magnetorresistencia.
- Potencial vector magnético debido a una distribución de corriente: Desarrollo multipolar.
- Términos monopolar y dipolar del potencial vector magnético.
- Momento dipolar magnético de una distribución de corriente y de un circuito filiforme.
- Campo magnético debido a un dipolo magnético.
- Par de fuerzas sobre un dipolo magnético.
- Energía de un dipolo en el seno de un campo magnético uniforme.
- Fuerza sobre un dipolo magnético en un campo no uniforme.
- Origen de los dipolos magnéticos en un material. Definición del vector imanación \mathbf{M} .
- Corrientes de imanación.
- Campo magnético debido a un material imanado.

- Potencial escalar magnético.
- Teorema de Ampère cuando intervienen medios imanados. Definición del vector intensidad de campo magnético \mathbf{H} .
- Relación entre los vectores \mathbf{B} , \mathbf{H} y \mathbf{M} .
- Teorema del flujo de \mathbf{B} a través de una superficie cerrada cuando intervienen medios imanados: Fuentes de la intensidad de campo magnético \mathbf{H} .
- Definición de susceptibilidad y permeabilidad magnética. Distinción entre medios lineales y no lineales.
- Tipos de materiales magnéticos y su caracterización mediante la susceptibilidad o permeabilidad. Medios diamagnéticos, paramagnéticos y ferromagnéticos.
- Curva de primera imanación en medios ferromagnéticos.
- Ciclo de histéresis de materiales ferromagnéticos: Conceptos de campo coercitivo y remanencia.
- Condiciones en los límites para los vectores \mathbf{B} , \mathbf{H} y \mathbf{M} en la frontera de dos medios materiales.

Requisitos previos

Manejar los conceptos de campo vectorial y escalar, campo eléctrico, campo magnético, potencial vector magnético, densidad de corriente eléctrica, Ley de Ohm, fuerza de Lorentz, dipolo eléctrico y dieléctrico. Dominar el cálculo vectorial integral y diferencial.

INTRODUCCIÓN

En este tema vamos a estudiar la interacción de un campo magnético con los materiales.

En primer lugar, vamos a describir el *efecto Hall*, que es la aparición de un campo eléctrico transversal en un medio conductor sometido a un campo magnético y por el que, además, circula una corriente. Asociado a este efecto, y también a la geometría del conductor, tenemos el fenómeno de la *magnetorresistencia* como un incremento de la resistividad natural del medio en presencia de un campo magnético.

Por otro lado, al igual que en el caso electrostático se define el momento dipolar eléctrico (y sus correspondientes momentos multipolares), la polarización y su relación con el campo eléctrico a través del vector desplazamiento, en este tema veremos los momentos multipolares magnéticos, la magnetización de los materiales y su relación con el campo magnético. En este sentido, la interacción del campo magnético y la materia tiene notables coincidencias con el caso electrostático.

Para ello, primero veremos que el potencial vector magnético debido a una distribución de corrientes se puede expresar en función de sus momentos multipolares y que el principal componente en este caso es el momento dipolar.

Posteriormente veremos que un medio material, desde el punto de vista magnético, se puede considerar como un agregado de átomos y moléculas en los que un campo magnético externo induce un momento magnético. Además, en materiales como los paramagnéticos y ferromagnéticos el campo exterior orienta los dipolos magnéticos intrínsecos que poseen. Por otra parte el diamagnetismo tiene su origen en las corrientes atómicas y el paramagnetismo se debe a la orientación de los momentos magnéticos intrínsecos de átomos y moléculas en la dirección del campo aplicado. Los materiales ferromagnéticos se caracterizan porque la interacción de los átomos próximos provoca la alineación de sus momentos dipolares en una dirección; el conjunto de dipolos alineados se agrupan en dominios, zonas del material con los dipolos orientados en una dirección. Un campo externo provoca que los dominios se orienten en la dirección del campo aplicado.

Desde un punto de vista macroscópico un material magnético se caracteriza por su imanación, que se define como el momento magnético por unidad de volumen.

1. EFECTO HALL

1.1. Modelo óhmico de conducción

En el modelo más simple de conducción, la corriente eléctrica no es más que el desplazamiento de cargas libres en un medio bajo la acción combinada de un campo eléctrico externo y el efecto de frenado que producen las colisiones de estas cargas con las partículas materiales que componen el medio. El resultado es que, al igual que un objeto material sometido a una fuerza constante que se desplaza en un fluido, un portador de carga sometido a un campo eléctrico externo en un medio alcanza una velocidad límite promedio que viene dada por:

$$\langle \mathbf{v} \rangle = \nu \mathbf{E} \quad (1.1)$$

donde ν es un parámetro llamado *movilidad*¹ que depende del detalle de la interacción de ese portador concreto con el medio. En un conductor con varias especies actuando como portadoras de carga libre, cada una tiene una movilidad en principio distinta a la de los demás. Adviértase que en esta ecuación ν lleva implícito el signo del portador, es decir, si éste es negativo, ν es negativo. Por tanto $\langle \mathbf{v} \rangle$ toma el sentido que se espera según la carga del portador.

La densidad de corriente se define como $\mathbf{J} = nq \langle \mathbf{v} \rangle = \rho \langle \mathbf{v} \rangle$, donde n es la densidad de portadores, q su carga y $\rho = nq$ la densidad de carga libre disponible para la conducción. Entonces:

$$\mathbf{J} = \rho \nu \mathbf{E} \quad (1.2)$$

Obsérvese que la densidad de corriente, \mathbf{J} , y el campo eléctrico **tienen la misma dirección y sentido** independientemente del signo del portador considerado, puesto que tanto ρ como ν toman el signo del portador² y su producto es siempre positivo.

En el caso de que en el medio haya varias especies portadoras, cada una contribuirá con su propia densidad de carga y movilidad y entonces la densidad

¹ Véase ecuación (10.16) de [1]; hemos cambiado la notación de la movilidad de μ a ν para evitar confusiones con la permeabilidad magnética, concepto que aparece en la sección 7.

² En otras especialidades, como por ejemplo la Electrónica, y también en otros textos la movilidad se toma siempre positiva, prescindiendo de la ecuación 1.1 y expresando 1.2 en términos de densidad de portadores en lugar de ρ . Para los propósitos de esta sección consideramos que es más claro asignarle a la movilidad el signo que le corresponde al portador.

de corriente será la suma de todas las contribuciones:

$$\mathbf{J} = \left(\sum_i \rho_i \nu_i \right) \mathbf{E} \quad (1.3)$$

El factor $\sum_i \rho_i \nu_i$ no es más que la conductividad, γ . Así pues, la ecuación anterior la podemos poner como:

$$\mathbf{J} = \gamma \mathbf{E} \quad (1.4)$$

que es la forma puntual de la ley de Ohm.

1.2. Campo eléctrico transversal

Supongamos que en un conductor se mantiene una corriente que es debida a un solo tipo de portador, como por ejemplo la corriente electrónica en un metal (ver figura 1.1), y que ese conductor está en el seno de un campo magnético. Entonces, sobre las cargas que se desplazan se ejerce la fuerza de Lorentz magnética, $\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$; esta fuerza es perpendicular a la trayectoria de la carga en el interior del conductor, con lo que las cargas tienden a desviarse, generando un exceso de carga en la pared externa del conductor, y un defecto de carga en la pared opuesta (recordemos que el conductor es neutro). Este desequilibrio de carga produce un **campo eléctrico transversal** (E_t) a la corriente; el proceso de acumulación de carga se detiene cuando la fuerza eléctrica compensa la fuerza magnética:

$$\begin{aligned} 0 &= q \mathbf{E}_t + q \langle \mathbf{v} \rangle \times \mathbf{B} \\ \mathbf{E}_t &= - \langle \mathbf{v} \rangle \times \mathbf{B} \end{aligned} \quad (1.5)$$

Expresamos la ecuación (1.5) en función de la densidad corriente ($\mathbf{J} = \rho \langle \mathbf{v} \rangle$, suponiendo un solo portador):

$$\mathbf{E}_t = - \frac{\mathbf{J} \times \mathbf{B}}{\rho} \quad (1.6)$$

Obsérvese que el campo transversal por el efecto Hall depende del signo del portador (a través del signo de la densidad de carga portadora ρ). Por tanto, portadores de distinto signo producen campos Hall de **sentidos opuestos** que tienden a compensarse. El efecto Hall se da, por tanto, en corrientes de conducción producidas por portadores que sean todos del mismo signo (aunque no sea este el

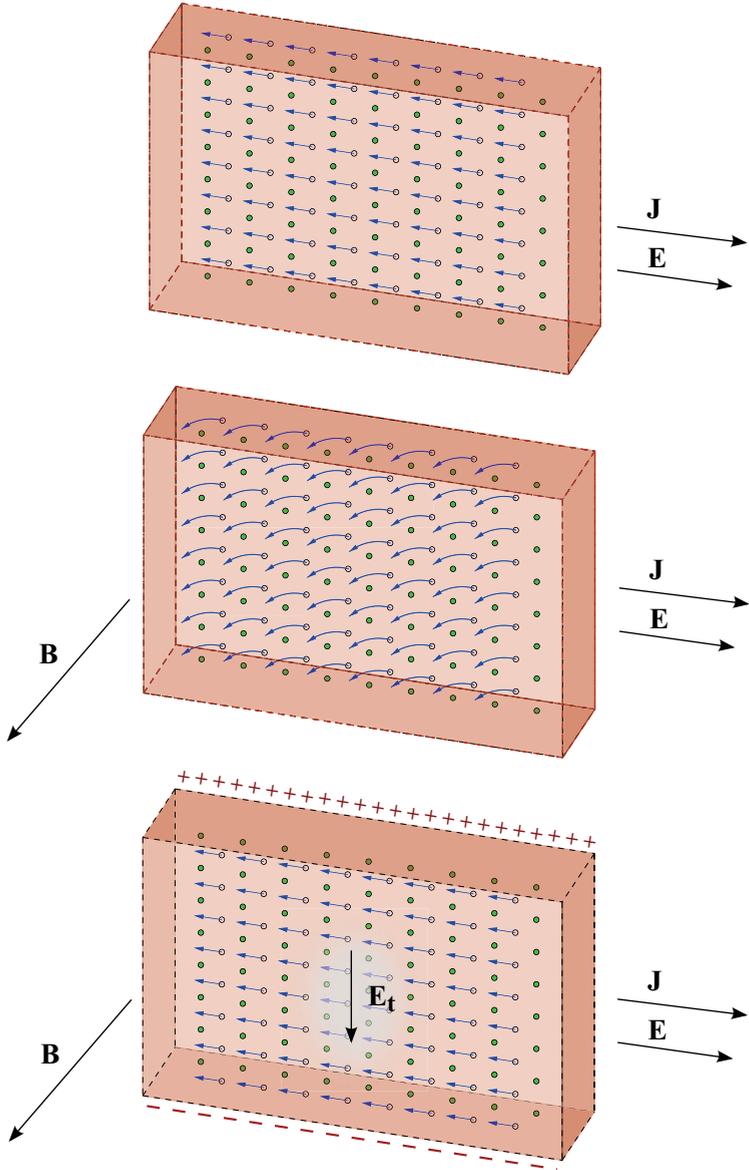


Figura 1.1. Manifestación del efecto Hall en un metal. Los electrones son los puntos que llevan asociado el vector velocidad (obsérvese que es opuesto a \mathbf{J}). Los otros puntos representan los iones positivos de la red.

único escenario, como veremos). De hecho, para determinar qué tipo de portadores conducen la corriente en un medio desconocido, se establece una corriente y un campo magnético perpendicular y se mide la diferencia de potencial en sentido transversal a la corriente, en un plano perpendicular al campo aplicado. El signo de esta diferencia de potencial establece cuál es el signo de la carga del portador mayoritario del medio. Es el método que se usa, por ejemplo, en la determinación del portador dominante en un semiconductor (positivo en los semiconductores tipo- p y negativo en los tipo- n).

Vamos a generalizar la expresión (1.5) para varios portadores. La condición de equilibrio se alcanza cuando no hay corriente neta en la dirección transversal, esto es,

$$\mathbf{J}_t = \sum_i \rho_i \langle \mathbf{u}_i \rangle = 0,$$

donde $\langle \mathbf{u}_i \rangle$ son las velocidades de los portadores en la dirección perpendicular. Ahora aplicamos la expresión (1.1) con un campo electromotriz $\mathbf{E}_t + \langle \mathbf{v}_i \rangle \times \mathbf{B}$:

$$\sum_i \rho_i \nu_i (\mathbf{E}_t + \langle \mathbf{v}_i \rangle \times \mathbf{B}) = 0$$

(obsérvese que en el caso de un único portador recuperamos la ecuación (1.5)). Despejamos \mathbf{E}_t :

$$\mathbf{E}_t = -\frac{\sum_i \rho_i \nu_i \langle \mathbf{v}_i \rangle}{\sum_i \rho_i \nu_i} \times \mathbf{B} \quad (1.7)$$

que también podemos escribir como:

$$\mathbf{E}_t = -\frac{\sum_i \gamma_i \langle \mathbf{v}_i \rangle}{\gamma} \times \mathbf{B} \quad (1.8)$$

donde γ_i son las conductividades parciales de cada portador.

Es interesante ver qué ocurre si tenemos un único portador de carga positiva, (ρ^+, ν^+) y un único portador de carga negativa, (ρ^-, ν^-) ; entonces la condición de neutralidad exige que $\rho^+ = -\rho^- = \rho_0$. Sustituyendo en (1.7):

$$\mathbf{E}_t = -\frac{\nu^+ \langle \mathbf{v}^+ \rangle - \nu^- \langle \mathbf{v}^- \rangle}{\nu^+ - \nu^-} \times \mathbf{B}$$

Si además establecemos una corriente de conducción en sentido longitudinal entonces las velocidades longitudinales $\langle \mathbf{v}^+ \rangle$ y $\langle \mathbf{v}^- \rangle$ son debidas al campo electromotriz \mathbf{E} aplicado en esta dirección y, a partir de 1.1, tenemos:

$$\mathbf{E}_t = -\frac{(\nu^+)^2 - (\nu^-)^2}{\nu^+ - \nu^-} \mathbf{E} \times \mathbf{B}$$

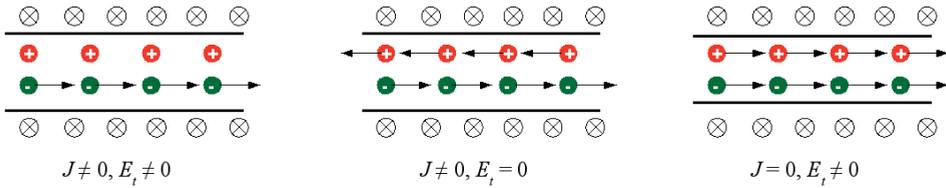


Figura 1.2. Efecto Hall en tres tipos de arrastre de cargas.

simplificando

$$\mathbf{E}_t = -(\nu^+ + \nu^-) \mathbf{E} \times \mathbf{B} \quad (1.9)$$

Obsérvese que si las movilidades de ambos portadores son parecidas en términos absolutos, entonces $\nu^+ \simeq -\nu^-$ y por tanto $\mathbf{E}_t \simeq 0$, como habíamos dicho antes. En el caso de que las movilidades sean apreciablemente distintas entonces tenemos campo transversal, por lo que de una medida de \mathbf{E}_t que no sea nula no podemos inferir directamente que haya un único portador en el medio.

Coefficiente Hall

Se define el *coeficiente Hall*, R_H con la siguiente expresión:

$$R_H = \frac{E_t}{JB} \quad (1.10)$$

donde queda sobreentendido que J y B son perpendiculares y E_t se mide en la dirección perpendicular a ambos; en el caso de un único portador toma el valor

$$R_H = -\frac{1}{\rho}$$

como se comprueba fácilmente con la ecuación (1.6); es decir, el coeficiente Hall es la inversa de la densidad de carga libre de ese portador cambiada de signo.

Ejercicio de autoevaluación 1.1

Encontrar la expresión de R_H para una disolución iónica con una única especie monovalente que se disocia en un portador positivo y otro negativo,

de movilidades respectivas ν^+ y ν^- . La concentración del soluto es n .

Solución

Las densidades de carga de cada especie vienen dadas por

$$\begin{aligned}\rho^+ &= +en \\ \rho^- &= -en\end{aligned}$$

La densidad de corriente en un medio de este tipo, con dos portadores de distinto signo, es:

$$\mathbf{J} = \rho^+ \langle \mathbf{v}^+ \rangle + \rho^- \langle \mathbf{v}^- \rangle = en (\langle \mathbf{v}^+ \rangle - \langle \mathbf{v}^- \rangle)$$

Sustituimos la expresión anterior y la ecuación (1.9) en la definición del coeficiente Hall (1.10); asumimos que los campos implicados son perpendiculares entre sí y eliminamos el carácter vectorial, pero conservando implícitamente los signos en las magnitudes que evidencian el sentido de los campos originales:

$$R_H = \frac{- (\langle v^+ \rangle + \langle v^- \rangle) B}{en (\langle v^+ \rangle - \langle v^- \rangle) B} = - \frac{\langle v^+ \rangle + \langle v^- \rangle}{en (\langle v^+ \rangle - \langle v^- \rangle)}$$

Puesto que estamos en un medio óhmico, las velocidades promedio de cada portador son proporcionales al campo electromotriz según la expresión (1.1); sustituyendo y simplificando:

$$R_H = - \frac{1}{en} \frac{\nu^+ + \nu^-}{\nu^+ - \nu^-}$$

Hay que recordar que las movilidades tienen el mismo signo que la carga de su portador; por tanto, $\nu^+ > 0$ y $\nu^- < 0$.

Pero también se puede producir una situación en que el medio tenga portadores de ambos signos que son arrastrados **en el mismo sentido**. Una situación típica es el flujo de una disolución iónica en una tubería (como por ejemplo, la sangre en los vasos sanguíneos). En este caso $\langle \mathbf{v}^+ \rangle = \langle \mathbf{v}^- \rangle$ y por tanto la **corriente total es nula**. Pero, aún siendo la corriente total nula, **se puede dar efecto Hall**, como se puede ver en la expresión (1.8). Todas las situaciones descritas se reflejan

en la figura 1.2: en la izquierda tenemos el caso de un conductor metálico, donde sólo se desplazan los portadores de carga negativos (electrones); esta situación se corresponde a la reflejada en la figura 1.1; en el centro, se representa una corriente de conducción con portadores de distinto signo implicados; a la derecha, el flujo de un fluido con cargas móviles, que se mueve por arrastre mecánico. Todas las situaciones se dan en el seno de un campo magnético perpendicular al plano del papel, cuyas líneas están representadas por el símbolo \otimes .

1.3. Magnetorresistencia

Ya hemos visto que la presencia de un campo magnético desvía parte de la carga que fluye en forma de corriente eléctrica. Es de esperar que este desvío de cargas tenga su repercusión en la facilidad con que la carga es transportada por el campo electromotriz. Efectivamente, los conductores en el seno de un campo magnético experimentan una disminución de su conductividad efectiva y este fenómeno se conoce por el nombre de *magnetorresistencia*.

Vamos a estudiar el proceso considerando inicialmente un único portador. Aplicamos la ecuación (1.1) pero considerando ahora que el campo electromotriz tiene la componente magnética dada por la fuerza de Lorentz, $\mathbf{E} \leftarrow \mathbf{E} + \langle \mathbf{v} \rangle \times \mathbf{B}$. Sustituyendo en (1.1):

$$\langle \mathbf{v} \rangle = \nu (\mathbf{E} + \langle \mathbf{v} \rangle \times \mathbf{B})$$

que nos da una ecuación en $\langle \mathbf{v} \rangle$. Vamos a resolverla en términos de la densidad de corriente, que viene dada por $\mathbf{J} = \rho \langle \mathbf{v} \rangle$ y donde la conductividad parcial del portador es $\gamma = \rho\nu$:

$$\mathbf{J} = \gamma \mathbf{E} + \nu \mathbf{J} \times \mathbf{B} \quad (1.11)$$

Para despejar \mathbf{J} de la ecuación (1.11) tenemos que hacer algunas manipulaciones algebraicas. Empezamos multiplicando ambos miembros de la ecuación vectorialmente por \mathbf{B} , por la derecha:

$$\mathbf{J} \times \mathbf{B} = \gamma \mathbf{E} \times \mathbf{B} + \nu (\mathbf{J} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} \quad (1.12)$$

El doble producto vectorial de la parte derecha lo resolvemos con la ayuda de la fórmula (C.11) del apéndice C:

$$(\mathbf{J} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} = -\mathbf{B} \times (\mathbf{J} \times \mathbf{B}) = -\mathbf{J}(B^2) + \mathbf{B}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{J})$$

Ahora, en la densidad de corriente que aparece en el paréntesis de la derecha sustituimos la propia expresión (1.11) y nos aprovechamos del hecho que el producto $\mathbf{B} \cdot (\mathbf{J} \times \mathbf{B})$ es nulo:

$$(\mathbf{J} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} = -B^2 \mathbf{J} + \gamma \mathbf{B} (\mathbf{B} \cdot \mathbf{E})$$

por lo que (1.12) queda:

$$\mathbf{J} \times \mathbf{B} = \gamma \mathbf{E} \times \mathbf{B} - \nu B^2 \mathbf{J} + \nu \gamma \mathbf{B} (\mathbf{B} \cdot \mathbf{E})$$

Volvemos a aplicar (1.11) para quitar el término $\mathbf{J} \times \mathbf{B}$:

$$\mathbf{J} - \gamma \mathbf{E} = \nu \gamma \mathbf{E} \times \mathbf{B} - \nu^2 B^2 \mathbf{J} + \nu^2 \gamma \mathbf{B} (\mathbf{B} \cdot \mathbf{E})$$

reorganizando los términos despejamos finalmente \mathbf{J} :

$$\mathbf{J} = \frac{\gamma}{1 + \nu^2 B^2} (\mathbf{E} + \nu \mathbf{E} \times \mathbf{B} + \nu^2 \mathbf{B} (\mathbf{B} \cdot \mathbf{E})) \quad (1.13)$$

La ecuación anterior nos da la densidad de corriente total, tanto en la componente paralela al campo electromotriz original como en otras direcciones. Vemos que incluso la componente paralela al campo, que correspondería al primer término de la derecha de (1.13), está afectada por una conductividad efectiva:

$$\gamma_{\text{ef}} = \gamma (1 + \nu^2 B^2)^{-1}$$

que es inferior a la conductividad original, justamente por la intervención del campo magnético.

En realidad, esta conductividad efectiva depende de la dirección que adopte el campo magnético. Si éste es paralelo a \mathbf{E} , entonces $\mathbf{B} (\mathbf{B} \cdot \mathbf{E}) = B^2 \mathbf{E}$ y la ecuación (1.13) queda:

$$\mathbf{J} = \frac{\gamma}{1 + \nu^2 B^2} (\mathbf{E} + 0 + \nu^2 B^2 \mathbf{E}) = \gamma \mathbf{E}$$

y recuperamos la ley de Ohm original, sin ningún tipo de modificación de la conductividad por influencia del campo magnético externo. Es decir *los campos magnéticos paralelos al campo electromotriz no producen efecto Hall ni magnetorresistencia*.

La ecuación (1.13) se puede generalizar a varios portadores de corriente, cada uno con su conductividad y movilidad parcial γ_i, ν_i

$$\mathbf{J} = \sum_i \mathbf{J}_i = \sum_i \frac{\gamma_i}{1 + \nu_i^2 B^2} (\mathbf{E} + \nu_i \mathbf{E} \times \mathbf{B} + \nu_i^2 \mathbf{B} (\mathbf{B} \cdot \mathbf{E})) \quad (1.14)$$

Disipación de potencia

Como ya sabemos, la densidad potencia disipada en un medio resistivo es:

$$P = \mathbf{J} \cdot \mathbf{E}$$

Aplicando esta relación a la ecuación (1.14):

$$P = \sum_i \frac{\gamma_i}{1 + \nu_i^2 B^2} \left(E^2 + \nu_i^2 (\mathbf{B} \cdot \mathbf{E})^2 \right) \quad (1.15)$$

Como siempre es útil analizar los casos extremos:

B y E paralelos Entonces:

$$P = \sum_i \frac{\gamma_i}{1 + \nu_i^2 B^2} (E^2 + \nu_i^2 B^2 E^2) = \sum_i \gamma_i E^2 = \gamma E^2$$

que es la ley de Joule habitual en un conductor en ausencia de campo magnético.

B y E perpendiculares

$$P = \sum_i \frac{\gamma_i}{1 + \nu_i^2 B^2} E^2 = \gamma_{\text{ef}} E^2$$

donde $\gamma_{\text{ef}} < \gamma$ y el conductor disipa menos potencia por efecto de la magnetorresistencia.

2. DESARROLLO MULTIPOLAR DEL POTENCIAL VECTOR

Analizamos ahora el potencial vector magnético originado por una distribución de corriente limitada a un volumen próximo al origen del sistema de coordenadas que tomamos de referencia. El potencial se calcula a partir de la ecuación (1.16) que lo define en función de la densidad de corriente. La figura 1.3 muestra la situación de la distribución de corriente y el punto donde se calcula el potencial. Supondremos que el punto donde se calcula está muy alejado de la zona donde se ubica la corriente, de manera que la distancia entre puntos donde se sitúa la corriente es despreciable frente a la distancia a dicho punto; es decir, suponemos que $|\mathbf{r}'| \ll |\mathbf{r}|$.

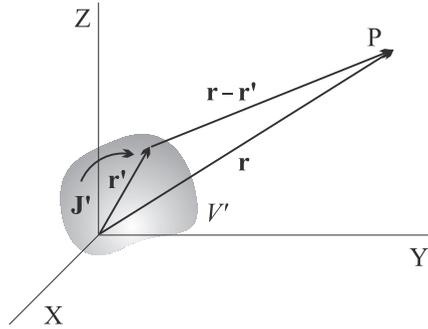


Figura 1.3

La ecuación de partida es,

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_o}{4\pi} \int_{V'} \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv' \quad (1.16)$$

En la relación anterior se mezclan coordenadas con y sin prima. Interesa desarrollar la ecuación anterior en función de términos multipolares, y de forma que en cada término sea el producto de dos elementos uno en el que sólo figura la variable con prima y en el otro la variable \mathbf{r} .

Con la condición $|\mathbf{r}'| \ll |\mathbf{r}|$, podemos desarrollar en serie $1/|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ y tomar los dos primeros términos,

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{1}{(r^2 + r'^2 - 2\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}')^{1/2}} \simeq \frac{1}{(r^2 - 2\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}')^{1/2}} = \frac{1}{r(1 - 2\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'/r^2)^{1/2}}$$

Si ponemos $x = 2\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'/r^2$, desarrollamos el binomio $(1 - x)^{-1/2}$ y tomamos los dos primeros términos, tenemos que,

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{1}{r} + \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r^3} + \dots$$

de modo que,

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_o}{4\pi} \frac{1}{r} \int_{V'} \mathbf{J}(\mathbf{r}') dv' + \frac{\mu_o}{4\pi} \frac{1}{r^3} \int_{V'} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}') \mathbf{J}(\mathbf{r}') dv' + \dots \quad (1.17)$$

El primer término de la ecuación anterior se conoce como **término monopolar** y el segundo es el **término dipolar**. Como veremos a continuación el

desarrollo en términos multipolares es más complejo que en electrostática. El término dipolar es el que predomina en medios magnéticos, por esta razón sólo vamos a estudiar los dos términos indicados. Dada la complejidad de cálculo y su menor influencia en los fenómenos observados en medios magnéticos no analizaremos el momento cuadrupolar.

Para el análisis de los citados términos, vamos a demostrar el comportamiento de dos relaciones muy útiles. La primera es el producto de una función escalar por el vector densidad de corriente $f(\mathbf{r}') \mathbf{J}$, donde $f(\mathbf{r}')$ es una función escalar, que depende de las coordenadas donde se sitúa la distribución de corriente. Considerando el volumen V' donde se sitúa la corriente y la superficie S' que encierra por completo la distribución de corriente, se puede comprobar que se verifica:

$$\int_{V'} \nabla' \cdot (f(\mathbf{r}') \mathbf{J}) dv' = \oint_{S'} (f(\mathbf{r}') \mathbf{J}) \cdot d\mathbf{s}' = 0 \quad (1.18)$$

Se anula la integral de superficie porque sobre S' el flujo de la corriente es nulo ya que, por construcción, S' engloba toda la corriente.

Dado que ∇' actúa sobre las coordenadas de \mathbf{r}' , y considerando que se trata de corrientes estacionarias donde $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$, la siguiente relación vectorial será,

$$\nabla' \cdot (f(\mathbf{r}') \mathbf{J}) = (\nabla' f(\mathbf{r}')) \cdot \mathbf{J} + f(\mathbf{r}') \nabla' \cdot \mathbf{J} = (\nabla' f(\mathbf{r}')) \cdot \mathbf{J}$$

Llevando este resultado a la ecuación (1.18) queda,

$$\int_{V'} (\nabla' f(\mathbf{r}')) \cdot \mathbf{J} dv' = 0 \quad (1.19)$$

2.1. Término monopolar

Vamos a utilizar las ecuaciones (1.18) y (1.19) para analizar el comportamiento de los términos de la ecuación (1.17).

Si suponemos que $f(\mathbf{r}') = x'$

$$\nabla f(\mathbf{r}') = \mathbf{u}_x \quad \text{y} \quad (\nabla f(\mathbf{r}')) \cdot \mathbf{J} = J_x$$

Llevando este resultado a la ecuación (1.19) tendremos,

$$\int_{V'} (\nabla f(\mathbf{r}')) \cdot \mathbf{J} dv' = \int_{V'} J_x dv' = 0$$

Lo mismo ocurrirá si hacemos $f(\mathbf{r}') = y'$, y $f(\mathbf{r}') = z'$,

$$\int_{V'} J_y dv' = 0 \quad ; \quad \int_{V'} J_z dv' = 0$$

Podemos expresar las relaciones anteriores de forma genérica como sigue: $f(\mathbf{r}') = x'_i$, donde ($x'_1 = x'$, $x'_2 = y'$ y $x'_3 = z'$). $\nabla f(\mathbf{r}') = \nabla x'_i = \mathbf{u}_i$. J_1 representará a J_x , J_2 a J_y y J_3 a J_z . Con esta notación,

$$\int_{V'} J_i dv' = 0$$

De las relaciones anteriores se deriva que,

$$\int_{V'} \mathbf{J} dv' = \mathbf{u}_x \int_{V'} J_x dv' + \mathbf{u}_y \int_{V'} J_y dv' + \mathbf{u}_z \int_{V'} J_z dv' = 0$$

Es decir,

$$\int_{V'} \mathbf{J} dv' = 0 \quad (1.20)$$

Con esto se demuestra que *el término monopolar en el desarrollo de potencial vector debido a una distribución de corrientes es nulo*. Si recordamos que el primer término en caso de electrostática es la suma de todas las cargas eléctricas, que dicho término monopolar para corrientes sea nulo es una consecuencia del teorema de la divergencia, es decir, que en magnetismo no hay monopolos o cargas magnéticas.

2.2. Término dipolar

Ahora vamos a transformar el segundo término de la ecuación (1.17) para separar los elementos que dependen de las coordenadas con prima de los que no la tienen. Si desarrollamos el producto escalar $\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'$,

$$\mathbf{A}_D(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r^3} \int_{V'} (x x' + y y' + z z') \mathbf{J}(\mathbf{r}') dv'$$

Si ponemos la expresión en función de $x_j x'_j$, con $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$, $x'_1 = x'$, $x'_2 = y'$ y $x'_3 = z'$, y teniendo en cuenta que la integración se hace sobre las

variables con prima, la ecuación anterior se puede expresar de la siguiente manera,

$$\mathbf{A}_D(\mathbf{r}) = \frac{\mu_o}{4\pi} \frac{1}{r^3} \sum_{j=1}^3 x_j \int_{V'} x'_j \mathbf{J}(\mathbf{r}') dv'$$

La componente i del vector \mathbf{A}_D será,

$$A_D(\mathbf{r})_i = \frac{\mu_o}{4\pi} \frac{1}{r^3} \sum_{j=1}^3 x_j \int_{V'} x'_j J_i dv'$$

Para transformar esta ecuación sumamos y restamos términos $x'_i J_j$ dentro del integrado de la forma siguiente,

$$A_D(\mathbf{r})_i = \frac{\mu_o}{4\pi} \frac{1}{r^3} \sum_{j=1}^3 x_j \int_{V'} \left(\frac{1}{2}(x'_j J_i + x'_i J_j) + \frac{1}{2}(x'_j J_i - x'_i J_j) \right) dv'$$

Vamos a demostrar que el primer término dentro de la integral es nulo. Para ello utilizamos la relación (1.19), pero ahora ponemos $f = x' y'$,

$$\nabla f = y' \mathbf{u}_x + x' \mathbf{u}_y$$

De forma genérica, si $f = x'_i x'_j$,

$$\nabla f = x'_j \mathbf{u}_i + x'_i \mathbf{u}_j$$

Llevando esta relación a la ecuación (1.19),

$$\int_{V'} (x'_j \mathbf{u}_i + x'_i \mathbf{u}_j) \cdot \mathbf{J} dv' = \int_{V'} (x'_j J_i + x'_i J_j) dv' = 0$$

Con este resultado el primer término del segundo miembro de $A_D(\mathbf{r})_i$ se anula y por tanto,

$$A_D(\mathbf{r})_i = \frac{\mu_o}{4\pi} \frac{1}{r^3} \sum_{j=1}^3 x_j \int_{V'} \frac{1}{2}(x'_j J_i - x'_i J_j) dv'$$

En forma vectorial,

$$\sum_{j=1}^3 x_j (x'_j J_i - x'_i J_j) = [\mathbf{J}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}') - \mathbf{r}'(\mathbf{J} \cdot \mathbf{r})]_i$$

Teniendo en cuenta la relación vectorial (C.11),

$$(\mathbf{r}' \times \mathbf{J}) \times \mathbf{r} = \mathbf{J}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}') - \mathbf{r}'(\mathbf{J} \cdot \mathbf{r})$$

$$\sum_{j=1}^3 x_j(x'_j J_i - x'_i J_j) = [(\mathbf{r}' \times \mathbf{J}) \times \mathbf{r}]_i$$

Con esta igualdad,

$$A_D(\mathbf{r})_i = \frac{\mu_o}{4\pi} \frac{1}{r^3} \frac{1}{2} \int_{V'} [(\mathbf{r}' \times \mathbf{J}) \times \mathbf{r}]_i dv'$$

Todas las componentes son similares, por tanto,

$$\mathbf{A}_D(\mathbf{r}) = \frac{\mu_o}{4\pi} \frac{1}{r^3} \int_{V'} \frac{1}{2} ((\mathbf{r}' \times \mathbf{J}) \times \mathbf{r}) dv' \quad (1.21)$$

En la ecuación anterior podemos agrupar los términos que dependen de las coordenadas con prima de la siguiente manera,

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2} \int_{V'} (\mathbf{r}' \times \mathbf{J}) dv' \quad (1.22)$$

La ecuación (1.22) define el **momento dipolar magnético** debido a una distribución arbitraria de corriente.

El término dipolar queda definido por la siguiente ecuación,

$$\mathbf{A}_D(\mathbf{r}) = \frac{\mu_o}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{r}}{r^3} \quad (1.23)$$

Vemos que el término dipolar del potencial vector magnético es perpendicular al momento dipolar magnético y al vector que indica la posición donde se considera el potencial.

Cambio de origen

Vamos a ver que si cambiamos el origen del sistema de coordenadas no cambia el momento dipolar. Suponemos que el origen del sistema de referencia cambia a un punto O_o , de manera que $\overrightarrow{OO_o} = \mathbf{a}$, y los nuevos vectores de posición que

indican dónde se toman los elementos de corriente se relacionan con los anteriores mediante la siguiente ecuación,

$$\mathbf{r}'_o = \mathbf{r}' - \mathbf{a}$$

Sustituyendo en la ecuación (1.22),

$$\begin{aligned} \mathbf{m}_o &= \frac{1}{2} \int_{V'} \mathbf{r}'_o \times \mathbf{J} dv' = \frac{1}{2} \int_{V'} (\mathbf{r}' - \mathbf{a}) \times \mathbf{J} dv' \\ &= \frac{1}{2} \int_{V'} \mathbf{r}' \times \mathbf{J} dv' - \frac{1}{2} \mathbf{a} \times \int_{V'} \mathbf{J} dv' \end{aligned}$$

Pero como vimos en el apartado anterior dedicado al término monopolar,

$$\int_{V'} \mathbf{J} dv' = 0$$

Por tanto,

$$\mathbf{m}_o = \mathbf{m}$$

El momento dipolar magnético debido a una distribución de corriente *no depende del origen de coordenadas elegido*, por tanto es un elemento que caracteriza la distribución y se puede calcular eligiendo el sistema de coordenadas más apropiado a la distribución de corriente que consideremos.

2.3. Corrientes filiformes

Cuando se trata de un circuito cerrado por el que circula una corriente I , la forma que adopta la expresión (1.22) cambia. Se sustituye $\mathbf{J}dv'$ por $I d\mathbf{l}'$ y la integral de volumen se convierte en una integral sobre el camino cerrado que coincide con el hilo que soporta la corriente. El momento dipolar queda de la forma siguiente,

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2} I \oint_{C'} \mathbf{r}' \times d\mathbf{l}' \quad (1.24)$$

Circuito plano

En el caso de un circuito filiforme situado sobre el plano XY como muestra la figura 1.4(a), la relación (1.24) se puede simplificar teniendo en cuenta el área

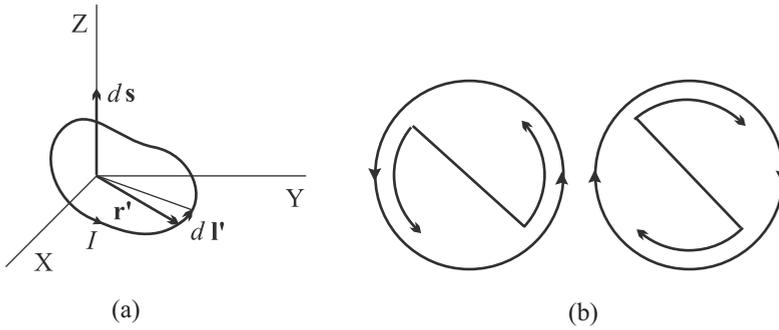


Figura 1.4

elemental dentro de la espira. Dicha área es,

$$\frac{1}{2} \mathbf{r}' \times d\mathbf{l}' = ds' = \mathbf{n} ds'$$

La integral sobre todo el contorno C' será el área de la espira,

$$\frac{1}{2} \oint_{C'} \mathbf{r}' \times d\mathbf{l}' = \mathbf{n} S$$

En un circuito plano su momento dipolar magnético es,

$$\mathbf{m} = I S \mathbf{n} \quad (1.25)$$

El momento dipolar magnético tiene dimensiones de intensidad de corriente por superficie, $[\text{A} \cdot \text{m}^2]$ en el SI.

La orientación del momento está relacionada con el sentido de recorrido del circuito y obedece a la regla del tornillo. En la figura 1.4(b) se muestran dos espiras con sentidos de corriente opuesto; en la primera el vector \mathbf{n} sale del plano hacia el observador y en la segunda entra en el plano. Se han dibujado una N y una S con los sentidos de corriente para indicar de forma esquemática que una espira produce un momento similar al observado en el polo norte de una barra imanada y la otra corresponde al polo sur. Si miramos la primera espira de frente vemos el polo norte y si lo hacemos por la cara opuesta, vista desde la otra cara del papel, se observará el polo sur.

2.4. Dipolo magnético puntual

El dipolo magnético puntual es una abstracción que consiste en una partícula puntual que porta un cierto momento dipolar magnético \mathbf{m} . Se puede visualizar como un circuito plano donde $S \rightarrow 0$ y a la vez $I \rightarrow \infty$ mientras que su producto es constante, $m = IS$.

3. CAMPO MAGNÉTICO DE UN DIPOLO

Es interesante conocer la forma que adoptan las líneas de campo en el caso de un dipolo magnético puntual situado en el origen de coordenadas. El potencial vector magnético que corresponde a este dipolo ideal viene dado por la ecuación (1.23). Calculamos el campo magnético en un punto definido por el vector de posición \mathbf{r} , aplicando la relación entre \mathbf{B} y \mathbf{A} ,

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = \frac{\mu_o}{4\pi} \nabla \times \left(\frac{\mathbf{m} \times \mathbf{r}}{r^3} \right)$$

En primer lugar aplicamos la relación vectorial (C.42),

$$\nabla \times (\phi \mathbf{G}) = (\nabla \phi) \times \mathbf{G} + \phi \nabla \times \mathbf{G}$$

En este caso $\phi = 1/r^3$ y $\mathbf{G} = \mathbf{m} \times \mathbf{r}$.

$$\nabla \left(\frac{1}{r^3} \right) = \mathbf{u}_r \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r^3} \right) = -\frac{3r^2}{r^6} \mathbf{u}_r = -\frac{3\mathbf{r}}{r^5}$$

Por tanto,

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_o}{4\pi} \left(-\frac{3\mathbf{r}}{r^5} \times (\mathbf{m} \times \mathbf{r}) + \frac{1}{r^3} \nabla \times (\mathbf{m} \times \mathbf{r}) \right)$$

Aplicando la relación del producto vectorial doble,

$$\mathbf{r} \times (\mathbf{m} \times \mathbf{r}) = \mathbf{m}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}) - \mathbf{r}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{m}) = r^2 \mathbf{m} - \mathbf{r}(\mathbf{m} \cdot \mathbf{r})$$

$$-\frac{3\mathbf{r}}{r^5} \times (\mathbf{m} \times \mathbf{r}) = \frac{3}{r^5} (\mathbf{r}(\mathbf{m} \cdot \mathbf{r}) - r^2 \mathbf{m})$$

El rotacional del producto vectorial es,

$$\nabla \times (\mathbf{m} \times \mathbf{r}) = \mathbf{m} \nabla \cdot \mathbf{r} - \mathbf{r} \nabla \cdot \mathbf{m} + (\mathbf{r} \cdot \nabla) \mathbf{m} - (\mathbf{m} \cdot \nabla) \mathbf{r}$$

El operador ∇ ahora representa derivar con respecto a las coordenadas del punto donde se calcula el campo, es decir, las indicadas por \mathbf{r} . El momento \mathbf{m} es constante. Teniendo esto en cuenta,

$$\nabla \cdot \mathbf{r} = 3 \quad ; \quad \nabla \cdot \mathbf{m} = 0 \quad ; \quad (\mathbf{r} \cdot \nabla) \mathbf{m} = 0$$

$$(\mathbf{m} \cdot \nabla) \mathbf{r} = \left(\mathbf{m} \cdot \left(\mathbf{u}_r \frac{\partial}{\partial r} + \mathbf{u}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \mathbf{u}_\varphi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \right) r \mathbf{u}_r$$

$$(\mathbf{m} \cdot \nabla) \mathbf{r} = \mathbf{m} \cdot \mathbf{u}_r \frac{\partial}{\partial r} r \mathbf{u}_r + \mathbf{m} \cdot \mathbf{u}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} r \mathbf{u}_r + \mathbf{m} \cdot \mathbf{u}_\varphi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} r \mathbf{u}_r$$

Como,

$$\frac{\partial \mathbf{u}_r}{\partial r} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial \mathbf{u}_r}{\partial \theta} = \mathbf{u}_\theta \quad ; \quad \frac{\partial \mathbf{u}_r}{\partial \varphi} = \mathbf{u}_\varphi \sin \theta$$

Desarrollando la derivada del producto $r \mathbf{u}_r$, la relación anterior se transforma en,

$$(\mathbf{m} \cdot \nabla) \mathbf{r} = (\mathbf{m} \cdot \mathbf{u}_r) \mathbf{u}_r + (\mathbf{m} \cdot \mathbf{u}_\theta) \mathbf{u}_\theta + (\mathbf{m} \cdot \mathbf{u}_\varphi) \mathbf{u}_\varphi = \mathbf{m}$$

ya que los productos escalares son las proyecciones de \mathbf{m} sobre los respectivos ejes de coordenadas; es decir, las componentes de \mathbf{m} .

De todo lo anterior se deduce que,

$$\nabla \times (\mathbf{m} \times \mathbf{r}) = 3\mathbf{m} - \mathbf{m} = 2\mathbf{m}$$

Llevando las operaciones realizadas a la expresión del campo,

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_o}{4\pi} \left(\frac{3}{r^5} (\mathbf{r}(\mathbf{m} \cdot \mathbf{r}) - r^2 \mathbf{m}) + \frac{2\mathbf{m}}{r^3} \right)$$

Simplificando queda,

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_o}{4\pi} \frac{1}{r^5} (3\mathbf{r}(\mathbf{m} \cdot \mathbf{r}) - r^2 \mathbf{m}) \quad (1.26)$$

La ecuación (1.26) expresa el campo debido a un dipolo puntual situado en el origen de coordenadas y a una distancia r muy grande comparada con las dimensiones del dipolo.

La expresión del campo magnético debido a un dipolo es similar a la obtenida para un dipolo eléctrico y muestra que el campo debido a una distribución de corriente distante no depende de su forma geométrica, sino sólo de su momento dipolar magnético. La diferencia esencial con el dipolo eléctrico es que en éste las

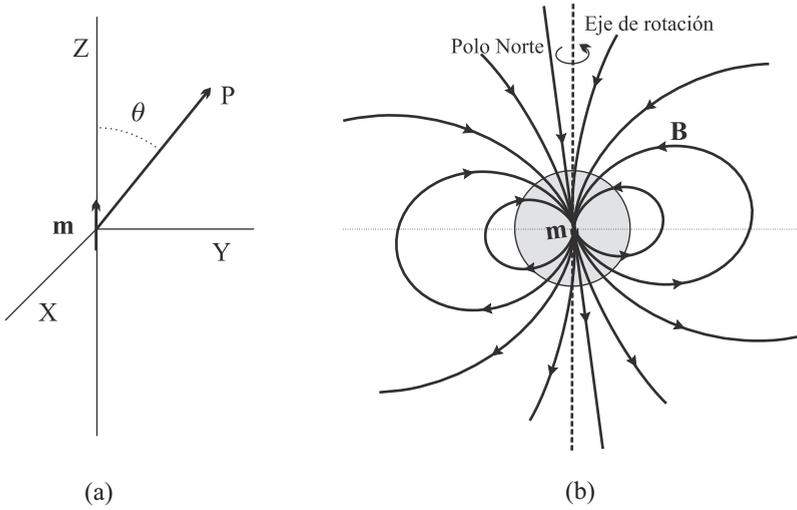


Figura 1.5

líneas de campo tienen su origen en la carga positiva y mueren en la negativa, sin embargo las líneas del dipolo magnético no tienen origen ni final como muestra la figura 1.5(b).

La demostración anterior es de carácter general y sirve para cualquier orientación del dipolo en el origen de coordenadas. Si suponemos el momento dipolar magnético orientado en la dirección del eje Z, como muestra la figura 1.5(a), podemos obtener las componentes del campo magnético de forma más sencilla. En este caso el potencial vector definido por la ecuación (1.23) se puede poner de la siguiente forma,

$$\mathbf{A}_D(\mathbf{r}) = \frac{\mu_o}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{r}}{r^3} = \frac{\mu_o}{4\pi} \frac{m \operatorname{sen} \theta}{r^2} \mathbf{u}_\varphi$$

Dado que sólo hay componente $A_D(\mathbf{r})_\varphi$, y ésta depende de las variables r y θ , el rotacional en coordenadas esféricas se reduce a la siguiente expresión,

$$\nabla \times \mathbf{A}_D(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{u}_r}{r \operatorname{sen} \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (A_D(\mathbf{r})_\varphi \operatorname{sen} \theta) - \frac{\mathbf{u}_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_D(\mathbf{r})_\varphi)$$

Operando se obtiene el campo magnético referido al dipolo de la figura 1.5(a),

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_o m}{4\pi} \left(\frac{2 \cos \theta}{r^3} \mathbf{u}_r + \frac{\operatorname{sen} \theta}{r^3} \mathbf{u}_\theta \right) \quad (1.27)$$

La figura 1.5(b) muestra las líneas de campo correspondientes a un dipolo magnético ideal que proporciona una idea aproximada de cómo se distribuyen las líneas de campo en la tierra, considerada ésta como un dipolo magnético situado en su centro. El eje de rotación no coincide con el eje del dipolo. El momento de este dipolo está orientado de tal manera que forma un ángulo de $168,5^\circ$ aproximadamente con el eje de rotación. En el polo norte las líneas de campo entran verticalmente y en el sur salen. Esta asignación es opuesta, como hemos visto antes en el circuito plano, a la que utilizamos para una espira, que es la utilizada para un imán o un solenoide, y se debe a que el polo norte de una brújula, aguja magnética, se orienta en hacia el sur. Con la definición dada para una espira el polo norte de la tierra sería el sur magnético.

Las líneas de campo magnético terrestre se deben a un momento dipolar $m \simeq 8,2 \times 10^{22} \text{ [A m}^2\text{]}$, y el campo varía desde $3 \times 10^{-5} \text{ Wb/m}^2$ en el ecuador hasta $6 \times 10^{-5} \text{ Wb/m}^2$ en los polos. El campo magnético terrestre fluctúa con el tiempo, además depende de las zonas geográficas y de las tormentas magnéticas provocadas por el Sol. En los estudios de paleontología se han observado fluctuaciones del campo y también periodos en los que se ha invertido la orientación de los polos. Durante los últimos cien millones de años el campo ha permanecido en el entorno de los valores actuales.

4. DIPOLO EN UN CAMPO MAGNÉTICO

4.1. Par de fuerzas sobre un dipolo

Vamos demostrar cómo se puede poner el par de fuerzas que ejerce un campo magnético sobre una corriente en función del momento dipolar. Suponemos que el campo donde se sitúa la distribución de corriente es uniforme y que dicha corriente está dentro de un volumen V' . El par de fuerzas viene dado por,

$$\mathbf{T} = \int_{V'} \mathbf{r}' \times (\mathbf{J} \times \mathbf{B}) dv'$$

Desarrollando el producto vectorial doble a partir de (C.11)

$$\begin{aligned} \mathbf{r}' \times (\mathbf{J} \times \mathbf{B}) &= \mathbf{J}(\mathbf{r}' \cdot \mathbf{B}) - \mathbf{B}(\mathbf{r}' \cdot \mathbf{J}) \\ \mathbf{T} &= \int_{V'} \mathbf{J}(\mathbf{r}' \cdot \mathbf{B}) dv' - \mathbf{B} \int_{V'} (\mathbf{r}' \cdot \mathbf{J}) dv' \end{aligned}$$

El segundo término de la ecuación anterior es nulo. Para demostrarlo tenemos en cuenta que para cada una de las componentes de la integral se verifica que,

$$\int_{V'} (\mathbf{r}' \cdot \mathbf{J}) dv' = \int_{V'} (\nabla \cdot \frac{1}{2} r'^2) \cdot \mathbf{J} dv'$$

Donde hemos sustituido \mathbf{r}' por $\nabla(\frac{1}{2}r'^2)$. Aplicando la ecuación (1.19), la ecuación anterior será,

$$\int_{V'} (\nabla \cdot \frac{1}{2} r'^2) \cdot \mathbf{J} dv' = 0$$

Como habíamos enunciado al principio.

El par de fuerzas se reduce a la siguiente expresión,

$$\mathbf{T} = \int_{V'} \mathbf{J}(\mathbf{r}' \cdot \mathbf{B}) dv' \quad (1.28)$$

Ahora observamos que el cálculo realizado en el apartado 2.2, que lleva desde el término dipolar del desarrollo del potencial vector en la ecuación (1.17) hasta el resultado (1.23), nos permite escribir,

$$\int_{V'} \mathbf{J}(\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}) dv' = \mathbf{m} \times \mathbf{r}$$

Comprobamos que es de la misma forma que (1.28), y se transforma una en otra sin más que cambiar \mathbf{r} por \mathbf{B} , por tanto,

$$\mathbf{T} = \mathbf{m} \times \mathbf{B} \quad (1.29)$$

La ecuación anterior expresa el par de fuerzas sobre un dipolo, cuyo momento dipolar es \mathbf{m} , debido a un campo magnético externo \mathbf{B} .

4.2. Energía de un dipolo puntual

Para obtener la energía de un dipolo en función del campo aplicado y del ángulo que forman el momento dipolar con el campo magnético, calculamos el trabajo necesario para girar el dipolo.

Suponemos lo siguiente: que el campo magnético es $\mathbf{B} = B\mathbf{u}_z$, que el dipolo está en el plano YZ y forma un ángulo θ con el eje Z, que el eje de giro es el eje X y por tanto la velocidad angular de giro es $\omega = \omega\mathbf{u}_x$

El trabajo elemental es,

$$dW = \mathbf{T} \cdot (d\theta \mathbf{u}_x)$$

Donde

$$\mathbf{T} = \mathbf{m} \times \mathbf{B} = -m B \sin \theta \mathbf{u}_x$$

Llevando estas relaciones a la ecuación anterior queda,

$$dW = -m B \sin \theta d\theta$$

El trabajo realizado para pasar del ángulo de referencia θ_o a θ será,

$$W = - \int_{\theta_o}^{\theta} m B \sin \theta d\theta = m B (\cos \theta - \cos \theta_o)$$

Si tomamos como cero de energía potencial $\theta_o = \pi/2$,

$$W = m B \cos \theta$$

Como la energía potencial es el trabajo realizado contra el campo,

$$U_D = V_D = -m B \cos \theta = -\mathbf{m} \cdot \mathbf{B} \quad (1.30)$$

La ecuación anterior muestra que la energía del dipolo es igual a $-mB$ para $\theta = 0$, nula para $\theta = \pi/2$ e igual a mB para $\theta = \pi$. La variación entre distintos ángulos es de forma cosenoidal. Vemos que la posición más estable es la correspondiente a la energía mínima y en ella el dipolo tiene la misma dirección y sentido que el campo.

4.3. Fuerza sobre un dipolo puntual

La fuerza sobre un dipolo se puede obtener a partir de la energía. Se puede demostrar³ que en un campo magnético $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ la relación entre fuerza y energía es la conocida de mecánica y electrostática,

$$\mathbf{F} = -\nabla U_D = \nabla(\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r})) \quad (1.31)$$

³ Véase Jackson [8] apartado 5.7.

En el caso de que $\nabla \times \mathbf{B} = 0$, que presupone que $\mathbf{J} = 0$ en el punto donde se considera \mathbf{m} , y teniendo en cuenta la relación vectorial,

$$\nabla(\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r})) = \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{m}) + \mathbf{m} \times (\nabla \times \mathbf{B}) + (\mathbf{m} \cdot \nabla)\mathbf{B} + (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{m}$$

Como \mathbf{m} es constante y $\nabla \times \mathbf{B} = 0$, la ecuación anterior se reduce a la siguiente,

$$\mathbf{F} = (\mathbf{m} \cdot \nabla)\mathbf{B} \quad (1.32)$$

Dicha fuerza es nula en el caso de un campo magnético uniforme, ya que \mathbf{m} y \mathbf{B} serían independientes de las coordenadas, y en los demás casos \mathbf{F} depende de la variación de $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ con las coordenadas.

5. IMANACIÓN

Los medios materiales están compuestos por átomos y moléculas, que a su vez se componen de partículas como los protones, neutrones y electrones. Los protones y neutrones se concentran en el núcleo y los electrones están dispuestos alrededor del núcleo.

Clásicamente, el movimiento de los electrones alrededor del núcleo se asimila a una corriente sobre una espira que produce un momento conocido como **momento magnético orbital**. Además los electrones se caracterizan por tener un momento magnético intrínseco relacionado con una propiedad mecano-cuántica llamada **espín**. Las partículas del núcleo también tienen un momento magnético intrínseco pero es mucho menor que los momentos orbital y de espín de los electrones, ya que ambos momentos son inversamente proporcionales a sus masas, y tanto la masa del protón como la del neutrón es aproximadamente mil ochocientas veces mayor que la del electrón.

Los distintos átomos que componen un material pueden tener un momento magnético total distinto de cero o nulo, dependiendo de que los momentos orbitales y de espín se anulen o no entre sí. Cuando los átomos tienen un momento magnético distinto de cero, puede ocurrir que su orientación sea al azar, lo que sucede en los materiales llamados **paramagnéticos**; o bien que se produzca una orientación espontánea de todos los momentos en una dirección, como ocurre en los medios **ferromagnéticos**.

Si ponemos un material en presencia de un campo magnético, los dipolos se orientan en la dirección del campo debido al par de fuerzas que se ejerce sobre

cada dipolo magnético. Además el campo perturba el momento orbital e induce un cambio en los momentos magnéticos orbitales.

La descripción anterior es de naturaleza clásica y es un modelo aproximado de lo que ocurre con las propiedades magnéticas de los materiales, pero debemos tener presente que dichos fenómenos son de naturaleza cuántica y para un análisis correcto se debe utilizar la mecánica cuántica.

En resumen, un material puede ser considerado como una agrupación de dipolos distribuidos en el volumen que ocupa dicho material. Es decir, el material se comporta como un conjunto de pequeñas espiras recorridas por corrientes denominadas corrientes amperianas.

5.1. Vector imanación

Desde un punto de vista macroscópico se tienen en cuenta los momentos dipolares magnéticos mediante la definición de un vector, llamado **imanación o magnetización** \mathbf{M} , que es función de los momentos magnéticos atómicos. Si tomamos \mathbf{m}_i como el momento dipolar magnético de cada átomo y consideramos un volumen elemental Δv , la suma vectorial de los momentos magnéticos en Δv será $\Sigma \mathbf{m}_i$; la imanación \mathbf{M} se define mediante la siguiente ecuación:

$$\mathbf{M} = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\Sigma \mathbf{m}_i}{\Delta v} \quad (1.33)$$

\mathbf{M} es el momento dipolar magnético por unidad de volumen, conocido con el nombre de **imanación**. En la definición, el límite de Δv se considera de forma que Δv sea muy pequeño desde un punto de vista macroscópico, pero al mismo tiempo el número de momentos dipolares \mathbf{m}_i en su interior debe ser grande. De esta forma la función vectorial \mathbf{M} es una función continua que depende del punto considerado. Las dimensiones de \mathbf{M} , dado que las de \mathbf{m} son $[\text{A m}^2]$, serán $[\text{A/m}]$.

La imanación \mathbf{M} es por tanto una magnitud que depende del punto donde nos situemos y representa el momento magnético de los átomos que componen un volumen muy pequeño del entorno de dicho punto. Es una función que nos permite obtener el campo magnético producido por un material imanado.

5.2. Corriente de imanación

En los materiales no ferromagnéticos, los momentos magnéticos de los átomos o bien son nulos o bien su orientación es aleatoria de forma que la suma es nula. Cuando se aplica un campo externo se orientan los dipolos o se inducen momentos magnéticos en los átomos y en consecuencia se produce una imanación \mathbf{M} .

La imanación nos permite describir, desde un punto de vista macroscópico, las características de materiales magnéticos y obtener el campo magnético producido por un material imanado.

La interpretación macroscópica que se hace de los momentos magnéticos de los átomos, es asimilar dichos momentos a pequeñas espiras recorridas por unas corrientes conocidas como corrientes amperianas. A una agrupación de átomos caracterizada por una imanación \mathbf{M} se puede atribuir una corriente, llamada *corriente de imanación*, que permite describir las características del grupo de átomos y calcular el campo magnético debido a ellos. La corriente de imanación no representa un movimiento de cargas a través del material, simplemente es un modelo para expresar el campo debido a los momentos magnéticos de los átomos.

Densidad de corriente en el interior del material

Es interesante encontrar la relación entre la imanación \mathbf{M} y la corriente de imanación. Para ello vamos a estudiar un material cuya imanación no es uniforme, y dentro de dicho material consideramos dos volúmenes elementales $\Delta v = \Delta x \Delta y \Delta z$ contiguos como muestra la figura 1.6(a). En primer lugar analizamos la imanación en dos volúmenes contiguos dispuestos en la dirección de eje Y, y consideramos la componente en la dirección del eje X.

Al primer volumen elemental del conjunto de átomos corresponde una imanación $-M_x \mathbf{u}_x$ en la dirección del eje X, y la relación entre imanación y la corriente de imanación asociada a dicho volumen es,

$$M_x \Delta x \Delta y \Delta z = I_1 \Delta S = I_1 \Delta y \Delta z$$

Es decir, la imanación, momento magnético por unidad de volumen, multiplicado por el volumen elemental, es equivalente a una espira de superficie $\Delta y \Delta z$ recorrida por una corriente I_1 .

En el volumen adyacente podemos expresar la imanación mediante un desa-